



Raira Rössner da Silva

**UMA POSSIBILIDADE PARA O ENSINO DE CONCEITOS
ELEMENTARES DE GEOMETRIA ESFÉRICA NO ENSINO MÉDIO**

Osório
2019

Raira Rössner da Silva

**UMA POSSIBILIDADE PARA O ENSINO DE CONCEITOS
ELEMENTARES DE GEOMETRIA ESFÉRICA NO ENSINO MÉDIO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Josias Neubert Savóis

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – IFRS
Campus Osório
Curso Superior de Licenciatura em Matemática

Osório
2019

Raira Rössner da Silva

**UMA POSSIBILIDADE PARA O ENSINO DE CONCEITOS
ELEMENTARES DE GEOMETRIA ESFÉRICA NO ENSINO MÉDIO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Banca examinadora

Prof^o. Me. Josias Neubert Savóis
IFRS - *campus* Osório

Prof^o. Me. Ricardo Silva Ribeiro
IFRS - *campus* Restinga

Prof^o. Me. Sérgio Guilherme Santos Portella
IFRS - *campus* Osório

Osório
2019

AGRADECIMENTOS

Sempre que nos deparamos com momentos que são cruciais e que nos conduzem a uma nova etapa de vida, lembramos que não atingimos nossas metas sozinhos. Durante a jornada para que alcancemos nossos objetivos, temos a certeza de que grandes pessoas, e grandes amigos, estiveram ao nosso lado e colaboraram para que o resultado fosse o melhor possível.

Portanto, a todos que acreditaram em mim durante o período da graduação e a todos que, de alguma forma, se tornaram colaboradores para a conclusão deste trabalho, meus sinceros agradecimentos.

“A dúvida permite extrair um núcleo de certeza, que cresce à medida que ela se radicaliza; é indubitável que, se duvido, penso.”

René Descartes

RESUMO

Este trabalho tem como principal objetivo contribuir para a inserção do ensino de Geometria Esférica no ensino médio. Para tanto, apresenta uma pesquisa bibliográfica acerca da história do desenvolvimento do conhecimento geométrico até Euclides e a compilação de sua obra *Os elementos*, bem como a controvérsia que orbitava o quinto postulado, até a descoberta das geometrias não euclidianas, em especial a geometria esférica, escolhida para ser o foco deste trabalho. Em seguida, trata de uma sequência de elementos e propriedades e apresenta uma proposta de ensino, de modo a introduzir conceitos básicos desta geometria.

Palavras-chave: Geometrias não euclidianas. Geometria Esférica. Ensino de geometria.

ABSTRACT

This work aims to contribute to the insertion of the teaching of Spherical Geometry in high school. To this end, it presents a bibliographical research on the history of the development of geometric knowledge until Euclid and the compilation of his work *The Elements*, as well as the controversy that orbited the fifth postulate, until the discovery of non-Euclidean geometries, in particular, the spherical geometry, chosen to be the focus of this work. It then deals with a sequence of elements and properties and presents a teaching proposal in order to introduce basic concepts of this geometry.

Keywords: Non-Euclidean geometries. Spherical geometry. Geometry teaching.

Lista de Figuras

Figura 1 -	Tales de Mileto	15
Figura 2 -	Pitágoras de Samos	17
Figura 3 -	Euclides de Alexandria	18
Figura 4 -	Página de rosto da tradução para o inglês dos <i>Elementos</i> de Euclides (1570)	19
Figura 5 -	Representação geométrica do quinto postulado de Euclides	21
Figura 6 -	Ilustração do quadrilátero de Saccheri	22
Figura 7 -	Ilustração da hipótese do ângulo reto	23
Figura 8 -	Ilustração da hipótese do ângulo obtuso	23
Figura 9 -	Ilustração da hipótese do ângulo agudo	23
Figura 10 -	Johann Carl Friedrich Gauss	27
Figura 11 -	Janos Bolyai	28
Figura 12 -	Nikolai Ivanovich Lobachevsky	29
Figura 13 -	George Friedrich Bernhard Riemann	31
Figura 14 -	Ilustração de superfícies de curvatura nula, negativa e positiva	34
Figura 15 -	Superfície esférica de centro O e raio r	35
Figura 16 -	Pontos antípodas	35
Figura 17 -	Plano tangente à superfície esférica	36
Figura 18 -	Plano secante à superfície esférica	36
Figura 19 -	Circunferência máxima	37
Figura 20 -	Retas determinadas por pontos antípodas	37
Figura 21 -	Paralelos e Meridianos	37
Figura 22 -	Circunferências máximas	38
Figura 23 -	Circunferência esférica	38
Figura 24 -	Arco de circunferência máxima	39
Figura 25 -	Latitude de um ponto da superfície esférica	39
Figura 26 -	Longitude na superfície esférica	40
Figura 27 -	Raio e comprimento da circunferência esférica	40
Figura 28 -	Distância polar	41
Figura 29 -	Distância polar	42
Figura 30 -	Ângulo esférico	42
Figura 31 -	Triângulo esférico	43
Figura 32 -	Volume da esfera - dedução	43
Figura 33 -	Esferas concêntricas	44
Figura 34 -	Fuso esférico	45
Figura 35 -	Cunha esférica	46
Figura 36 -	Calota esférica	47

Figura 37 -	Zona esférica	47
Figura 38 -	Calotas e zona esférica	48
Figura 39 -	Área da calota e zona esférica - Dedução	48
Figura 40 -	Triângulo e fusos esférico	49
Figura 41 -	Área do triângulo esférico	50
Figura 42 -	Coordenadas Esféricas	51
Figura 43 -	Superfície esférica construída com com ponto flutuante (ϕ de 5° em 5°)	51
Figura 44 -	Material adaptado de “As aventuras de Anselmo Curioso: Os Mistérios da Geometria”	52
Figura 45 -	Material adaptado de “As aventuras de Anselmo Curioso: Os Mistérios da Geometria”	53
Figura 46 -	Atividade 1 - folha de papel	54
Figura 47 -	Atividade 1 - esfera de isopor	54

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Contextualização do tema e problema	12
1.2	Justificativa	13
2	ORIGENS DA GEOMETRIA	14
2.1	Os elementos de Euclides	19
2.2	Tentativas de demonstrar o quinto postulado de Euclides	21
3	DESCOBERTA DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS	25
3.1	Fundadores das geometrias não euclidianas	25
3.1.1	Gauss	26
3.1.2	Bolyai	28
3.1.3	Lobachevsky	29
3.1.4	Riemann	31
4	GEOMETRIA ESFÉRICA	34
4.1	Elementos e propriedades	35
4.2	Volume da esfera	43
4.3	Área da esfera	44
4.4	Área do triângulo esférico	49
5	PROPOSTA DE ENSINO	52
5.1	Atividades	53
5.2	Exercícios de aplicação	56
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
7	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	63

1 INTRODUÇÃO

De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 60) a pesquisa é “[...] um processo de estudo que consiste na busca disciplinada/metódica de saberes ou compreensões acerca de um fenômeno, problema ou questão da realidade ou presente na literatura o qual inquieta/instiga o pesquisador perante o que se sabe ou diz a respeito”. Estes autores ainda apontam que a pesquisa bibliográfica deve ser feita preferencialmente sobre documentação e ajuda a organizar os registros relativos às informações de forma sistemática. Nesse sentido, elaboramos este trabalho com base em uma pesquisa do tipo bibliográfica, envolvendo trabalhos relevantes que versam sobre geometrias não euclidianas e, especialmente, geometria esférica.

Neste trabalho apresentamos uma possibilidade para o ensino de conceitos básicos de geometria esférica no ensino médio. Tendo em vista que a maioria dos livros didáticos traz uma abordagem simplificada e direta para o estudo da esfera e da superfície esférica, sentimos a necessidade de inserir o estudo desta geometria não euclidiana através de uma abordagem mais completa e baseada em elementos e propriedades que a difere da geometria euclidiana, mas que possa ser eficaz para mostrar o poder das definições, axiomas e postulados, onde novas definições para retas e segmentos de reta podem trazer ao aluno uma visão mais ampla dos objetos que a matemática permite analisar, compreender, calcular, construir e admirar.

Alinhado a este pensamento, elaboramos o texto que segue, partindo de um estudo aprofundado do contexto histórico que deu origem às geometrias não euclidianas, ressaltando o nome de alguns matemáticos que contribuíram grandemente para a criação de novas ferramentas de cálculo e compreensão de superfícies curvas. A história dos quase vinte séculos envolvidos neste processo constitui um capítulo particularmente interessante da história da matemática e, em consonância com D’Ambrosio (2012, p. 27), a percepção da história da matemática é essencial em discussões sobre a matemática e seu ensino. Ademais, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998) destacam que “a Matemática não evoluiu de forma linear e logicamente organizada. Desenvolveu-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas.” (BRASIL, 1998, p. 25) Nesse sentido, acreditamos que apresentar a história do desenvolvimento das geometrias não euclidianas pode ajudar a reconhecer a matemática com uma ciência viva, além de ser um importante elemento para perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas em contextos específicos de suas épocas.

Em seguida passamos para o estudo de alguns elementos e propriedades da geometria esférica, permitindo ao leitor se familiarizar com este tema, através de definições simples e precisas e auxiliadas pela visualização dos objetos estudados. As figuras apresentadas neste trabalho, com exceção das referenciadas, foram construídas pelos autores utilizando o ambiente 3D do software livre de geometria dinâmica GeoGebra.

De posse dos elementos e propriedades iniciais da geometria desenvolvida na superfície esférica, que acreditamos ser de acesso e entendimento aos estudantes do ensino médio, de acordo com a abordagem e adaptações didáticas, preparamos uma sequência de atividades que visam efetivar a assimilação dos conceitos estudados e desenvolver habilidades de cálculos de área e volume utilizando os conhecimentos da geometria euclidiana plana aliado aos novos conhecimentos vistos na geometria esférica. Com isso, concluímos a proposta de motivar professores e alunos a estudar uma geometria que parte de um desmembramento da geometria organizada por Euclides, mas que permite uma compreensão mais profunda e correta dos objetos que manipulamos quase diariamente.

1.1 Contextualização do tema e problema

O ensino de geometria ministrado na educação básica limita-se à geometria apresentada nos livros didáticos, ou seja, a geometria que teve sua origem na antiguidade e que está enraizada de influência euclidiana e, por conta disso, os alunos saem do ensino médio com quase total desconhecimento das geometrias não euclidianas.

É importante salientar que a geometria euclidiana tem grande aplicabilidade no nosso cotidiano, porém, esta geometria possui limitações, fato este que pode ser facilmente percebido ao se tentar calcular distâncias entre dois pontos ou medidas de ângulos em superfícies curvas, tais como superfícies esféricas, elípticas ou hiperbólicas.

Desde os primórdios até os dias atuais, o ser humano passou por diversas transformações, mudando seu modo de enxergar o universo e a si próprio. No entanto, determinados conhecimentos matemáticos percorreram milênios consagrando-se como verdades absolutas e insuperáveis. Mas a geometria euclidiana é realmente a única capaz de representar todas as possibilidades do universo? Por exemplo, a superfície terrestre e sua forma elipsoidal, as ondas do mar, as montanhas, entre tantos outros exemplos que encontramos facilmente na natureza, comprovam a dificuldade de desenvolver alguns conceitos geométricos fundamentados por noções primitivas como ponto, reta e plano (BRUM; SCHUHMACHER, 2013).

A importância de ensinar as geometrias não euclidianas na educação básica se dá no entendimento de que a geometria euclidiana não é a única possível e que pode ser praticada no mundo em que vivemos, além disso, muitos dos nossos problemas cotidianos são resolvidos graças às geometrias não euclidianas. Sendo assim, o estudo e a realização de atividades sobre essas geometrias podem proporcionar reflexões importantes acerca da validade, coerência e rigor de sistemas axiomáticos, assim como pode auxiliar na compreensão e interação com o meio em que vivemos.

1.2 Justificativa

Considerando a importância do estudo de geometria para a formação e desenvolvimento dos alunos, acreditamos que, como argumenta Fiorentini (1995, p. 5) que sem estudar esse tópico matemático as pessoas não irão desenvolver o pensamento geométrico que é necessário para resolver problemas do cotidiano. Também não saberão fazer uso dos conceitos geométricos para compreender e resolver questões em outras áreas do conhecimento, como, por exemplo, Geografia e Astronomia, onde se torna fundamental uma prática pedagógica que possibilite a construção e ampliação desse pensamento. Gravina (2001) destaca que a precária formação escolar dos alunos em geometria é evidenciada nos desempenhos dos calouros que cursam a disciplina de Geometria I do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, que chegam ao curso superior sem as habilidades intelectuais necessárias à construção do pensamento geométrico. A mesma autora ainda aponta que “Abstrair, generalizar, estabelecer relações, errar, fazer conjecturas, demonstrar – as ações que caracterizam o processo de criação em matemática lhes são estranhas.” (GRAVINA, 2001, p. 4).

Uma das justificativas para o ensino de outras geometrias que não estão presentes no currículo e nos livros didáticos se encontra nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998):

Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a geometria euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico. (BRASIL, 1998, p. 25).

Através deste trabalho, pretende-se elaborar uma proposta de ensino de Geometria Esférica, com o auxílio de um ambiente de geometria dinâmica e de materiais concretos, que leve em consideração a exploração de objetos geométricos no modelo esférico e possibilite ao aluno visualizar, analisar e, por fim, deduzir propriedades desta geometria, constituindo assim o pensamento geométrico de natureza dedutiva, levando a uma aprendizagem mais significativa.

Pretende-se que o material a ser desenvolvido concentre os aspectos históricos que levaram ao descobrimento e desenvolvimento dessa geometria, bem como o estudo dos elementos e propriedades da geometria esférica, além de atividades que possam ser desenvolvidas no ensino médio.

2 ORIGENS DA GEOMETRIA

Os seres humanos sempre estiveram cercados por uma abundante variedade de formas geométricas fornecidas pela natureza e, desde os tempos mais remotos, o homem primitivo parecia possuir uma capacidade inata de perceber essas configurações e compará-las quanto à forma e ao tamanho. Noções sobre curvas, superfícies e volumes podem ter surgido na mente humana da observação do meio ambiente. Por exemplo: o arco-íris sugere uma curva, as bolhas de água têm a forma de um hemisfério e os troncos das árvores, de cilindros. Por esta razão, ao elaborar um relato em ordem cronológica sobre a origem e desenvolvimento da geometria, impõe-se a questão de por onde começar.

É difícil precisar a origem da geometria, uma vez que as origens do tema são anteriores à escrita, sendo baseadas em poucas evidências restantes a partir dos documentos que sobreviveram. Podemos, no entanto, compreender as razões de seu surgimento. De acordo com Boyer (2012, p. 26), o homem neolítico (c. 7000-3000 a.C.), através de seus desenhos, figuras, tecidos e cestas, já apresentava uma preocupação com relações espaciais, congruência, simetria e escala que abriram o caminho para a geometria. De forma admirável, o homem primitivo foi capaz de transformar a percepção sobre o espaço a sua volta em uma espécie de geometria rudimentar básica, que foi utilizada para construir moradias, tecer, confeccionar vasos e potes e para fazer pinturas e ornamentos. Contudo, apesar de notável, essa geometria era muito intuitiva e precisava de uma fundamentação epistêmica mínima.

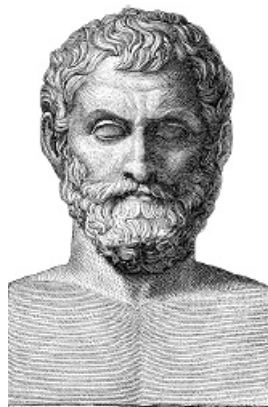
Muitos séculos de estudos e contribuições à geometria se passaram até que o homem passasse a estabelecer procedimentos gerais baseados em situações geométricas particulares, provavelmente, recorrendo a métodos baseados na observação e na experimentação, caracterizando um método indutivo rudimentar. Boyer (2012, p. 29) declara que o historiador grego Heródoto (484?-424? a.C.) atribui aos egípcios a origem da geometria, acreditando que a mesma tenha surgido da necessidade prática de realizar novas medições de terras após as inundações anuais do rio Nilo, fazendo desaparecer os limites de terra concernentes a cada um. Isso explica a origem da palavra geometria, que vem do grego *geometrein* (*geo* significa “terra”, e *metrein*, “medir”). O filósofo grego Aristóteles (384-322 a.C.), porém, atribui a descoberta da geometria pelos egípcios à ociosidade dos sacerdotes que, como classe privilegiada, dispunha de tempo para reflexões como essas.

Contudo, havia uma deficiência no nível de conhecimentos geométricos desenvolvidos em civilizações mais antigas (como a egípcia e a babilônica) que, embora significativa, limitava-se a uma coleção de regras empíricas que jamais foram formuladas genericamente. Os especialistas que as utilizavam concentravam-se em saber *como* elas funcionam, sem nunca se preocupar com os seus *porquês* e, nessas condições, não havia como garantir a veracidade de um resultado ou regra. Em outras palavras, como diferenciar procedimentos corretos de procedimentos apenas aproximados?

A julgar pelos dados históricos de que dispomos, as primeiras manifestações de preocupação com os *porquês* em matemática só ocorreriam durante a primeira metade do sexto século a.C., em alguma das muitas cidades-Estados gregas. Eves (2011, p. 94) declara que, pela primeira vez na matemática, bem como em outros campos, o homem passou a formular questões fundamentais como “*Por que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?*” e “*Por que o diâmetro de um círculo divide esse círculo ao meio?*”. É dessa preocupação que nasce a matemática, no sentido moderno da palavra, uma ciência em que as “verdades” decorrem de raciocínios organizados em demonstrações e não de métodos empíricos, por melhores que sejam.

Os primeiros passos significativos nesse sentido, onde a geometria recebeu as primeiras tentativas de deduções sistemáticas (geometria demonstrativa)¹, foram dadas por Tales (640?-564? a.C.), um sábio natural da cidade-Estado grega de Mileto, na Ásia Menor. Como refere Mlodinow (2010, p. 24), Tales tem a honra de ser a pessoa mais frequentemente designada como o primeiro matemático do mundo, além de ser considerado o primeiro dos Sete Sábios da Antiguidade.

Figura 1: Tales de Mileto



Fonte: Neto (2018)

Não se conhece muito sobre a vida de Tales; segundo parece, ele começou como mercador e, dotado de rara inteligência, tornou-se rico o bastante para, depois, dedicar boa parte de sua vida aos estudos e a algumas viagens. Conta-se que Tales viveu por algum tempo no Egito e que causou grande admiração ao calcular a altura de uma pirâmide por meio da sombra desta e de uma vara de tamanho conhecido. Quando retornou a Mileto, ganhou o merecido respeito de seus conterrâneos, como estadista, homem de negócios, filósofo, matemático e astrônomo.

Sobre Tales, relatam-se algumas histórias engraçadas. Uma delas diz que certa ocasião, depois de anoitecer, ele caminhava com os olhos voltados para o céu e, distraído,

¹Há alguns historiadores da matemática antiga, em particular Otto Neugebauer, que discordam dessa explicação tradicional evolucionária da origem da matemática demonstrativa e são favoráveis a uma explicação mais revolucionária segundo a qual a mudança teria se iniciado com a descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$. (EVES, 2011, p. 94).

caiu num fosso. Correndo a notícia, não faltou quem perguntasse: como pretendia entender os céus um homem que não enxergava um palmo à frente de seu nariz? Não obstante, em outra oportunidade, segundo um relato, ele provou que também tinha espírito prático: prevendo uma safra de olivas muito abundante, obteve o monopólio de todas as prensas de azeite da região, alugou-as depois da colheita e obteve um grande lucro.

Em geometria, creditam-se a Tales os seguintes resultados:

1. Um círculo é bissectado por seu diâmetro.
2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.
3. Ângulos opostos pelo vértice são congruentes.
4. Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um deles são congruentes respectivamente a dois ângulos e um lado do outro, então os triângulos são congruentes.
5. Todo ângulo inscrito num semicírculo é reto. (Este resultado era conhecido pelos babilônios cerca de 1.400 anos antes, no entanto, é atribuído a Tales uma espécie de demonstração deste resultado.)

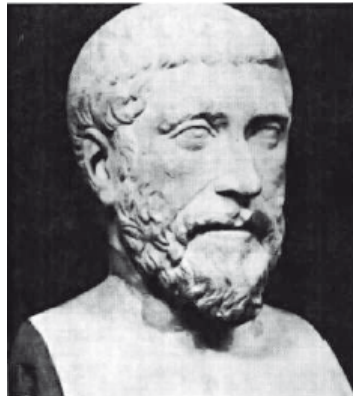
É curioso que entre os resultados atribuídos a Tales não figure explicitamente o teorema que trata de um feixe de paralelas cortadas por duas transversais e conhecido, entre nós, por *teorema de Tales*, contudo, em consequência de que o cálculo da altura da pirâmide pressupõe o conhecimento da relação entre semelhança de triângulos e proporcionalidade dos lados correspondentes e, portanto, tem ligação com o teorema, o crédito é válido e a homenagem é merecida. Ademais, não se pode avaliar o mérito matemático de Tales somente pelos resultados atribuídos a ele, pois muito mais importante foi ele tê-los obtido mediante alguns raciocínios lógicos e não pela intuição ou experimentação.

A sistematização iniciada por Tales foi continuada ao longo dos dois séculos seguintes por Pitágoras de Samos (586?-500? a.C.) e seus discípulos. A ilha de Samos, localizada no Mar Egeu, era uma rica cidade-Estado grega governada pela classe mercantil, mais preocupada em expandir seu poder do que fomentar o saber. Por esta razão, aos 18 anos de idade, Pitágoras foi para a ilha de Lesbos, onde estudou filosofia por dois anos. Depois disso, seguiu para o Egito e Babilônia, absorvendo informações matemáticas, astronômicas e religiosas.

Mais tarde, ao retornar ao mundo grego, Pitágoras estabeleceu-se em Crotona, local onde fundou sua famosa escola pitagórica que, apesar do clima de misticismo que a cercava, teria uma grande influência nos rumos da filosofia e da ciência, particularmente a matemática. Uma das características da escola era a tradição oral: os ensinamentos eram transmitidos sem que nada fosse escrito e, por conta disso, o pouco de que se sabe sobre a produção matemática dessa escola provém de fontes indiretas, muitos séculos posteriores a sua extinção e nem sempre concordantes. Além disso, todas as realizações da escola costumavam ser atribuídas a seu fundador, sendo, portanto, difícil determinar quais descobertas matemáticas são devidas a Pitágoras ou aos outros membros da escola

pitagórica.

Figura 2: Pitágoras de Samos



Fonte: Eves (2011)

A filosofia pitagórica baseava-se no lema de que “tudo é número” o que, de acordo com Eves (2011, p. 97) levou a uma exaltação e ao estudo das propriedades dos números e da aritmética (no sentido de teoria dos números), juntamente com a geometria, a música e a astronomia. Boyer (2012, p. 56) relata que pode-se perceber neste lema uma forte afinidade com a Mesopotâmia, uma vez que os babilônios associaram diversas medidas numéricas às coisas que os cercavam, desde a quantidade e o valor de seus escravos até os movimentos nos céus.

Não há dúvidas de que os pitagóricos desempenharam um papel muito importante na história da matemática. No Egito e na Mesopotâmia, os elementos de aritmética e geometria eram basicamente exercícios de aplicação de processos numéricos a problemas específicos e, para os pitagóricos, a matemática relacionava-se muito mais com o amor à sabedoria do que com as exigências da vida prática (BOYER, 2012, p. 56). Nesse sentido, costuma-se atribuir aos pitagóricos a criação da matemática pura, ou seja, da matemática cultivada sem objetivos práticos.

Possivelmente, a maior contribuição da escola pitagórica à matemática tenha sido o reconhecimento de que esta ciência lida com abstrações. Na geometria, mostraram que a soma dos ângulos internos de um triângulo é o ângulo raso e descobriram as grandezas incomensuráveis. Também se deve a Pitágoras a descoberta independente do teorema sobre triângulos retângulos que hoje leva seu nome – que o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos. O resultado deste teorema já era conhecido pelos babilônios há mais de mil anos, mas sua primeira demonstração geral pode ter sido dada por Pitágoras.

Passado algum tempo, a escola pitagórica foi fechada sob a acusação de apoiar a aristocracia, contrária ao governo, o que fez com que a confraria se dispersasse. Pitágoras refugiou-se, então, em Metaponto, uma outra colônia grega do sul da Itália, onde ficou até sua morte. A escola pitagórica ainda sobreviveu por ao menos mais dois séculos, com

seus membros dispersos pelo mundo grego.

Do exposto, podemos concluir que as ciências (em particular, a matemática) receberam dos gregos as primeiras tentativas de sistematização. Há quase 26 séculos, Tales provou que algumas propriedades das figuras geométricas podiam ser deduzidas de outras, elaborando os primeiros teoremas geométricos e Pitágoras, juntamente com seus discípulos, foi responsável por dar novo impulso à pesquisa e desenvolvimento de relações lógicas entre as proposições matemáticas. Ainda, Hipócrates de Quio (c. 440 a.C.), Platão (427?-347 a.C.), Aristóteles (384-322 a.C.) e outros sucessores de Pitágoras contribuíram grandemente para o desenvolvimento da geometria, bem como para sua organização como ciência, mas coube a Euclides de Alexandria (325?-265? a.C.), por volta de 300 a.C., coordenar e sistematizar boa parte do conhecimento matemático da época, incluindo a geometria, em uma coleção de treze livros intitulada *Os elementos*, primeira obra a chegar em sua inteireza aos nossos dias.

Figura 3: Euclides de Alexandria



Fonte: Carvalho (2014)

Euclides foi um matemático grego que viveu na primeira metade do século III a.C. e, apesar da fama atribuída à ele devido ao seu *best-seller*, muito pouco se sabe sobre seus dados biográficos, exceto que, segundo Eves (2011, p. 167), ele foi o fundador da famosa e duradoura escola de matemática de Alexandria, da qual certamente foi professor. Boyer (2012, p. 87) observa que, da natureza do trabalho de Euclides, pode-se presumir que ele tenha estudado com discípulos de Platão, senão na própria Academia (fundada por Platão em Atenas, por volta de 387 a. C., foi uma instituição orientada por propósitos sistemáticos de investigação científica e filosófica, cujo lema, fixado à entrada da mesma, dizia: “*Que aqui não adentrem aqueles não versados em geometria*”).

Das *estórias* contadas sobre Euclides, destacam-se uma que diz que, quando um de seus alunos lhe perguntou sobre a serventia do estudo de geometria, o mestre ordenou que seu escravo desse uma moeda ao aluno, para que este tivesse algum ganho com o que estava aprendendo; e a outra é sobre a célebre frase atribuída a Euclides: “Não há atalhos reais na geometria”, que teria sido dita em resposta à pergunta de Ptolomeu sobre se havia um caminho mais curto do que *Os elementos* para o conhecimento geométrico.

2.1 Os elementos de Euclides

A mais antiga tentativa conhecida de organizar a geometria num encadeamento lógico-dedutivo deve-se ao sábio grego Euclides em sua obra-prima *Os elementos*. Nenhuma obra, exceto a Bíblia, teve número maior de edições, e nenhuma obra matemática teve tanta influência quanto a de Euclides. Para Eves (2011, p. 96), *Os Elementos* de Euclides, com sua grandeza, superaram tanto os trabalhos matemáticos gregos anteriores que eles acabaram sendo descartados e se perderam. David Hilbert (1862-1943), um dos mais notáveis matemáticos deste século, observou que a importância de um trabalho científico pode ser medida pelo número de publicações anteriores tornadas supérfluas por ele, enfatizando a importância da obra de Euclides.

Figura 4: Página de rosto da tradução para o inglês dos *Elementos* de Euclides (1570)



Fonte: Eves (2011)

O trabalho de Euclides consistiu em uma compilação altamente bem-sucedida dos resultados matemáticos até então conhecidos, que foram anteriormente demonstrados por seus predecessores, em uma única obra, resultando em uma apresentação da geometria de forma organizada e dedutiva. De acordo com Gans (1973, p. 16-17), para que isso fosse possível, não há dúvidas de que Euclides precisou decidir quais propriedades das figuras geométricas serviriam como suas definições, escolher as afirmações que deveriam ser as premissas básicas e aquelas que seriam os teoremas, organizar os teoremas em ordem lógica correta, além de fornecer e aperfeiçoar muitas demonstrações. Certamente, foi um grande e árduo trabalho e, considerando a duração e a influência de *Os elementos*, eminentemente bem-sucedido.

O fato de que houve outros *Elementos* anteriores ao de Euclides não é nenhuma censura ao brilhante trabalho desenvolvido por este, pois o grande mérito de seu trabalho caracteriza-se, sobretudo, pelo seu compromisso com a formalização, tornando-se um mo-

delo de organização de conhecimento na forma axiomático-dedutivo, isso quer dizer que qualquer afirmação deve ser deduzida logicamente de outras afirmações mais simples, e assim sucessivamente.

Partindo de 23 definições, 9 noções comuns (axiomas) e 5 postulados, Euclides foi capaz de concluir 465 teoremas em forte sequência lógica, muitos deles complicados e não intuitivos, dentro do que hoje é chamado de geometria euclidiana plana. Na matemática moderna, a distinção entre axioma e postulado deixou de ser feita, no entanto, a maioria dos matemáticos gregos antigos fazia essa distinção com base na seguinte definição: “Um axioma é uma suposição comum a todas as ciências ao passo que um postulado é uma suposição peculiar a uma ciência particular em estudo.” (EVES, 2011, p. 179).

Em 2009 foi publicada a primeira tradução completa de *Os elementos* para o português a partir do texto grego, sendo tal feito devido ao professor de matemática e pesquisador Irineu Bicudo. Nesta obra, são apresentados as proposições primitivas aceitas sem demonstração que foram utilizadas como base para a demonstração dos teoremas e, de acordo com a tradução de Bicudo, são anunciadas por Euclides (2009, p. 98-9) da seguinte forma:

Noções comuns

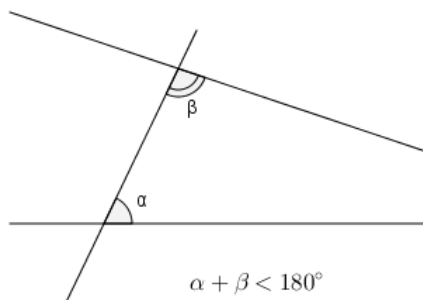
1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
8. E o todo [é] maior do que a parte.
9. E duas retas não contêm uma área.

Postulados

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todo os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Estabelecendo os termos primitivos, os postulados e os teoremas com caráter lógico e formal, Euclides organizou e sistematizou a geometria estudada hoje, tanto na educação básica quanto no ensino superior. Os dois primeiros postulados estabelecem a existência

Figura 5: Representação geométrica do quinto postulado de Euclides



Fonte: Autores

de uma reta determinada por dois pontos. O terceiro postulado estabelece a existência de uma circunferência, dados centro e raio. O quarto postulado estabelece uma relação de congruência entre ângulos retos. Contudo, por apresentar um enunciado claramente diferente e bem mais complicado que os demais, o quinto postulado foi alvo de muitas críticas, pois, para muitos matemáticos, a falta de simplicidade e clareza do enunciado acabou por descaracterizá-lo como postulado.

2.2 Tentativas de demonstrar o quinto postulado de Euclides

A maneira como Euclides anuncia os quatro primeiros postulados foram facilmente aceitos pela comunidade matemática, no entanto, a complexidade no enunciado do quinto postulado deixou muitos matemáticos intrigados ao longo de vários séculos, fazendo com que levantassem a ideia de que o mesmo pudesse ser demonstrado a partir dos quatro primeiros postulados, sendo, portanto, um teorema.

Isso fez com que, por quase dois milênios, diversas tentativas fossem feitas na busca da demonstração do quinto postulado. No entanto, as numerosas e variadas tentativas terminaram sem sucesso e a maior parte das tentativas acabaram admitindo fatos análogos ao quinto postulado e, dessa forma, apenas apresentaram um novo enunciado para o mesmo.

De acordo com Wolfe (1945), dentre os matemáticos que se dedicaram a fazer tentativas para demonstrar o quinto postulado, podemos destacar: Cláudio Ptolomeu (100?-168? d.C.), Proclo (410-485 d.C.), Nasir Eddin All Tusin (1201-1274), John Wallis (1616-1703), Girolamo Saccheri (1667-1733), Johann Heinrich Lambert (1728-1777) e Adrien Marie Legendre (1752-1833).

Barbosa (2007) destaca que uma das consequências dessas tentativas foi a produção de um grande número de afirmações equivalentes ao quinto postulado, chamados de postulados substitutos. Para o mesmo autor:

É importante que entendamos o que significa afirmar que uma determinada proposição P é um substituto do quinto postulado: quer dizer que a teoria desenvolvida usando os quatro primeiros postulados e mais a proposição P coincide com a Geometria de Euclides. (BARBOSA, 2007, p. 13).

O postulado substituto mais conhecido foi apresentado pelo matemático e físico escocês John Playfair (1748 – 1819) na obra *Elementos de Geometria*, publicado em 1795. O postulado de Playfair, em linguagem moderna, é apresentado da seguinte forma: “Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada” e fez com o quinto postulado passasse a ser conhecido como Postulado das Paralelas.

A tentativa de demonstração do italiano Girolamo Saccheri (1667-1733) evidenciava-se em relação às demais por ter sido a primeira vez que alguém tentou negar o quinto postulado, substituindo-o por uma proposição contraditória. Sua ideia consistia em substituir o quinto postulado por uma hipótese contrária e, se o desenvolvimento desta hipótese resultasse em um absurdo, significaria que o quinto postulado é verdadeiro.

Em 1889, foi descoberto um pequeno livro que havia sido publicado em Milão em 1733 e há muito esquecido. O título do livro era *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides livre de qualquer falha), e o autor era Girolamo Saccheri, professor de matemática na Universidade de Pavia. Foi nessa obra que Saccheri apresentou sua tentativa de demonstração do quinto postulado de Euclides.

Ao ensinar gramática e estudar filosofia em Milão, Saccheri teve contato com os Elementos de Euclides e ficou particularmente impressionado com o uso do método de prova pela redução ao absurdo. Este método consiste em assumir, hipoteticamente, que uma proposição a ser demonstrada é falsa; se o resultado for uma contradição, conclui-se que a proposição original é verdadeira. Mais tarde, antes de ir para Pavia, Saccheri lecionou filosofia em Turim por três anos, adquirindo bastante intimidade com a lógica.

Em sua tentativa, Saccheri utilizou o método de redução ao absurdo. Ele considerou uma figura (conhecida atualmente como quadrilátero de Saccheri), que consiste em um quadrilátero $ABCD$ em que os ângulos da base (ângulos \hat{A} e \hat{B}) são retos e o lado AD é congruente ao lado BC , ambos perpendiculares a base inferior AB .

Figura 6: Ilustração do quadrilátero de Saccheri



Fonte: Autores

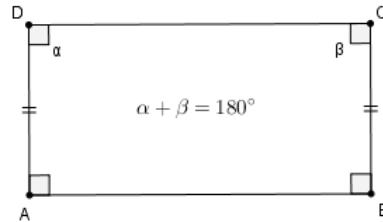
Saccheri buscou saber, com base nos quatro primeiros postulados, se os outros dois ângulos (ângulos \hat{C} e \hat{D}) eram retos, agudos ou obtusos. Esses casos ficaram conhecidos

como hipótese do ângulo reto, hipótese do ângulo agudo e hipótese do ângulo obtuso.

Primeiramente, com base nos quatro primeiros postulados, Saccheri provou facilmente que os ângulos \hat{C} e \hat{D} eram congruentes. Ele também provou que a hipótese do ângulo reto era equivalente a provar o quinto postulado. Saccheri considerou as seguintes hipóteses para estes ângulos:

- Hipótese do ângulo reto (soma dos ângulos \hat{C} e \hat{D} igual a 180°)

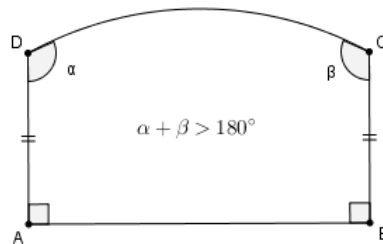
Figura 7: Ilustração da hipótese do ângulo reto



Fonte: Autores

- Hipótese do ângulo obtuso (soma dos ângulos \hat{C} e \hat{D} superior a 180°)

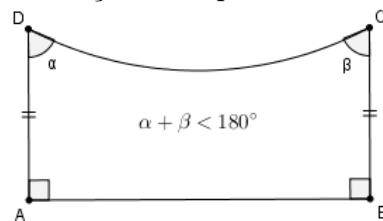
Figura 8: Ilustração da hipótese do ângulo obtuso



Fonte: Autores

- Hipótese do ângulo agudo (soma dos ângulos \hat{C} e \hat{D} inferior a 180°)

Figura 9: Ilustração da hipótese do ângulo agudo



Fonte: Autores

Logo após, descartou a hipótese do ângulo obtuso, pois chegou ao resultado de que a reta seria limitada, o que contradiz o segundo postulado e, assim como Euclides, Saccheri assumiu que a reta é infinita.

Contudo, enquanto procurava por uma contradição para a hipótese do ângulo agudo, conseguiu provar uma série de resultados coerentes aos quatro primeiros postulados da geometria euclidiana, com exceção do quinto, e, como Saccheri assumia essas

consequências do ponto de vista euclidiano, elas pareciam absurdas. Ainda assim, em sua busca, ele obteve vários resultados interessantes que viriam a se tratar de teoremas clássicos da geometria não euclidiana, porém, desconsiderou esses resultados por desacreditar na existência de uma nova geometria.

Destes resultados, Wolfe (1945, p. 33) destaca que, se Saccheri suspeitasse que não havia chegado a uma contradição porque não havia nenhuma, a descoberta das geometrias não euclidianas teria ocorrido quase um século antes.

Apesar disso, o trabalho de Saccheri é realmente notável e o marca como um homem de habilidade geométrica e penetração lógica de alta ordem e, embora não soubesse, foi ele quem primeiro teve um vislumbre das três geometrias, contribuindo imensamente para o desenvolvimento das geometrias não euclidianas. Ainda, Wolfe (1945, p. 33) conta que Saccheri foi comparado com seu compatriota, Cristóvão Colombo, que saiu para descobrir uma nova rota para uma terra conhecida, mas acabou descobrindo um novo mundo.

3 DESCOBERTA DAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Sabemos, da geometria euclidiana, que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , mas e para calcular grandes distâncias sobre a superfície da Terra? E se esse triângulo for desenhado sobre uma superfície curva? Esse questionamento vai ao encontro da ideia de Carvalho (2014, p. 28-9) quando este propõe que se desenhe um quadrado ou um triângulo numa folha de papel e, em seguida, que se recorte essa figura e tente colocá-la cobrindo um objeto esférico (uma esfera de isopor, por exemplo). O mesmo autor aponta que não será possível apoiar toda a área do recorte feito, pois as propriedades das superfícies planas são diferentes das propriedades da geometria esférica. Sendo assim, fez-se necessário a construção de uma nova geometria que fosse capaz de resolver questões como essas.

No início do século XIX, após cerca de dois milênios e inúmeras tentativas, o enigma do quinto postulado ainda não havia sido resolvido. Apesar das tentativas falhas, não se deve ter a impressão de que os esforços para provar o quinto postulado foram totalmente infrutíferos e é fundamental ressaltar a importância dos trabalhos de todos aqueles que se dedicaram na tentativa de encontrar uma prova para demonstrar o quinto postulado. Pois, foram seus esforços que eventualmente levaram à descoberta das geometrias não euclidianas e, dessa forma, foram eles que, lentamente, mas certamente, abriram o caminho para que fosse possível a construção de outras geometrias.

Além disso, de acordo com Eves (2011, p. 541), não é de surpreender que não tenham encontrado nenhuma contradição para a hipótese do ângulo agudo, pois, atualmente, sabe-se que a geometria desenvolvida a partir de um conjunto de axiomas que incluem um conjunto básico juntamente com a hipótese do ângulo agudo é tão consistente quanto a geometria euclidiana, que é desenvolvida com base no mesmo conjunto básico acrescido da hipótese do ângulo reto, ou seja, o quinto postulado de Euclides (postulado das paralelas) é independente dos demais postulados e, por isso, não pode ser deduzido dos mesmos. Ainda, sendo considerados alguns ajustes, o mesmo é válido para o desenvolvimento de uma outra geometria não euclidiana, consistente a partir da hipótese do ângulo obtuso.

Diante destes fatos, percebeu-se que as leis da Geometria Euclidiana aplicam-se somente quando superfícies planas são analisadas e, por conseguinte, deveria existir uma nova geometria quando superfícies curvas fossem envolvidas. Sumariamente, das tentativas frustradas de provar que o quinto postulado de Euclides era um teorema, surgiram as Geometrias não Euclidianas.

3.1 Fundadores das geometrias não euclidianas

Historicamente, de acordo com Greemberg (1994, p. 177), quando chega a hora de uma nova ideia surgir, a ideia ocorre para várias pessoas, mais ou menos simultaneamente.

Foi o que aconteceu, por exemplo, no século XVIII com a descoberta do Cálculo por Gottfried Leibniz (1646-1716) na Alemanha e por Isaac Newton (1643-1727) na Inglaterra. Da mesma forma, o descobrimento das geometrias não euclidianas não foi feito por um único homem, mas independentemente por vários matemáticos em diferentes partes do mundo. Wolfgang Bolyai, pai de Janos Bolyai, um dos fundadores das geometrias não euclidianas, previu isso quando escreveu uma carta a seu filho, pedindo que o mesmo não demorasse em publicar suas descobertas. Como refere o supracitado autor, Wolfgang escreveu:

Parece-me aconselhável, se você realmente conseguiu obter uma solução para o problema, que, por uma razão dupla, sua publicação seja acelerada: primeiro, porque as ideias passam facilmente de um homem para outro e, nesse caso, pode publicá-las; em segundo lugar, porque parece ser verdade que muitas coisas têm, por assim dizer, uma época em que são descobertas em vários lugares simultaneamente, assim como as violetas aparecem em todos os lados na primavera. (GREEMBERG, 1994, p. 177, tradução nossa).

Dentre os matemáticos que se dedicaram a tal fim, podemos destacar o alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o húngaro Janos Bolyai (1802- 1860), o russo Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856) e o também alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

Eves (2011, p. 541-2) aponta que Gauss, Bolyai e Lobachevsky abordaram esse tema através do postulado substituto de Playfair considerando três possibilidades:

- Por um ponto dado, é possível traçar mais de uma reta paralela a uma reta dada;
- Por um ponto dado, é possível traçar exatamente uma reta paralela a uma reta dada;
- Por um ponto dado, não é possível traçar nenhuma reta paralela a uma reta dada.

Essas situações são equivalentes às hipóteses do ângulo agudo, reto e obtuso, respectivamente. Mais uma vez, considerando a infinidade da reta, a terceira hipótese foi facilmente eliminada. Cada um deles, de forma independente, desenvolveu uma nova geometria logicamente consistente a partir da hipótese do ângulo agudo.

3.1.1 Gauss

Eves (2011, p. 519) destaca que Gauss, apelidado de “Príncipe da Matemática” ou “O príncipe dos matemáticos”, foi um homem de talento matemático impressionante. Ele é universalmente considerado como o maior matemático do século XIX e, ao lado de Arquimedes e Isaac Newton, como um dos maiores de todos os tempos.

Figura 10: Johann Carl Friedrich Gauss



Fonte: Eves (2011)

Gauss nasceu em Brunswick, na Alemanha, em 30 de abril de 1777. Seu pai era um trabalhador braçal pouco favorável à educação. Sua mãe, porém, mesmo com pouca instrução, encorajava-o nos estudos e manteve por toda a vida grande orgulho pelas realizações do filho.

Para Eves (2011, p. 542), é provável que Gauss tenha sido o primeiro a alcançar resultados significativos sobre a hipótese do ângulo agudo. Ainda sobre esse aspecto, Mlodinow (2010, p. 122) argumenta que, por volta de 1824, Gauss havia elaborado uma teoria completa sobre o que hoje denominamos geometria hiperbólica, as quais ele confirma por meio de uma carta enviada para Franz A. Taurinus (1794-1874), um advogado que se interessava por matemática:

A suposição de que a soma dos três ângulos [de um triângulo] é menor do que 180° leva a uma geometria especial, bem diferente da nossa [isto é, a euclidiana], que é absolutamente consistente, e que eu desenvolvi de modo bem satisfatório para mim mesmo. (MLODINOW, 2010, p. 122).

Apesar disso, Gauss nunca publicou sobre esse assunto, tendo apenas registrado suas ideias em um diário científico que só foi descoberto 43 anos após sua morte. A não publicação de Gauss é compreensível, pois, na época, a filosofia de Immanuel Kant (1714-1804) era tida como verdade absoluta e essa filosofia tratava o espaço não como empírico, mas como especulativo, inerente ao espírito humano. Desta reflexão, o espaço era considerado como algo já existente e não como um conceito resultante de experimentação externa. Gans (1973, p. 193) conta que Kant chegou a afirmar que os seres humanos eram incapazes de pensar em um espaço físico de outra maneira que não fosse euclidiana. Gauss sabia que manifestações contrárias à filosofia dominante poderiam ser perigosas e, por esse motivo, insistiu com Taurinus e outros com quem trocou correspondências para que não tornassem públicas suas descobertas. Por essa razão, as honrarias da descoberta das geometrias não euclidianas são atribuídas também a Bolyai e Lobachevsky.

3.1.2 Bolyai

Janos Bolyai era um oficial húngaro do exército austríaco, filho de Wolfgang Bolyai (1775-1856), um professor de matemática que era amigo pessoal de Gauss. De acordo com Mlodinow (2010, p. 124), em novembro de 1823, Janos escreveu a seu pai que tinha “criado um mundo novo e diferente, a partir do nada”, querendo dizer com isso que havia descoberto um espaço não euclidiano.

Figura 11: Janos Bolyai



Fonte: Neto (2018)

Eves (2011, p. 542) aponta que Janos certamente recebeu estímulo de seu pai para se dedicar às tentativas de provar o postulado das paralelas, visto que, anteriormente, o mesmo havia demonstrado interesse por esse mesmo tema. No entanto, Wolfe (1945, p. 49) relata que Wolfgang, lembrando-se de seus próprios esforços mal sucedidos, recomendou que o filho deixasse de lado esse antigo problema.

Bolyai direcionou sua atenção para a possibilidade de formular uma geometria geral, uma “Ciência Absoluta do Espaço”, tendo a geometria euclidiana como um caso especial. Para Eves (2011, p. 542), Bolyai referia-se à ciência absoluta do espaço como uma coleção de proposições que independem do quinto postulado de Euclides e, dessa forma, são válidos tanto na geometria euclidiana como na nova geometria.

Bolyai partiu da hipótese de que por um ponto fora de uma reta podem ser traçadas não apenas uma, mas infinitas retas paralelas à reta dada e suas descobertas foram publicadas em 1832, em um apêndice de um dos livros de seu pai, intitulado *Tentamen*.

Wolfgang enviou uma cópia do apêndice para seu amigo Gauss, ansioso para saber o que este teria a dizer sobre as descobertas de seu filho. Em conformidade com Greemberg (1994, p. 178), a carta que Gauss enviou a Wolfgang como resposta contém as seguintes observações acerca do trabalho de Bolyai:

Se eu começar com a afirmação de que não ousou elogiar tal trabalho, você certamente ficará surpreso por um momento: mas não posso fazer o contrário; louvar seria elogiar a mim mesmo; todo o conteúdo do trabalho, o caminho que seu filho tomou, os resultados para os quais ele é conduzido, coincidem quase exatamente com minhas próprias meditações que ocuparam minha mente por trinta e cinco anos. Por causa disso, este relato me surpreende ao extremo.

Minha intenção era, em relação ao meu próprio trabalho, não permitir que ele se tornasse conhecido durante a minha vida. [...] Por outro lado, era meu plano colocar tudo no papel, eventualmente, para que pelo menos não morresse comigo.

Por isso, estou muito surpreso por ter sido poupado desse esforço e estou muito feliz por ser o filho do meu grande amigo que me ultrapassa de maneira tão notável. (GREEMBERG, 1994, p. 178-179, tradução nossa).

O mesmo autor ainda aponta que, apesar de ser elogiado por Gauss na última frase, Janos Bolyai ficou profundamente desapontado com a resposta do mesmo e não tornou a publicar nenhum outro trabalho sobre o assunto, no entanto, deixou alguns manuscritos sobre trabalhos matemáticos. Além disso, Mlodinow (2010, p. 274) aponta que alguns escritos, encontrados depois da morte de Bolyai, revelam que mesmo após a sua descoberta do espaço não euclidiano, o mesmo continuou se dedicando a demonstrar a forma euclidiana do postulado das paralelas, o que, em consequência, teria desacreditado sua própria obra.

3.1.3 Lobachevsky

Nikolai Ivanovich Lobachevsky passou a maior parte de sua vida na Universidade de Kazan, primeiramente como aluno, obtendo seu diploma em 1813, em seguida foi mantido como instrutor e, aos 21 anos de idade, tornou-se professor de matemática e finalmente, foi nomeado reitor, ocupando este cargo até o fim de sua vida.

Figura 12: Nikolai Ivanovich Lobachevsky



Fonte: Eves (2011)

Wolfe (1945, p. 54) aponta que em 1823, Lobachevsky completou o manuscrito de um livro texto sobre geometria elementar, que não veio a ser publicado. Nessa obra, ele

declarou que nenhuma prova rigorosa do postulado das paralelas havia sido descoberta e que as provas até então sugeridas eram apenas explicações e não verdadeiramente provas matemáticas. Ainda de acordo com o mesmo autor, sabe-se que em 1826 ele apresentou um artigo na seção de Física e Matemática na Universidade de Kazan, onde sugeriu uma nova geometria em que mais de uma reta paralela a uma reta dada podiam ser traçadas através de um ponto e a soma dos ângulos de um triângulo seria inferior a dois ângulos retos. Infelizmente, esse artigo não foi encontrado.

Eves (2011, p. 542) e Wolfe (1945, p. 54-5) destacam que entre 1829 e 1830, Lobachevsky publicou seu trabalho sobre os princípios da geometria no *Kazan Bulletin*, referindo-se ao artigo acima mencionado e explicando na íntegra a sua teoria das paralelas. Esse foi o primeiro relato publicado sobre geometrias não euclidianas que se tem registro, porém, recebeu pouca atenção da comunidade científica em seu próprio país e, por ter sido escrito em russo, praticamente nenhuma em outros lugares.

Lobachevsky, diferentemente de Bolyai, confiante do mérito de suas descobertas, publicou vários outros trabalhos sobre o tema, esperando assim chamar a atenção de um grupo mais amplo de leitores para a sua obra. De fato, como comenta Wolfe (1945, p. 55), possivelmente, uma das publicações posteriores mais importantes tenha sido um pequeno livro publicado em 1840, intitulado *Geometrische Untersuchungen Zur Theorie der Parallellinien* (Investigações Geométricas Sobre a Teoria das Linhas Paralelas), escrito em alemão com o intuito de que, por esse motivo, atingiria um maior número de leitores. Mais tarde, em 1855, embora estivesse cego, ele publicou, em francês, um relato completo dos resultados de suas pesquisas cujo título era *Pangéométrie* (Pangeometria) ou *Précis de Géométrie Fondée sur une Theorie Générale et Rigoureuse des Parallèles* (Geometria Precisa Baseada em uma Teoria Geral e Rigorosa de Paralelos). Lobachevsky morreu em 1856, um ano após sua última publicação e, infelizmente, não em tempo de ver seu trabalho ser reconhecido.

Barbosa (2009, p. 46) destaca que nem Bolyai nem Lobachevsky receberam, na época, o reconhecimento esperado por seus trabalhos publicados, no entanto, não devemos nos surpreender, pois:

A história das descobertas científicas nos ensina que, toda mudança radical em um dos compartimentos da ciência, não produz, de imediato, alterações nas convicções e nas pressuposições nas quais os cientistas baseiam suas visões particulares da parte da ciência a que se dedicam. (BARBOSA, 2009, p. 46).

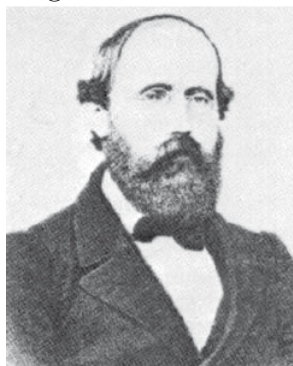
Para Wolfe (1945, p. 60) esse atraso pode ser atribuído a diversos fatores: a passagem lenta de ideias de uma parte do mundo para outra, as barreiras linguísticas, a filosofia do espaço kantiano que apontava na direção oposta a essas descobertas, o domínio de quase dois milênios da geometria de Euclides e a relativa obscuridade dos descobridores da

geometria não euclidiana, visto que os dois matemáticos, Bolyai e Lobachesvky, eram membros novos na comunidade científica internacional. Conseqüentemente, a nova geometria atraiu pouca atenção por cerca de 35 anos até que, em 1867, Richard Baltzer (1818-1887), na segunda edição de seu *Elemente der Mathematik* (Elementos da Matemática), inseriu uma referência aos seus descobridores e à sua obra. Ainda sobre essa questão, Mlodinow (2010) salienta que o matemático italiano Eugênio Beltrami (1835-1900) encerrou de vez a questão de provar o postulado das paralelas: “[...] ele demonstrou que, se a geometria euclidiana forma uma estrutura matemática consistente, então o mesmo deve ocorrer com os espaços não-euclidianos recém-descobertos” (MLODINOW, 2010, p. 125).

3.1.4 Riemann

O surgimento da geometria hiperbólica trouxe à luz questionamentos sobre a possibilidade da existência de outras geometrias não euclidianas. O próximo passo no desenvolvimento dessas geometrias foi brilhantemente dado por George Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866). Em 1846, Riemann ingressou na Universidade de Göttingen, onde Gauss era professor, para estudar teologia, porém, pouco tempo depois, acabou descobrindo que a matemática era seu forte e desistiu da teologia.

Figura 13: George Friedrich Bernhard Riemann



Fonte: Eves (2011)

De acordo com Mlodinow (2010, p. 143), em 1854, para obter a posição de professor assistente na Universidade de Göttingen, Riemann deveria apresentar uma conferência que serviria como teste. Ele apresentou aos professores da Universidade três tópicos para que os mesmos escolhessem o seu tema para a conferência. O mesmo autor relata que era de praxe escolher o primeiro tópico do candidato e que, por precaução, Riemann estava bem preparado para o primeiro e segundo temas, no entanto, embora o terceiro tema fosse o menos preparado por Riemann, Gauss o escolheu.

Riemann expôs sua palestra sobre esse tópico que, posteriormente, foi publicada sob o título de *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Sobre as Hipóteses Subjacentes à Geometria), onde ele apontou a importante distinção entre “infinito” e “ilimitado”, que posteriormente tiveram um papel importante na teoria da relatividade.

dade. Por exemplo, as circunferências máximas de uma esfera são finitas (percorrendo-as sempre se volta ao ponto de partida) mas ilimitadas (pode-se percorrê-las indefinidamente). Dessa forma, descartando a infinidade da reta e admitindo que ela seja ilimitada, juntamente com alguns ajustes nos demais postulados, Riemann indiretamente sugeriu uma nova geometria não euclidiana, consistente a partir da hipótese do ângulo obtuso, chamada de Geometria Esférica (ou Elíptica), que também ficou conhecida como Geometria Riemanniana. Nessa nova geometria não existem retas paralelas e a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que dois ângulos retos. É importante lembrar que matemáticos anteriores rejeitaram a hipótese do ângulo obtuso, uma vez que a infinidade da reta havia sido assumida.

Para Mlodinow (2010, p. 143), Riemann, em sua apresentação, não mencionou em momento algum o termo geometria não euclidiana, ainda:

Riemann expôs sua palestra no contexto da geometria diferencial, focalizando-se sobre as propriedades das regiões infinitamente pequenas de uma superfície, em vez de suas características geométricas em grande escala. [...] Mas as implicações de sua obra eram claras: Riemann explicou como a esfera podia ser interpretada como um espaço elíptico bidimensional. (MLODINOW, 2010, p. 143).

Riemann, desse modo, enfatizou a importância do estudo das propriedades das coisas do ponto de vista infinitesimal. Ademais, nas palavras de Wolfe (1945), “[...] em sua memorável dissertação, Riemann chamou a atenção para a verdadeira natureza e significado da geometria e fez muito para libertar a matemática das desvantagens da tradição.” (WOLFE, 1945, p. 61, tradução nossa).

Em consonância com Silva (2017), Gauss ficou impressionado com o trabalho apresentado por Riemann sobre geometria não euclidiana devido ao fato de que esse era bem diferente das abordagens feitas por seus antecessores. Ao que tudo indica, Riemann desconhecia os trabalhos de Lobachevsky e Bolyai, no entanto, sabia do interesse de Gauss pelo assunto.

Em 1857, dois anos após a morte de Gauss, Riemann finalmente obteve o cargo de professor assistente. Em 1859, o sucessor de Gauss, Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) morreu e Riemann foi promovido ao cargo que era de Gauss na mesma universidade. Em 1862, pouco depois de seu casamento, adoece gravemente e passa os quatro anos seguintes em tratamentos. Morreu na Itália, em 1866, ainda sem completar 40 anos, onde procurava um clima melhor para inutilmente combater sua tuberculose.

De acordo com Mlodinow (2010, p. 146) ”A obra de Riemann sobre geometria diferencial tornou-se a pedra angular da teoria geral da relatividade de Einstein.” O autor ainda destaca que se Riemann não tivesse sido tão imprudente ao incluir este tópico sobre geometria, ou se Gauss não tivesse a ousadia de escolhê-lo, o instrumento matemático que Einstein precisou para sua revolução na física não teria existido. Ademais, a obra

de Riemann sobre os espaços elípticos também teve um impacto de igual proporção no mundo da matemática, conforme as palavras do mesmo autor:

A necessidade de alterar postulados além do postulado das paralelas foi igual ao desgaste dos fios numa corda. Logo, a corda se partiu. Foi somente então que os matemáticos perceberam que pendurada na corda não estava somente a geometria, mas toda a matemática. (MLODINOW, 2010, p. 146).

A palestra de Riemann de 1854, no entanto, só foi publicada em 1868, dois anos após a sua morte e um ano depois do lançamento do livro de Baltzer, que popularizou o trabalho de Lobachevsky e Bolyai.

A descoberta e o desenvolvimento dessas geometrias pôs fim ao secular problema do quinto postulado de Euclides. A independência deste postulado em relação aos demais deriva da impossibilidade de provar o mesmo como um teorema, o que resultou no desenvolvimento de novas geometrias.

Ao negar o quinto postulado de Euclides, estabelecendo que por um ponto fora de uma reta passam pelo menos duas retas paralelas à reta dada, origina-se a geometria hiperbólica, descoberta por Gauss, Lobachevsky e Bolyai. Por outro lado, se considerarmos que por um ponto fora de uma reta não passa nenhuma reta paralela à reta dada, origina-se a geometria esférica, descoberta por Riemann, tema deste trabalho, que será mais bem explorada no próximo capítulo.

4 GEOMETRIA ESFÉRICA

A descoberta das geometrias não euclidianas foi um evento muito importante na história do pensamento, assim como na matemática. Por cerca de dois milênios, geometria significou geometria euclidiana e geometria euclidiana significou *Os elementos*.

Ao contrário da geometria euclidiana, essa geometria é definida sobre uma superfície esférica, sendo convencionalizado que esta superfície possui curvatura positiva. Para entendermos o que significa curvatura positiva, começamos com o conceito de curvatura, de acordo com as definições dadas por Dario (2014).

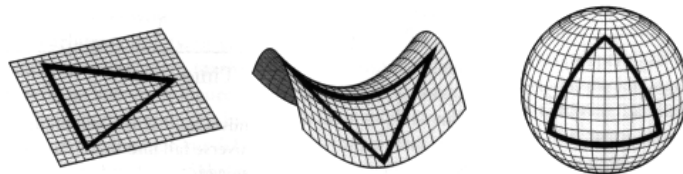
A curvatura C em um ponto P de uma curva S qualquer é inversamente proporcional ao raio R da maior circunferência que tangencia esta curva neste ponto P , ou seja, $C = \frac{1}{R}$. Assim, quanto maior o raio da circunferência tangente a esta curva S , menor será a sua curvatura. À essa circunferência é dado o nome de círculo osculante.

Para calcular a curvatura C em um ponto P de uma superfície devemos encontrar os dois círculos osculantes de maior e menor raio, respectivamente R_1 e R_2 , tangentes à esta superfície no ponto P e calcular as curvaturas C_{1P} e C_{2P} . Então a curvatura C_P será definida como o produto entre a maior e a menor curvatura no ponto P , ou seja, $C_P = C_{1P} \cdot C_{2P}$.

Além desta definição de curvatura, devemos considerar o fato de os círculos osculantes estarem do mesmo lado da superfície ou em lados opostos. Se as curvas de máxima e de mínima curvatura estiverem do mesmo lado da superfície, então a curvatura será positiva, como por exemplo uma superfície esférica e um elipsoide. Caso estejam em lados opostos, então a curvatura da superfície será negativa, como é o caso da pseudoesfera e a sela. Dizemos que o plano tem curvatura nula.

Outra definição para curvaturas positiva, negativa ou nula, dada de uma maneira mais informal, é considerar uma superfície como sendo de curvatura positiva caso a soma dos ângulos internos de um triângulo nesta superfície seja maior do que 180° (geometria esférica), curvatura negativa, caso esta soma seja menor que 180° (geometria hiperbólica), e curvatura nula, caso esta soma seja exatamente 180° (geometria plana).

Figura 14: Ilustração de superfícies de curvatura nula, negativa e positiva



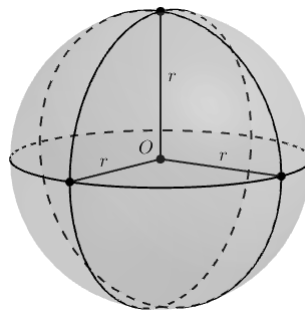
Fonte: Cuentos Cuánticos (2011)

A partir deste momento, com base em Gans (1973), Carvalho (2014), Dario (2014) e Dolce e Pompeo (2013), vamos expor algumas noções matemáticas básicas da Geometria Esférica.

4.1 Elementos e propriedades

Seja O um ponto do espaço e r um número real positivo. A *superfície esférica* é o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja distância a O é igual a r , onde O é chamado de centro da esfera e r de raio da esfera. Podemos dizer ainda que os pontos do espaço que se encontram a uma distância menor do que r do ponto O são interiores à superfície esférica, e os pontos que estão a uma distância maior do que r do ponto O são exteriores a esta superfície. Sendo assim, a região composta pela união da superfície esférica e pelos pontos interiores é chamada de *esfera*.

Figura 15: Superfície esférica de centro O e raio r

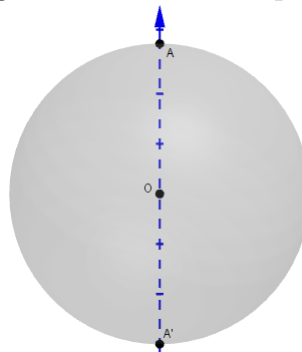


Fonte: Autores

Também podemos definir *superfície esférica* como a superfície de revolução gerada pela rotação de uma semicircunferência com extremidades no eixo e a *esfera* como sendo o sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo com diâmetro fixado ao eixo de rotação.

Pontos antípodas: são pontos obtidos pela intersecção de um eixo com uma superfície esférica, passando pelo centro desta. São pontos diametralmente opostos, ou seja, dado um ponto A , seu antípoda A' é o único ponto da superfície esférica tal que $\overline{AA'}$ é um diâmetro da superfície esférica.

Figura 16: Pontos antípodas



Fonte: Autores

Para fins de comparação, podemos considerar esférico o planeta Terra (embora,

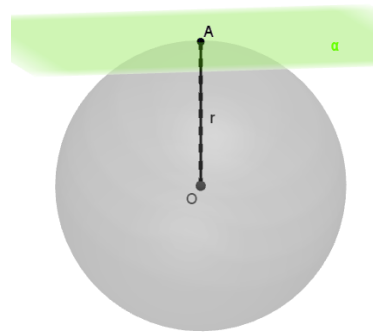
devido ao achatamento nos polos, seja aproximadamente um elipsoide de revolução) e pensar nos polos Norte e Sul sendo ligados por um eixo.

Interseção entre um plano e uma superfície esférica

Em conformidade com Alves (2009, p. 10-4) a relação entre superfícies esféricas e planos no espaço é similar com a relação entre circunferências e retas no plano.

Um plano α é **tangente** a uma superfície esférica S se $\alpha \cap S$ contém exatamente um ponto. Esse ponto é chamado ponto de tangência e dizemos que o plano e a superfície esférica se tangenciam nesse ponto.

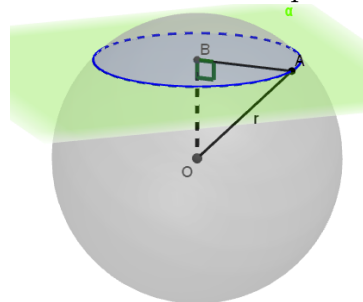
Figura 17: Plano tangente à superfície esférica



Fonte: Autores

Se $\alpha \cap S$ contém mais do que um ponto, então o plano é **secante** à superfície esférica e determina nesta uma circunferência, como mostra a figura abaixo.

Figura 18: Plano secante à superfície esférica

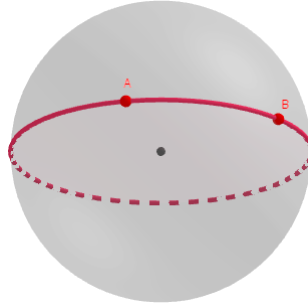


Fonte: Autores

Vamos agora analisar as figuras obtidas quando um plano secante corta uma superfície esférica.

Reta ou circunferência máxima: uma reta é uma circunferência máxima da superfície esférica. É obtida através da interseção da superfície esférica com um plano passando pelo seu centro. Observe que a circunferência máxima possui o mesmo centro e o mesmo raio da superfície esférica e, dessa forma, as circunferências máximas são as circunferências de maior raio contidas na superfície esférica.

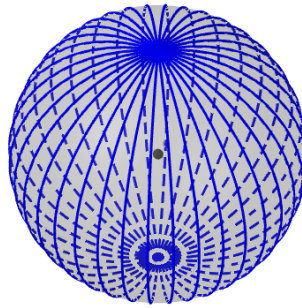
Figura 19: Circunferência máxima



Fonte: Autores

Nesta geometria, apesar de ter comprimento finito, a reta é ilimitada, uma vez que, ao percorrer uma circunferência máxima voltamos ao ponto de partida, porém, podemos percorrê-la indefinidamente. Ademais, dois pontos antípodas sobre a superfície esférica determinam infinitas retas que passam por estes pontos.

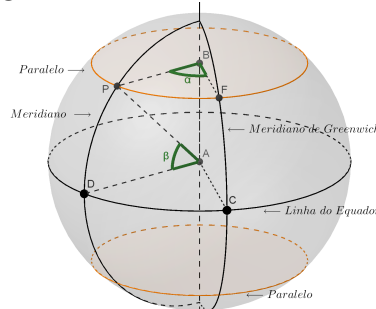
Figura 20: Retas determinadas por pontos antípodas



Fonte: Autores

No globo terrestre, por exemplo, entre as circunferências máximas estão os meridianos, cada um passando pelos polos Norte e Sul. Em especial, temos o meridiano de Greenwich (que, por convenção, divide o globo terrestre em ocidente e oriente, permitindo medir a longitude). Com exceção do Equador (que divide o globo terrestre em Hemisfério Norte e Hemisfério Sul), os paralelos não são circunferências máximas, visto que são menores que o Equador, tornando-se muito pequenos perto dos Polos Norte e Sul.

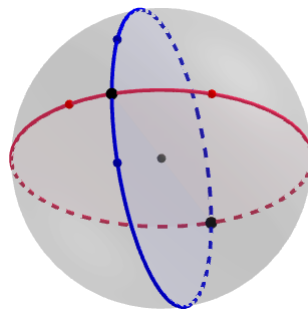
Figura 21: Paralelos e Meridianos



Fonte: Autores

Na Geometria Esférica não existem retas paralelas, pois quaisquer duas circunferências máximas da esfera sempre se intersectam em dois pontos antípodas. Esta propriedade interessante das circunferências máximas pode ser explicada de maneira simplificada considerando o fato de que estas circunferências são geradas pela intersecção da superfície esférica com um plano que passa pelo seu centro. Deste modo, como os planos têm um ponto em comum (centro da superfície esférica), então terão uma reta em comum, que é a reta que contém o diâmetro da superfície esférica. Como os pontos extremos do diâmetro são os pontos antípodas pertencentes às duas circunferências máximas, é fácil perceber que estes dois pontos são a intersecção das mesmas.

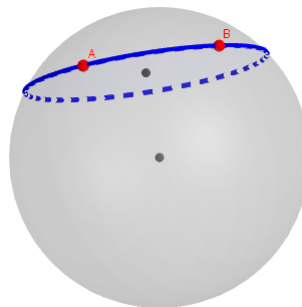
Figura 22: Circunferências máximas



Fonte: Autores

Circunferência esférica: são as circunferências resultantes da intersecção da superfície esférica com planos que contém um ponto do seu interior (exceto o centro). O centro dessa circunferência é o pé da perpendicular ao plano traçada a partir do centro da superfície esférica.

Figura 23: Circunferência esférica



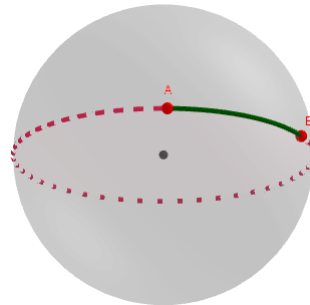
Fonte: Autores

Tomando, novamente, o globo terrestre como exemplo, algumas circunferências esféricas são chamadas de paralelos, e, em especial, temos o Trópico de Câncer, Trópico de Capricórnio, Círculo Polar Ártico e Círculo Polar Antártico. Chamar estas circunferências esféricas especiais de paralelos é bem apropriado pois, são circunferências geradas pela intersecção de planos paralelos ao plano que determina a Linha do Equador.

Cabe observar que, com muita frequência, os livros de geografia utilizam a palavra “círculo” para designar a circunferência. Particularmente, descrevem o Equador como um círculo máximo. Tal questão consiste num abuso de linguagem consagrado pelo uso sistemático ao longo do tempo. Além disso, a nomenclatura utilizada por profissionais não matemáticos, no caso os geógrafos, não precisa necessariamente coincidir com a utilizada pelos matemáticos.

Segmento de reta ou arco de circunferência máxima: dados dois pontos, A e B, sobre a superfície de uma esfera, define-se a distância entre eles como o comprimento do menor arco da circunferência máxima que contém esses pontos. Dessa forma, na geometria esférica, um arco de circunferência máxima é o caminho mais curto entre dois pontos.

Figura 24: Arco de circunferência máxima

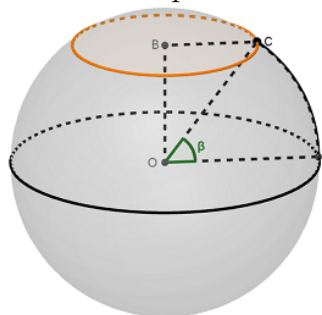


Fonte: Autores

Para um melhor entendimento dos cálculos de distâncias sobre a superfície terrestre vamos definir, baseado no conceito dado por Alves (2009), as coordenadas geográficas latitude e longitude.

Dado um ponto C sobre a superfície terrestre dizemos que a **latitude** deste ponto é a medida do arco de meridiano que contém C e está situado entre o paralelo que passa por C e a Linha do Equador. A latitude é medida em graus (e seus submúltiplos, minuto e segundo) e varia de 0° a 90° N (Norte) ou de 0° a 90° S (Sul).

Figura 25: Latitude de um ponto da superfície esférica

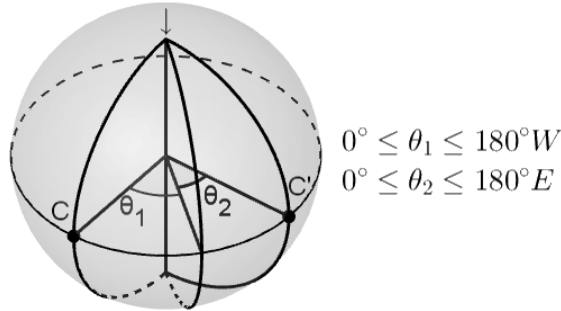


Fonte: Autores

Já a **longitude** deste ponto C é a medida do arco de paralelo que passa por C e

está situado entre o meridiano que o contém e o meridiano de Greenwich (que passa sobre a cidade de mesmo nome, na Inglaterra). A longitude, também medida em graus, varia de 0° a 180° E (Leste) ou de 0° a 180° W (Oeste).

Figura 26: Longitude na superfície esférica
Greenwich



Fonte: Autores

Para calcular o raio de uma circunferência esférica basta conhecer o valor do raio da superfície esférica e a distância do plano gerador da circunferência esférica ao plano do Equador. Em outras palavras, basta saber o valor do raio da esfera e a distância entre o centro da circunferência e o centro da esfera.

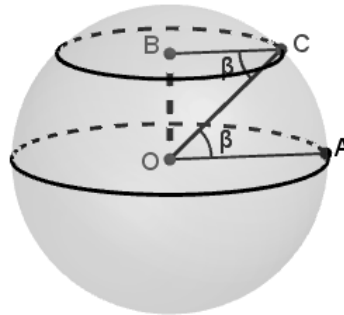


Figura 27: Raio e comprimento da circunferência esférica

Fonte: Autores

Considerando a figura acima e aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle OBC$, reto em B , com $\overline{OC} = R$ o raio da esfera, $\overline{BC} = r$ o raio da circunferência esférica e $\overline{OB} = d$ a distância do centro da esfera ao centro da circunferência, temos:

$$\begin{aligned}\overline{OC}^2 &= \overline{OB}^2 + \overline{BC}^2 \\ R^2 &= d^2 + r^2 \\ r &= \sqrt{R^2 - d^2}\end{aligned}$$

De posse desta informação, o valor do comprimento da circunferência esférica é facilmente encontrado através da conhecida fórmula da geometria plana $C = 2\pi r = 2\pi\sqrt{R^2 - d^2}$.

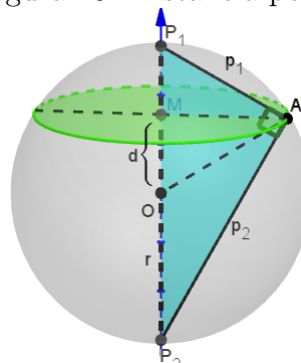
Ainda, quando é conhecida a latitude do ponto C pertencente a um paralelo, o uso de relações trigonométricas facilita os cálculos já que $\cos \beta = \frac{BC}{OC} = \frac{r}{R}$, logo $r = R \cos \beta$ e $C = 2\pi r = 2\pi R \cos \beta$.

A fim de medir trajetórias sobre a superfície de uma esfera, utiliza-se unidades de medidas chamadas de Milha Marítima ou Milha Náutica. Apesar de não fazer parte do Sistema Internacional de Unidades, estas unidades são utilizadas pela Marinha e Aeronáutica, além de profissionais que utilizam meios de transportes marítimos e aéreos. A Milha Marítima ou Milha Náutica, corresponde ao arco de meridiano de um minuto. Assim, quando um navio ou uma aeronave percorre ao longo da circunferência máxima uma distância de 1° , cobre um percurso de 60 milhas marítimas. Como a Terra não é uma esfera perfeita, as circunferências máximas se aproximam de elipses, pois quando próximas dos polos são menos curvas do que quando medidas nas proximidades do Equador. Para se evitar estas diferenças, estabeleceu-se a Milha Marítima Internacional de 1 852 m, que é a média das milhas medidas no Equador e nos polos.

Basicamente, tomando uma circunferência completa como tendo 360° , podemos dizer que 1° equivale a fração de $1/360$ de uma volta na circunferência. Tomando uma circunferência máxima da Terra como aproximadamente 40 000 km, tem-se que 1° de inclinação no raio da Terra, nos fornece um arco de circunferência de aproximadamente 111 km. Como cada grau pode ser fracionado em 60 minutos ($1^\circ = 60'$), então ao dividirmos 111 km por 60, obtemos o resultado de aproximadamente 1852 m, que é o valor da Milha Marítima que conhecemos atualmente e corresponde a $1'$ de inclinação no raio da Terra.

Distância polar: é a distância de um ponto qualquer de um paralelo ao polo.

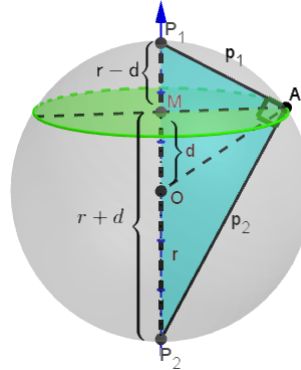
Figura 28: Distância polar



Fonte: Autores

Um ponto A da superfície de uma esfera tem duas distâncias polares: P_1A e P_2A . Seja r o raio da esfera, d a distância do plano de uma seção ao centro e p_1 e p_2 as distâncias polares de um ponto A .

Figura 29: Distância polar



Fonte: Autores

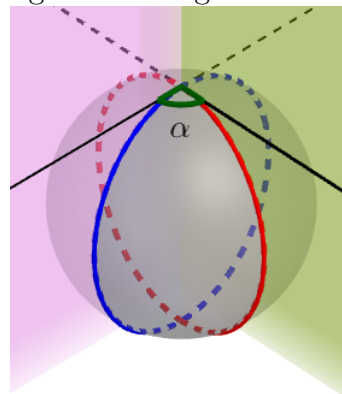
Usando relações métricas no $\triangle P_1AP_2$, temos:

$$(AP_1)^2 = (P_1P_2) \cdot (P_1M) \Rightarrow p_1^2 = 2r(r - d)$$

$$(AP_2)^2 = (P_1P_2) \cdot (P_2M) \Rightarrow p_2^2 = 2r(r + d)$$

Ângulo esférico: é o ângulo gerado pela intersecção de duas circunferências máximas e possui a mesma medida do ângulo formado pelas retas tangentes às circunferências máximas em seu ponto de intersecção. Como as circunferências máximas são geradas pela intersecção de planos com a superfície esférica, podemos definir que a medida do ângulo esférico é a medida do ângulo diedro formado por dois planos que geram as circunferências máximas.

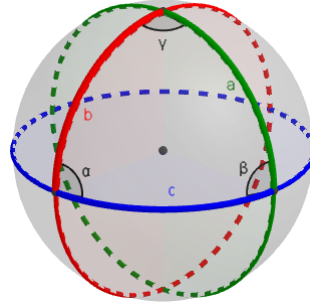
Figura 30: Ângulo esférico



Fonte: Autores

Triângulo esférico: é a figura formada por três arcos de circunferências máximas e, nessa geometria, temos que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é sempre maior que 180° . Além disso, pela possibilidade de decomposição de quadriláteros em dois triângulos, temos que a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero esférico sempre excede 360° .

Figura 31: Triângulo esférico



Fonte: Autores

Na geometria esférica, assim como na geometria euclidiana, os triângulos podem ser classificados de acordo com as medidas de seus lados e ângulos. Quanto à medida de seus lados, os triângulos esféricos podem ser classificados como birretilátero, quando possuem dois lados com o mesmo comprimento ou trirretilátero, quando possuem três lados com o mesmo comprimento. Quanto à medida de seus ângulos internos, são classificados como retângulo, birretângulo ou trirretângulo quando possuem um, dois ou três ângulos retos, respectivamente.

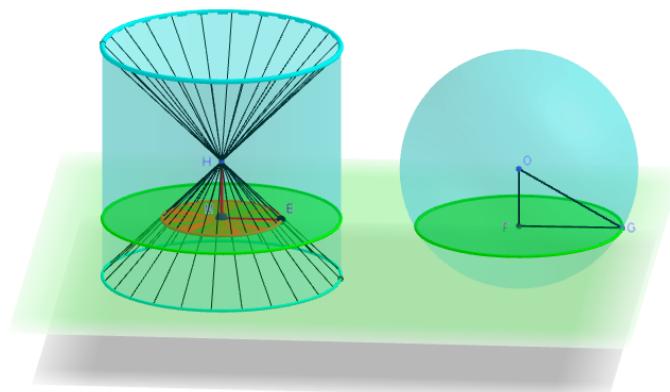
4.2 Volume da esfera

Baseado em Dolce e Pompeo (2013), será apresentada uma dedução para a fórmula do volume de uma esfera.

Consideremos um cilindro equilátero de raio da base r e altura $2r$ e seja H o ponto médio do eixo do cilindro. Tomemos dois cones tendo como bases as do cilindro e H como vértice comum (a reunião desses dois cones é um sólido chamado *clépsidra*). Ao sólido que está dentro do cilindro e fora dos dois cones, vamos chamar de sólido X (este sólido é chamado *anticlépsidra*).

Consideremos agora uma esfera de raio r e o sólido X descrito acima.

Figura 32: Volume da esfera - dedução



Fonte: Autores

Suponhamos que a esfera seja tangente a um plano α , que o cilindro (que originou o sólido X) tenha base em α e que os dois sólidos, esfera e sólido X , estejam num mesmo semi-espaco dos determinados por α .

Qualquer plano secante β , paralelo a α , distando d do centro da esfera (e do vértice do sólido X), também secciona o sólido X . Sendo s o raio do círculo da seção, temos:

$$\text{Área da secção na esfera (círculo)} = \pi s^2 = \pi(r^2 - d^2)$$

$$\text{Área da secção no sólido X (coroa circular)} = \pi r^2 - \pi d^2 = \pi(r^2 - d^2)$$

As áreas das seções na esfera e no sólido X são iguais. Logo, pelo Princípio de Cavalieri, a esfera e o sólido X têm o mesmo volume.

O volume do sólido X pode ser calculado por:

$$\begin{aligned} V_X &= V_{cilindro} - 2V_{cone} \\ V_X &= \underbrace{\pi r^2}_{A_b} \cdot \underbrace{2r}_h - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\pi r^2}_{A_b} \cdot \underbrace{r}_h \\ V_X &= 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^3}{3} \Rightarrow V_X = \frac{4\pi r^3}{3} \end{aligned}$$

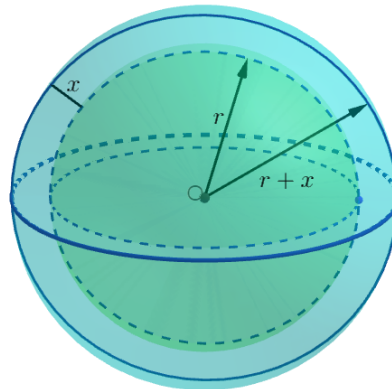
Segue, daí, que o volume da esfera de raio r também é dado por: $V_{esfera} = \frac{4\pi r^3}{3}$.

4.3 Área da esfera

Com base em Iezzi, et al. (2016), será apresentada uma justificativa para a fórmula da área de uma superfície esférica, cuja demonstração formal exige conhecimentos mais avançados e será omitida.

Considere uma esfera de centro O e raio de medida r e uma outra esfera também de centro O e raio de medida $r + x$, com $x > 0$. Observe as duas esferas concêntricas na figura abaixo.

Figura 33: Esferas concêntricas



Fonte: Autores

O sólido limitado por essas duas esferas é uma espécie de “casca” formada por segmentos de reta cujo comprimento é x .

Intuitivamente, vamos imaginar a superfície da primeira esfera como uma *placa sólida de espessura suficientemente pequena* (essa ideia pode ser estendida para qualquer superfície).

Assim, para valores de x cada vez mais próximos do zero (indica-se $x \rightarrow 0$ e lê-se “ x tende a zero”), o volume V do sólido limitado pelas duas esferas é aproximadamente igual a Ax , em que A é a área da superfície esférica cujo raio mede r .

Expressando também V como a diferença entre os volumes das duas esferas, temos:

$$\begin{aligned} Ax &= \frac{4\pi(r+x)^3}{3} - \frac{4\pi r^3}{3} \\ Ax &= \frac{4\pi}{3} \cdot (r^3 + 3r^2x + 3rx^2 + x^3 - r^3) \\ Ax &= \frac{4\pi x}{3} \cdot (3r^2 + 3rx + x^2) \\ A &= \frac{4\pi}{3} \cdot (3r^2 + 3rx + x^2) \end{aligned}$$

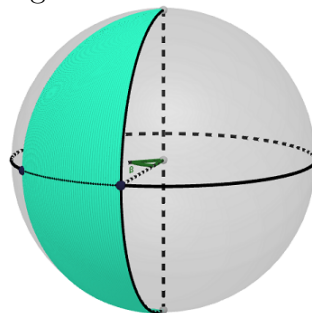
Se x tende a zero, as parcelas $3rx$ e x^2 também tendem a zero e daí:

$$A = \frac{4\pi}{3} \cdot 3r^2 \Rightarrow A = 4\pi r^2$$

Assim, a área de uma superfície esférica de raio de medida r é dada por: $A = 4\pi r^2$.

Fuso esférico ou biângulo: é a superfície gerada pela rotação de uma semicircunferência que gira α graus ($0^\circ < \alpha \leq 360^\circ$), ou radianos ($0 \text{ rad} < \alpha \leq 2\pi \text{ rad}$), em torno do eixo que contém seu diâmetro.

Figura 34: Fuso esférico



Fonte: Autores

Quando α é dobrado, a área do fuso esférico é dobrada; triplicando α , também a área do fuso esférico é triplicada; e assim sucessivamente. No caso de $\alpha = 360^\circ$, o fuso esférico transforma-se na superfície da esfera, cuja área é $A = 4\pi r^2$.

De modo geral, a área do fuso esférico é proporcional a α e, portanto, pode ser calculada por uma regra de três simples.

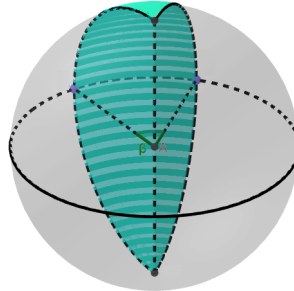
Observe como ficam as expressões da área de um fuso esférico em função da medida (α) do ângulo de giro, em graus e radianos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Para } \alpha \text{ em graus:} \\ 360^\circ \text{ — } 4\pi r^2 \\ \alpha \text{ — } A_{Fuso} \end{array} \right\} \Rightarrow A_{Fuso} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90^\circ} \qquad \left. \begin{array}{l} \text{Para } \alpha \text{ em radianos:} \\ 2\pi \text{ rad — } 4\pi r^2 \\ \alpha \text{ — } A_{Fuso} \end{array} \right\} \Rightarrow A_{Fuso} = 2r^2 \alpha$$

Essas expressões não precisam ser memorizadas, pois sempre podem ser obtidas através de uma regra de três simples.

Cunha esférica: é o sólido gerado pela rotação de um semicírculo que gira α graus ($0^\circ < \alpha \leq 360^\circ$), ou radianos ($0 \text{ rad} < \alpha \leq 2\pi \text{ rad}$), em torno de um eixo que contém seu diâmetro.

Figura 35: Cunha esférica



Fonte: Autores

Note que, se α é dobrado, o volume da cunha esférica é dobrado; se α é triplicado, o volume da cunha esférica também é triplicado; e assim sucessivamente. No caso em que $\alpha = 360^\circ$, a cunha esférica transforma-se em uma esfera, e seu volume é $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

De modo geral, o volume da cunha esférica é proporcional a α e, portanto, pode ser calculado por uma regra de três simples.

Observe as relações obtidas:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Para } \alpha \text{ em graus:} \\ 360^\circ \text{ — } \frac{4\pi r^3}{3} \\ \alpha \text{ — } V_{Cunha} \end{array} \right\} \Rightarrow V_{Cunha} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270^\circ} \qquad \left. \begin{array}{l} \text{Para } \alpha \text{ em radianos:} \\ 2\pi \text{ rad — } \frac{4\pi r^3}{3} \\ \alpha \text{ — } V_{Cunha} \end{array} \right\} \Rightarrow V_{Cunha} = \frac{2r^3 \alpha}{3}$$

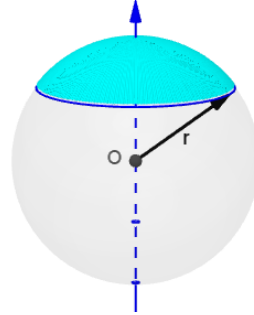
Assim como as fórmulas para o fuso esférico, as fórmulas para a cunha esférica não precisam ser memorizadas; basta estabelecer uma regra de três.

Observe que a superfície de uma cunha esférica contida em uma esfera de raio r é a reunião de um fuso esférico com dois semicírculos de raio r . Assim, a área total da cunha esférica é igual à soma da área do fuso esférico com a área de um círculo de raio r .

Calota esférica: é a superfície de revolução cuja geratriz é um arco de circunferência máxima e cujo eixo é uma reta tal que:

- passa pelo centro da circunferência máxima que contém o arco;
- passa por um extremo do arco e não o intercepta em outro ponto;
- é coplanar com o arco.

Figura 36: Calota esférica

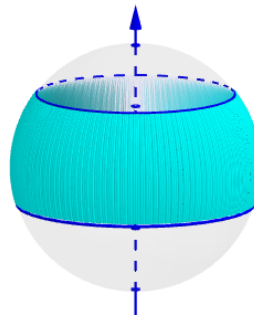


Fonte: Autores

Zona esférica: é a superfície de revolução cuja geratriz é um arco de circunferência máxima e cujo eixo é uma reta tal que:

- passa pelo centro da circunferência máxima que contém o arco;
- não passa por nenhum extremo do arco nem intercepta o arco em outro ponto;
- é coplanar com o arco.

Figura 37: Zona esférica



Fonte: Autores

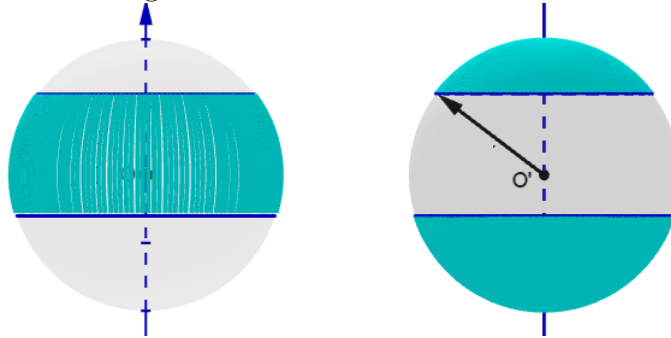
Outra definição para calota e zona esférica: ao seccionar uma superfície esférica por dois planos paralelos entre si, dividimos essa superfície em três partes; a que está entre os dois planos, reunida às duas circunferências-seção, é chamada *zona esférica*, e cada uma das outras duas, reunidas à respectiva circunferência-seção, é chamada *calota esférica*, conforme Figura 38.

A área da calota esférica e da zona esférica é dada por $A = 2\pi rh$, em que r é o raio da circunferência que contém o arco (é o raio da superfície esférica) e h é a projeção do arco sobre o eixo. Dessa forma, temos:

$$A_{calota} = 2\pi r h_{calota}$$

$$A_{zona} = 2\pi r h_{zona}$$

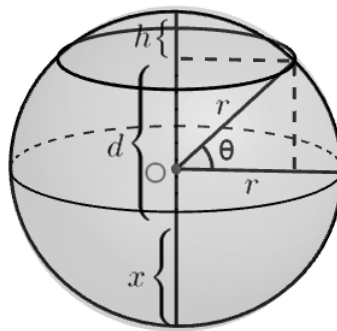
Figura 38: Calotas e zona esférica



Fonte: Autores

Uma dedução simples para a área da calota esférica, e conseqüentemente, da zona esférica, pode ser dada tomando a figura abaixo e considerando que estas áreas apresentam proporcionalidade em relação a área da superfície esférica de acordo com a altura h da calota ou da zona em questão.

Figura 39: Área da calota e zona esférica - Dedução



Fonte: Autores

Sendo assim, temos que:

$$\frac{A_{calota}}{A_{sup.esf}} = \frac{h}{2r} \rightarrow \frac{A_{calota}}{4\pi r^2} = \frac{h}{2r} \rightarrow A_{calota} = 2\pi r h$$

De posse da fórmula para área da calota esférica e da área da superfície esférica, podemos deduzir a área da zona esférica de altura d , considerando a $Calota_1$ de altura h e $Calota_2$ de altura x , conforme Figura 39, da seguinte forma:

$$A_{Zona} = A_{sup.esf} - A_{calota1} - A_{calota2} = 4\pi r^2 - 2\pi r h - 2\pi r x = 4\pi r^2 - 2\pi r(h + x)$$

Como $2r = d + h + x \rightarrow h + x = 2r - d$, substituindo na equação temos:

$$A_{Zona} = 4\pi r^2 - 2\pi r(2r - d) \rightarrow A_{Zona} = 4\pi r^2 - 4\pi r^2 + 2\pi r d = 2\pi r d$$

4.4 Área do triângulo esférico

O cálculo da área de um fuso esférico possibilita realizar a demonstração da fórmula utilizada para calcular a área de um triângulo esférico que tenha ângulos esféricos α, β, γ medidos em radianos ou em graus.

Dado um triângulo esférico $\triangle ABC$, conforme Figura 40, vamos considerar os pontos antípodas A', B', C' em relação aos vértices do triângulo esférico e também os seguintes ângulos diedros α, β, γ :

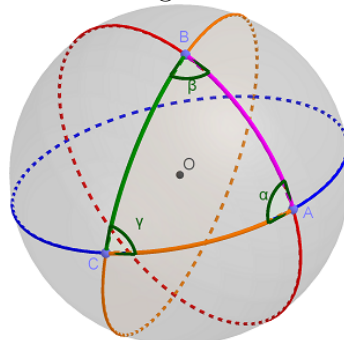
$$\alpha : \text{Diedro } B - AO - C$$

$$\beta : \text{Diedro } A - BO - C$$

$$\gamma : \text{Diedro } A - CO - B$$

Perceba que cada diedro aparece duas vezes na esfera, o que fornece seis fusos sobre a superfície esférica. Mas ao somarmos esses seis fusos com o intuito de completar a área da superfície esférica, acabamos somando 4 triângulos esféricos a mais na área final.

Figura 40: Triângulo e fusos esférico



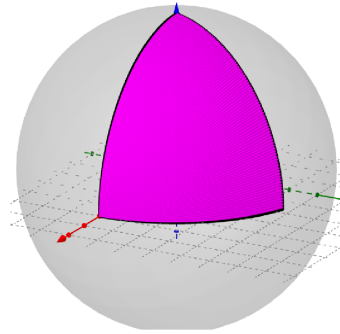
Fonte: Autores

Deste modo, considerando a medida dos ângulos do triângulo esférico (ângulos diedros) medidos em radianos, podemos dizer que a área da superfície esférica A_S pode ser expressa através da seguinte equação:

$$\begin{aligned} A_S &= 2A_\alpha + 2A_\beta + 2A_\gamma - 4A_{\triangle ABC} \\ 4\pi r^2 &= 2 \cdot 2r^2\alpha + 2 \cdot 2r^2\beta + 2 \cdot 2r^2\gamma - 4A_{\triangle ABC} \\ \pi r^2 &= r^2\alpha + r^2\beta + r^2\gamma - A_{\triangle ABC} \\ A_{\triangle ABC} &= r^2\alpha + r^2\beta + r^2\gamma - \pi r^2 \\ A_{\triangle ABC} &= r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \end{aligned}$$

Chegamos assim à fórmula da área de um triângulo esférico, que pode ser traduzida como o produto do excesso esférico (valor que a soma dos ângulos internos do triângulo esférico excede π) pelo quadrado do raio da esfera.

Figura 41: Área do triângulo esférico



Fonte: Autores

Caso os ângulos esféricos sejam medidos em graus e sabendo que a área do fuso de um ângulo diedro α é dada por $A_{Fuso} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90^\circ}$, que é igual a $A_{Fuso} = \frac{2\pi r^2 \alpha}{180^\circ}$, temos:

$$A_S = 2A_\alpha + 2A_\beta + 2A_\gamma - 4A_{\Delta ABC}$$

$$4\pi r^2 = \frac{2 \cdot 2\pi r^2 \alpha}{180^\circ} + \frac{2 \cdot 2\pi r^2 \beta}{180^\circ} + \frac{2 \cdot 2\pi r^2 \gamma}{180^\circ} - 4A_{\Delta ABC}$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{\pi r^2 \alpha}{180^\circ} + \frac{\pi r^2 \beta}{180^\circ} + \frac{\pi r^2 \gamma}{180^\circ} - \pi r^2$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{\pi r^2 \alpha}{180^\circ} + \frac{\pi r^2 \beta}{180^\circ} + \frac{\pi r^2 \gamma}{180^\circ} - \frac{180^\circ \pi r^2}{180^\circ}$$

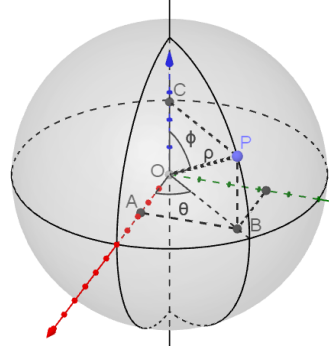
$$A_{\Delta ABC} = \frac{\pi r^2}{180^\circ} \cdot (\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ)$$

Vale ressaltar que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é sempre maior que 180° , e a expressão $\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$ representa o valor do ângulo excedente a 180° do triângulo esférico.

Coordenadas esféricas: um ponto P é escrito no sistema de coordenadas esféricas quando é representado pela terna $P(\rho, \theta, \phi)$, onde ρ é a distância do ponto P à origem do sistema de coordenadas (O), θ é o ângulo que o segmento \overline{OB} (com o ponto B sendo a projeção do ponto P sobre o plano xOy) forma com o eixo x positivo e ϕ é o ângulo que o segmento \overline{OP} forma com o eixo z positivo, com as seguintes restrições $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$, como indica a Figura 42.

As coordenadas esféricas facilitam a localização de pontos na superfície esférica e também é utilizada em cálculos e demonstrações que envolvem áreas da superfície e volume da esfera, abordados geralmente nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral estudadas em cursos de nível superior.

Figura 42: Coordenadas Esféricas



Fonte: Autores

Utilizando relações trigonométricas em triângulos retângulos é possível encontrar fórmulas de conversão das coordenadas polares para coordenadas retangulares. Com base na figura acima podemos perceber que:

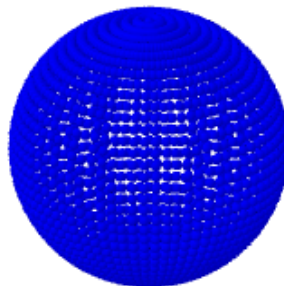
$$\cos \phi = \frac{z}{\rho} \Rightarrow z = \rho \cdot \cos \phi$$

$$\overline{OB} = \overline{CP} \text{ e } \sin \phi = \frac{\overline{CP}}{\rho} \text{ então } \overline{OB} = \rho \cdot \sin \phi$$

$$\sin \theta = \frac{y}{\overline{OB}} \rightarrow y = \rho \cdot \sin \phi \sin \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{x}{\overline{OB}} \rightarrow x = \rho \cdot \sin \phi \cos \theta$$

Portanto, temos que $(x, y, z) = (\rho \cdot \sin \phi \cos \theta, \rho \cdot \sin \phi \sin \theta, \rho \cdot \cos \phi)$.

Mesmo sabendo que o uso de coordenadas polares, cilíndricas e esféricas são mais utilizados em estudos mais avançados na área, que ocorre nos cursos de ensino Superior de Matemática ou de Ciências exatas, consideramos como uma das justificativas que podemos apresentar para inserir o conceito de coordenadas esféricas aos alunos do ensino médio, é que o uso destas coordenadas, principalmente a conversão para coordenadas cartesianas, possibilita a construção de muitos elementos da geometria esférica no software GeoGebra 3D, pois o uso da ferramenta Controle Deslizante, aplicada a dois ângulos que variam de 0° a 360° e 0° a 180° , respectivamente θ e ϕ (Figura 43), geram todos os pontos sobre a superfície de uma esfera, tornando acessível a elaboração de diversos objetos geométricos pertencentes a esta geometria.

Figura 43: Superfície esférica construída com com ponto flutuante (ϕ de 5° em 5°)

Fonte: Autores

5 PROPOSTA DE ENSINO

O principal objetivo dessas atividades é apresentar aos alunos uma “nova” geometria, de modo a introduzir alguns conceitos básicos da geometria esférica nas aulas regulares de ensino médio, em que a geometria da esfera deixaria de ser apenas uma parte do espaço tridimensional euclidiano, além de estabelecer relações com conceitos da geometria euclidiana.

Para iniciar, sugerimos a leitura de parte de uma história em quadrinhos intitulada *As aventuras de Anselmo curioso: Os mistérios da geometria*¹ do autor Jean-Pierre Petit. Nesta obra, o autor utilizou a técnica da banda desenhada para ensinar ciência a pessoas sem formação científica.

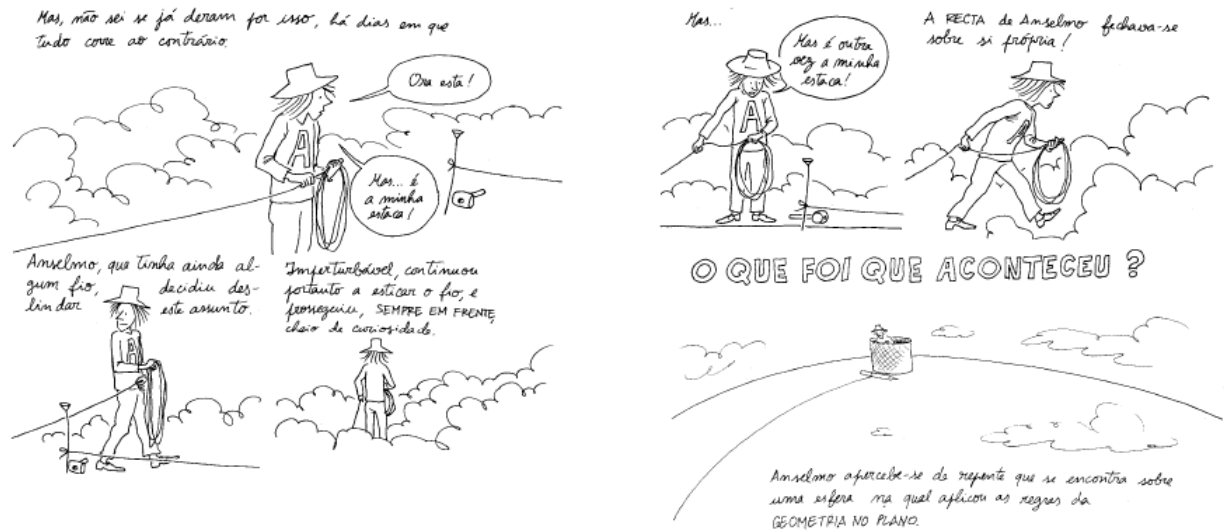
Figura 44: Material adaptado de “As aventuras de Anselmo Curioso: Os Mistérios da Geometria”



Fonte: Petit (1982)

¹O download da obra pode ser feito gratuitamente em <http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/Portuguais/>

Figura 45: Material adaptado de “As aventuras de Anselmo Curioso: Os Mistérios da Geometria”



Fonte: Petit (1982)

Com essa leitura, objetiva-se introduzir a geometria esférica de forma simples e divertida. Durante a leitura, se os alunos apresentarem dúvidas, possíveis intervenções para realizar discussões e comentários poderão ser necessárias por parte do professor.

No que segue, visando propiciar aos alunos um primeiro contato com a geometria esférica, inicialmente será apresentado um relato histórico acerca do surgimento e desenvolvimento das geometrias não euclidianas, bem como as propriedades da geometria esférica, cujo texto base encontra-se distribuído neste trabalho.

5.1 Atividades

As atividades seguintes foram extraídas de Carvalho (2014) (que teve como base Coutinho (2001) e Polya (1995)), e tem por objetivo comparar as geometrias plana e esférica, percebendo suas diferenças.

Atividade 1. Um urso parte do ponto P e percorre um quilômetro no sentido Sul. Em seguida, muda de rumo e anda um quilômetro no sentido Leste. Finalmente, muda outra vez de rumo, percorre um quilômetro no sentido Norte e chega exatamente ao ponto de partida. Qual é a cor do urso?

Nesta situação, pretende-se analisar os seguintes itens:

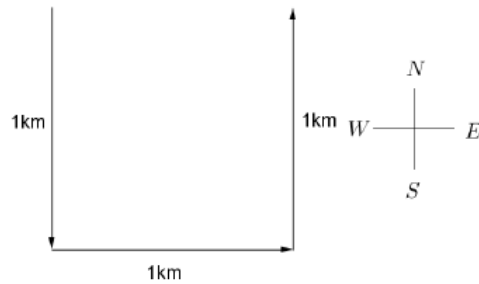
- Desenhar numa folha de papel o caminho percorrido pelo urso.
- De acordo com a situação acima é possível que o urso volte ao ponto de partida?
- Desenhar numa esfera de isopor o caminho percorrido pelo urso.
- Analisando o caminho desenhado na esfera de isopor, é possível que o urso volte ao ponto de partida?

Nesta atividade, possivelmente será necessário resgatar conceitos sobre pontos car-

deais (Norte, Sul, Leste e Oeste) e, em seguida, deve-se procurar refletir acerca da nossa percepção sobre superfícies plana e esférica, gerando um debate sobre a representação do plano euclidiano e do Globo Terrestre.

No caso da folha de papel, pode-se constatar que numa superfície plana não é possível que o urso volte ao ponto de partida e perceber que sempre formarão duas retas paralelas

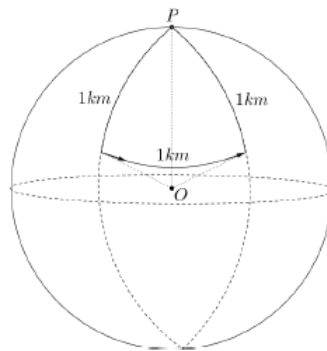
Figura 46: Atividade 1 - folha de papel



Fonte: Carvalho (2014)

Já na esfera de isopor, as circunferências máximas irão se encontrar nos polos e, dessa forma, tal situação só será possível na geometria esférica, com o urso partindo do polo Norte e, conseqüentemente, a cor deste é branca.

Figura 47: Atividade 1 - esfera de isopor



Fonte: Carvalho (2014)

Atividade 2. Considere a situação hipotética em que uma pessoa resolveu sair de casa e caminhar em linha reta infinitamente.

- Desenhe o caminho percorrido pela pessoa numa folha de papel.
- De acordo com o caminho percorrido desenhado na folha de papel, é possível que a pessoa volte ao ponto de partida?
- Desenhe o caminho percorrido pela pessoa numa esfera de isopor.
- De acordo com o caminho percorrido desenhado na esfera de isopor, é possível que a pessoa volte ao ponto de partida?

Esta atividade, semelhante ao recorte apresentado na história em quadrinhos, ajuda a compreender a diferença entre uma reta na superfície plana e na superfície esférica,

chamada de circunferência máxima. Além disso, leva a refletir que, na geometria euclidiana, a reta é infinita, ao passo que na geometria esférica, a reta é finita (embora seja ilimitada).

Atividade 3. Suponha agora que essa mesma pessoa caminhe em linha reta da sua casa até a floresta, a uma distância de 10 km.

- a) Desenhe numa folha de papel o caminho percorrido pela pessoa.
- b) Desenhe numa esfera o caminho percorrido pela pessoa e represente esse desenho na folha de papel.
- c) Qual é a diferença entre os dois desenhos? Anote suas conclusões.

A terceira atividade objetiva mostrar que a menor distância entre dois pontos na superfície plana é um segmento de reta, enquanto que na geometria esférica, é um arco de circunferência máxima.

Atividade 4. Considere a seguinte situação hipotética: Como seriam as trajetórias de dois barcos navegando por um longo percurso, de modo que mantenham sempre a mesma distância um do outro? Explique e justifique.

- a) Desenhe numa folha de papel e numa esfera de isopor o caminho percorrido pelos dois barcos.
- b) É possível traçar retas paralelas para representar o caminho percorrido pelos dois barcos na folha de papel e na esfera de isopor?

Esta atividade visa explorar que não existem retas paralelas na superfície esférica. Ademais, esta situação torna evidente a negação do quinto postulado de Euclides com a seguinte ideia: Por um ponto P fora de uma reta r , não passa nenhuma reta paralela a r . Diante disso, todas as circunferências máximas de uma superfície esférica sempre se interceptam em pelo menos dois pontos e, assim, os barcos se encontrarão no ponto diametralmente oposto ao ponto de início do trajeto.

Atividade 5. Construa as figuras, como indicado abaixo.

- a) Desenhe um triângulo qualquer numa folha de papel e com um transferidor meça seus ângulos e anote os resultados.
- b) Desenhe um triângulo qualquer numa esfera de isopor e com um transferidor meça seus ângulos e anote os resultados.

Com esta atividade, além de comparar os triângulos nas duas superfícies, é possível constatar que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que 180° .

Atividade 6. Utilizando atilhos de borracha, construa um triângulo na superfície da esfera de isopor. Faça as conjecturas da situações abaixo.

- a) O que acontecerá com os ângulos se afastarmos progressivamente os vértices?

- b) Quanto medirá os ângulos quando se inscreverem sobre um equador da esfera?
- c) Quanto medirá a soma desses ângulos?

O objetivo proposto nesta atividade é comparar e conjecturar os resultados obtidos a fim de entender melhor as propriedades da soma dos ângulos internos dos triângulos esféricos que, além de ser maior que 180° , não é constante, diferente dos triângulos planos.

Atividade 7. Utilizando uma esfera de isopor, desenhe duas circunferências máximas perpendiculares e desenhe uma terceira circunferência máxima, perpendicular às duas já construídas.

- a) Em quantos triângulos a esfera ficou dividida?
- b) Quanto mede cada ângulo desses triângulos?
- c) Qual a soma dos ângulos internos desses triângulos?
- d) Como é classificado esse triângulo esférico de acordo com seus lados e seus ângulos?

Nesta situação é necessário relembrar noções de perpendicularismo, além de propor uma discussão sobre a classificação dos triângulos esféricos de acordo com a medida dos seus ângulos internos e seus lados.

5.2 Exercícios de aplicação

A seguir, serão propostos exercícios de aplicação com sugestões de solução, onde o objetivo é fixar alguns conceitos e os principais elementos dos objetos geométricos abordados neste trabalho. Os exercícios foram extraídos de Alves (2009), Dolce e Pompeo (2013) e Iezzi, et al (2016).

1. Supondo que o raio da Terra meça 6 400 km e considerando $\pi = 3,14159$, calcule:

- a) o comprimento do Equador.
- b) a área da superfície da Terra.
- c) a área da superfície terrestre coberta por água, sabendo que ela corresponde aproximadamente a 70% do total.

2. Determine, em graus, a medida do ângulo do fuso de uma esfera, sabendo que a área do fuso é $54\pi \text{ cm}^2$ e da superfície esférica é $324\pi \text{ cm}^2$.

3. A área da interseção de um plano com uma esfera de raio 17 é 225π . Calcule a distância do plano ao centro da esfera.

- 4. Uma esfera é cortada por dois planos paralelos e a distância entre eles é de

18 cm. Sabendo que esses planos determinam círculos de áreas $144\pi \text{ cm}^2$, determine o volume da esfera.

5. Uma cunha esférica de 10° tem volume $1\,078 \text{ cm}^3$. Qual é a sua área total? Considere $\pi = \frac{22}{7}$.

6. Determine a área do círculo da esfera cujas distâncias polares são de 5 cm e 3 cm .

7. Determine a superfície de uma esfera, sendo $26\pi \text{ cm}$ o comprimento da circunferência máxima.

8. Determine a medida do raio de uma esfera, sabendo que seu volume e sua superfície são expressos pelo mesmo número.

9. Uma quitanda vende fatias de melancias embaladas em plástico transparente. Uma melancia com forma esférica de raio de medida r foi cortada em 12 fatias iguais, e cada fatia tem a forma de uma cunha esférica. Sabendo-se que a área de uma superfície esférica de raio $r \text{ cm}$ é $4\pi r^2 \text{ cm}^2$, determine, em função de π e r :

- a) a área da casca de cada fatia da melancia (fuso esférico);
- b) quantos centímetros quadrados de plástico foram necessários para embalar cada fatia (sem nenhuma perda e sem sobrepor camadas de plástico), ou seja, a área da superfície total de cada fatia.

10. Calcule a distância de uma seção plana de uma esfera ao centro da esfera, sabendo que o círculo máximo (círculo que possui o mesmo centro e o mesmo raio da esfera) tem área igual ao quádruplo da área determinada pela seção plana e que o raio da esfera mede 17 cm.

11. O raio de uma esfera mede 41 cm. Determine a razão entre as áreas das seções obtidas por dois planos, sendo de 40 cm e 16 cm as respectivas distâncias desses planos ao centro da esfera.

12. Supondo que o raio da Terra meça 6 400 km, qual o comprimento de um grau de longitude em uma:

- a) latitude de 30° N (aproximadamente a latitude de Nova Orleans)?
- b) latitude de 10° S (aproximadamente a latitude de Maceió)?
- c) latitude arbitrária β ?

13. A que latitude um paralelo mede 20 100 km? Qual a área da zona esférica compreendida entre a linha do Equador e este paralelo?

Sugestões de solução

1. a) O cálculo do comprimento da circunferência é dado por $2\pi r$. Substituindo o valor de r e de π , temos que $C = 40\,212,352$ km.

b) Substituindo o valor de r e de π na fórmula da área da superfície esférica, temos que $A = 514\,718\,105,6$ km².

c) Seja A_a a área da superfície terrestre coberta por água. Multiplicando o resultado anterior por 0,7, obtemos como resposta $A_a = 360\,302\,673,92$ km².

2. Como a área do fuso esférico é proporcional a área da superfície esférica, o ângulo do fuso, definido como α , pode ser calculado por uma regra de três simples entre a área da superfície esférica para 360° e a área do fuso esférico para α , obtendo como resposta $\alpha = 60^\circ$.

3. A interseção do plano com uma esfera determina um círculo de raio s cuja área é $225\pi = \pi s^2$, daí $s = 15$. Temos que o raio da esfera ($r = 17$) é hipotenusa e que o raio da seção ($s = 15$) é um cateto, pelo teorema de Pitágoras, a distância (d) do plano ao centro da esfera é igual a 8.

4. A área dos círculos é $144\pi = \pi s^2$, daí $s = 12$ (onde s é o raio da seção determinada pelo plano). Se os raios dos círculos são iguais, os dois planos são equidistantes do centro, ou seja, a distância (d) de cada plano ao centro da esfera é igual a 9. Temos $d = 9$ e $s = 12$ são catetos e, aplicando o teorema de Pitágoras, $r = 15$, sendo este o raio da esfera. Substituindo o valor de r e na fórmula do volume da esfera, obtemos $V = 4\,500\pi$ cm³.

5. Definindo α como o ângulo da cunha esférica e r o raio que a contém, inicialmente, será calculado o volume da esfera estabelecendo uma regra de três entre o volume da esfera para 360° e o volume da cunha esférica para 10°. Em seguida, o valor de r poderá ser encontrado ao igualar o resultado anterior com a fórmula do volume da esfera. A área total da cunha esférica de raio r é igual à soma da área do fuso esférico com um círculo, ambos de raio r e, como conhecemos r , α e π , basta substituir esses valores nas fórmulas e obter como resposta $A_{cunha} = 1\,540$ m².

6. Seja s o raio da seção e d o diâmetro da esfera. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo formado pelas distâncias polares e pelo diâmetro da esfera, temos que $d = \sqrt{34}$. Pelas relações métricas no triângulo retângulo ($ah = bc$), temos que $s = \frac{15}{\sqrt{34}}$. Substituindo o valor de s na fórmula da área do círculo, obtemos

$$A = \frac{225\pi}{34} \text{ cm}^2.$$

7. O comprimento da circunferência é $26\pi = 2\pi r$, logo, $r = 13$. Substituindo o valor de r na fórmula da área da superfície esférica, obtemos $A = 676\pi \text{ cm}^2$.

8. A fórmula do volume da esfera é dada por $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ e a da área da superfície esférica, $A = 4\pi r^2$. Como o volume e a superfície são expressos pelo mesmo número, basta igualar as equações, obtendo $r = 3$ como resposta.

9. a) Como cada fatia equivale a $\frac{1}{12}$ da melancia, a área procurada será o produto desse valor com a área da superfície esférica, ou seja, $A_{\text{casca da fatia}} = \frac{\pi r^2}{3}$.

b) Deve-se determinar a área de uma cunha esférica de $\alpha = 30^\circ$ e de raio r . Como a área total da cunha esférica é dada pela soma da área do fuso esférico com a área de um círculo, basta substituir o valor de α nas fórmulas e obter como resposta $A_{\text{Cunha}} = \frac{4\pi r^2}{3} \text{ cm}^2$.

10. Seja r o raio do círculo máximo e s o raio do círculo determinado pela seção. Como $r = 17 \text{ cm}$, a área do círculo máximo é $A_C = 289\pi$. O resultado obtido é igual o quádruplo da área do círculo determinado pela seção, igualando estes resultados, temos que $s = \frac{17}{2}$. Temos que o raio do círculo máximo ($r = 17$) é hipotenusa e que o raio da seção ($s = \frac{17}{2}$) é um cateto, pelo teorema de Pitágoras, a distância (d) do plano ao centro da esfera é igual a $\frac{17\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$.

11. Seja r o raio da esfera e s_1 o raio do círculo determinado pela seção que está a uma distância d_1 de 40 cm do centro da esfera. Pelo teorema de Pitágoras, temos que $s_1 = 9$, logo, a área desta seção é 81π . Analogamente, seja s_2 o raio do círculo determinado pela seção que está a uma distância d_2 de 16 cm do centro da esfera. Pelo teorema de Pitágoras, temos que $s_2 = 5\sqrt{57}$, logo, a área desta seção é 1425π . Assim, a razão entre as áreas das seções é $\frac{27}{475}$.

12. a) Seja r o raio do paralelo que está a uma latitude de 30° , temos que $\cos 30^\circ = \frac{r}{6400}$ ou seja, $r = 3200\sqrt{3}$. Como o arco l de circunferência é dado por

$$l = \frac{\pi r \alpha}{180}, \text{ e neste caso, } \alpha = 1^\circ \text{ é a longitude de } 1^\circ, \text{ temos } l = \frac{\pi \cdot 3200\sqrt{3} \cdot 1}{180} \simeq 96,7 \text{ km}.$$

b) Sabendo que $\cos 10^\circ \simeq 0,9848$ temos que o raio do paralelo mede $r = 6400 \cdot 0,9848 \simeq 6302$ e para $\alpha = 1^\circ$ temos o comprimento deste arco medindo $l = \frac{\pi \cdot 6302 \cdot 1}{180} \simeq 110 \text{ km}$.

c) Generalizando o exposto nos itens a) e b), temos que $\cos \beta = \frac{r}{R}$ então $r = R \cdot \cos \beta$, onde β é a latitude, R é o raio da Terra e r é o raio do paralelo. Com um arco

l de circunferência é dado por $l = \frac{\pi r \alpha}{180}$, e neste caso, α é a longitude medida em graus. Então para cada grau de longitude para uma latitude β arbitrária é dada por $l = \frac{\pi r \alpha}{180} = \frac{\pi R \cdot \cos \beta \cdot \alpha}{180} = \frac{6\,400\pi \cdot \cos \beta}{180}$.

13. O comprimento de uma circunferência C é dada por $C = 2\pi r$, portanto $20\,100 = 2 \cdot 3,14 \cdot r \rightarrow r \simeq 3\,200 \text{ km}$. Considerando a latitude β e sabendo que $\cos \beta = \frac{r}{R} = \frac{3\,200}{6\,400} = \frac{1}{2}$, é fácil verificar que $\beta = 60^\circ$ de latitude. Vale lembrar que podemos ter dois paralelos com este comprimento: um a 60° Norte, e outro a 60° Sul.

Observação: conforme exercício anterior, é fácil verificar que cada grau de longitude neste paralelo equivale a aproximadamente 55,8 km.

Como a área da zona esférica é dada por $A = 2\pi R h$, onde h é a altura da zona, e como $\sin 60^\circ = \frac{h}{R}$, temos que $h = \sin 60^\circ \cdot r = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6\,400 \simeq 5\,542 \text{ km}$. Sendo assim a área da zona esférica compreendida entre a linha do Equador e um dos paralelos de 60° de latitude é $A = 2\pi \cdot 6\,400 \cdot 5\,542 \simeq 222\,857\,043 \text{ km}^2$ de área.

Observação: interessante perceber que, sabendo que a área da zona esférica (ou calota esférica) é proporcional à altura da zona (ou calota) e que quando $h = 2R$ temos a área total da superfície terrestre, pois $A_z = 2\pi R h = 2\pi R 2R = 4\pi R^2 = A_{sup.esf.}$, então a área da zona esférica de altura 2 770 km poderia ser calculada através da divisão da área da total da superfície pela razão entre o diâmetro e a altura da zona, ou seja,

$$A_z = \frac{A_{sup.esf.}}{\frac{2R}{h}} = \frac{4\pi \cdot 6\,400^2}{\frac{12\,800}{5\,542}} \simeq 222\,857\,043 \text{ km}^2.$$

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Embora as geometrias não euclidianas sejam alvo de constantes estudos para especialistas em matemática desde sua descoberta, há quase dois séculos, há uma escassez de livros sobre o assunto com texto adequado para iniciantes.

Este trabalho foi escrito em uma tentativa de fornecer um material satisfatório que pudesse ser utilizado como um material didático para o ensino de geometria esférica. Acreditamos que este material, juntamente com atividades propostas, possa contribuir para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes de Ensino Médio, bem como para a formação profissional dos professores de Matemática da Educação Básica.

Nos capítulos II e III, apresentamos o contexto histórico do assunto com bastante ênfase, pois já foi dito que nenhuma ciência perde tanto quando desassociada de sua história quanto a matemática. O que é particularmente verdade nas geometrias não euclidianas, pois a história dramática dos esforços realizados ao longo de vinte séculos para demonstrar o quinto postulado de Euclides, culminando no triunfo do racionalismo sobre a tradição e na descoberta das geometrias não euclidianas é parte integrante do assunto. Além disso, um relato das dificuldades, dos esforços fadados ao fracasso ou que não atingiram os objetivos por uma margem escassa e do tempo envolvido em todo este processo, além de dar a medida da grandeza desta realização humana, pode ajudar a não deixar persistir a impressão de que a matemática é algo pronto e acabado.

Quanto à proposta de ensino, certos de que consiste em apenas uma fração do todo, acreditamos que esta possa ser útil para a implementação da geometria esférica, além de incentivar professores e alunos a ampliar os horizontes para a construção do conhecimento matemático. A apresentação de cada conceito e propriedade é acompanhada de imagens elaboradas no software livre de geometria dinâmica GeoGebra 3D, que acreditamos trazer detalhes precisos para a compreensão dos elementos apresentados. Ainda, a proposta de ensinar uma nova geometria não significa desconsiderar a geometria euclidiana, mas resgatá-la, pois são necessários conhecimentos de geometria euclidiana para a apreensão dos conceitos de geometria esférica. Dessa forma, levar os estudantes do Ensino Médio ao conhecimento da geometria esférica implica proporcionar-lhes acesso a outras ideias, ampliando seu conhecimento e pensamento geométrico ao relacionar e diferenciar estas geometrias.

Neste ponto, vale ressaltar que algumas características que se verificam quando consideramos uma superfície esférica são peculiares e podem em um primeiro momento causar estranhamento aos alunos, como por exemplo a definição de reta ser uma circunferência máxima e segmento de reta ser definido como um arco desta mesma circunferência. Dentre as propriedades desta geometria, é importante destacar e comentar algumas:

- 1) Na geometria esférica não existem retas paralelas. Como na geometria euclidiana temos uma única reta paralela a uma reta dada e que passa por um ponto fora dela ou

retas paralelas coincidentes, esta propriedade pode não ser tão evidente aos alunos do ensino médio e merece uma atenção especial.

2) A área da superfície esférica é dada pela expressão $4\pi r^2$, onde r é o raio da esfera. Embora a dedução que apresentamos não tenha relação com áreas da geometria euclidiana, esta área é exatamente o quádruplo da área de um círculo plano de mesmo raio e, por consequência, pode ser utilizada por alguns estudantes para sua assimilação, já que a área de um círculo é muito utilizada na geometria plana e espacial trabalhadas na educação básica.

3) A dedução do volume da esfera envolve conhecimentos de volume do cone, cilindro e o princípio de Cavalieri, proporcionando um momento de relação e utilização de conhecimentos prévios admitidos muitas vezes sem conexão.

4) O resultado de que a área de uma calota esférica de altura h é igual a área de uma zona esférica de mesma altura (h ou d , como usamos no texto, dependendo do contexto) é algo impressionante, por ser contraintuitivo na maioria das vezes. Admitir que, ao descascarmos uma laranja, a área da casca da “tampinha” de altura h é igual a área da “rodela” da casca de mesma altura, uma estando no “polo” e outra estando próxima ao “equador” da laranja, é no mínimo curioso, pra não dizer intrigante.

5) Em um triângulo esférico a soma dos ângulos internos é maior que 180° e menor que 540° , trazendo uma nova perspectiva em relação ao triângulo plano, além do fato destes ângulos serem definidos por retas tangentes à esfera no vértice do triângulo e os lados serem arcos de circunferências máximas.

Por fim, as atividades e exercícios de aplicação foram apresentados a fim de tornar mais claro os conceitos da geometria esférica apresentados. Ademais, a utilização de materiais manipuláveis de fácil acesso e baixo custo (esferas de isopor e atilhos, por exemplo) podem colaborar para um melhor entendimento e comparação da geometria esférica com a euclidiana.

Em um trabalho futuro, pretendemos aplicar efetivamente esta proposta de ensino com alunos de Ensino Médio, buscando analisar a adequação e aprimoramento da mesma.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALVES, Sérgio. **A geometria do globo terrestre**. Rio de Janeiro, IMPA (PIC-OBMEP), 2009.
- BARBOSA, J. L. M. **Geometria Hiperbólica**. 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução de Helena Castro. 3 ed. São Paulo: Blücher, 2012.
- BRASIL. [Lei Darcy Ribeiro (1996)]. **LDB: Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**: Lei nº 9.394/1996. 14 ed. Brasília: Câmara dos Deputados, Edições Câmara, 2017.
- BRUM, Wanderley Pivatto; SCHUHMACHER, Elcio. **Aprendizagem de conceitos de geometria esférica e hiperbólica no ensino médio sob a perspectiva da teoria da aprendizagem significativa usando uma sequência didática**. Meaningful learning review, [S.L.], V3(2), p. 1-21, setembro de 2013.
- CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometrias Não-Euclidianas**. Matemática Universitária, Rio de Janeiro, IMPA, n. 6, p. 25-48, Dezembro de 1987.
- CARVALHO, Osnildo Andrade. **Uma abordagem de Geometrias Não-Euclidianas na Educação Básica: Geometria Esférica**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – UFRB, Cruz das Almas – BA, 2014.
- CUENTOS CUÁNTICOS. La importancia de la curvatura. Disponível em: <https://cuentos-cuanticos.com/2011/11/19/la-importancia-de-la-curvatura/>. Acesso em 05 de outubro de 2019.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática: da teoria à prática**. 23. ed. São Paulo: Papirus, 2012.
- DARIO, Douglas Francisco. **Geometrias Não Euclidianas: Elíptica e Hiperbólica no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática, UTFPR, Pato Branco – PR, 2014.
- DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar, 10: geometria espacial, posição e métrica**. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013.
- EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5 ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.
- LORENZATO, Sergio. Por que não ensinar Geometria? **Revista de Educação Matemática**: Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), n. 4, p. 3-13, 1995.
- FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.
- GANS, David. **An introduction to non-Euclidean geometry**. New York: Academic Press, 1973.

- GRAVINA, Maria Alice. **Os Ambientes de Geometria Dinâmica e o Pensamento Hipotético-Dedutivo**. Tese de Doutorado. UFRGS, Porto Alegre, 2001.
- GREENBERG, Marvin Jay. **Euclidean and non-Euclidean geometries: development and history**. 3 ed. New York: W. H. Freeman and Company, 1994.
- IEZZI, Gelson. et. al. **Matemática: ciência e aplicações**, volume 2. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.
- MLODINOW, Leonard. **A janela de Euclides: A história da Geometria, das Linhas Paralelas ao Hiperespaço**. 6 ed. São Paulo: Geração Editorial, 2010.
- NETO, José Ramos Machado. **Geometria esférica: uma proposta pedagógica**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/SBM) – Instituto de Ciência Exatas e da Terra, UFMT, Cuiabá – MT, 2018.
- PETIT, Jean-Pierre. **As Aventuras de Anselmo Curioso: Os Mistérios da Geometria**. Tradução de Luís Pignatelli. 1 ed. Lisboa: Gráfica Barbosa e Santos, 1982.
- REIS, Joana d’Arc da Silva. **Geometria esférica por meio de materiais manipuláveis**. Dissertação (Mestrado) - UNESP, Rio Claro - SP, 2006.
- RIBEIRO, Ricardo Silva. **Geometrias não-euclidianas na escola: uma proposta de ensino através da geometria dinâmica**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - UFRGS, Porto Alegre – RS, 2013.
- ROCHA, Rogério Batista da. **Geometrias Não-Euclidianas: Proposta de abordagem aplicável ao Ensino Básico**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/SBM) – Instituto de Matemática, UFBA, Salvador – BA, 2013.
- SILVA, José Pedro Alves da. **As Geometrias Euclidiana e Não-Euclidianas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – IMPA, Rio de Janeiro – RJ, 2017.
- WOLFE, Harold Eichholz. **Introduction to Non-Euclidean Geometry**. New York: The Dryden Press, 1945.