

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO SUL
CAMPUS CAXIAS DO SUL

INTRODUÇÃO ÀS SUPERFÍCIES REGULARES EM \mathbb{R}^3

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MUNIQUE DOS SANTOS LIMA

CAXIAS DO SUL

2019

MUNIQUE DOS SANTOS LIMA

INTRODUÇÃO ÀS SUPERFÍCIES REGULARES EM \mathbb{R}^3

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática, pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – *Campus* Caxias do Sul.

Área de Concentração: Matemática

Orientador:

Prof. Me. Nicolas Moro Müller – IFRS – *Campus* Caxias do Sul

CAXIAS DO SUL

2019

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, *Campus* Caxias do Sul

51 L732i	<p>Lima, Munique dos Santos</p> <p>Introdução às superfícies regulares em \mathbb{R}^3. [manuscrito] / Munique dos Santos Lima; orientador, Nicolás Moro Müller. -- Caxias do Sul, RS, 2019. 65 f.</p> <p>TCC (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do RS (IFRS), Caxias do Sul, 2019.</p> <p>1. Licenciatura em matemática. 2. Geometria Diferencial. 3. Superfícies Regulares. 4. Primeira Forma Fundamental. I. Müller, Nicolás Moro. II. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU 51</p>
-------------	---

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Jaçanã Eggres Pando - CRB 10/1936

MUNIQUE DOS SANTOS LIMA

INTRODUÇÃO ÀS SUPERFÍCIES REGULARES EM \mathbb{R}^3

A banca examinadora, abaixo listada, aprova o Trabalho de Conclusão de Curso INTRODUÇÃO ÀS SUPERFÍCIES REGULARES EM \mathbb{R}^3 elaborado por Munique dos Santos Lima como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática, pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – *Campus* Caxias do Sul.

Profa. Ma. Caroline Maria Assmann – PPGMat - UFRGS

Prof. Me. Lucas Soares Priebe – PPGMat - UFRGS

Prof. Me. Vagner Weide Rodrigues – IFRS - *Campus* Bento Gonçalves

Caxias do Sul, 12 de novembro de 2019.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, que não só nesse momento, mas em toda a minha vida estiveram comigo, não medindo esforços para a realização dos meus sonhos. Um agradecimento especial ao meu pai, que não está mais entre nós, mas continua sendo minha maior força diária.

Agradeço aos meus professores orientadores Nicolas Moro Müller e Lucas Pinto Dutra, por toda dedicação, disponibilidade e pelas orientações tão significativas na realização deste trabalho. Aos demais professores, por contribuírem na minha formação, por todo aprendizado e inspiração.

As minhas amigas por todos os momentos de parceria, estudos, experiências, aprendizados e risadas. Esta caminhada não seria a mesma sem vocês. Por fim, agradeço ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul - *Campus* Caxias do Sul pela oportunidade de concluir este curso e também a Universidade Federal de Pelotas, onde iniciei a graduação.

RESUMO

O presente trabalho apresenta um estudo introdutório sobre Superfícies Regulares em \mathbb{R}^3 . De forma simples, pode-se dizer que uma Superfície Regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é constituída tomando pedaços do plano, os quais são deformados e colados suavemente entre si, de forma que S não contenha pontas, arestas ou auto-interseções. Definindo S dessa forma, é possível estender as noções usuais do Cálculo às Superfícies Regulares. O método utilizado na realização deste trabalho foi de pesquisa bibliográfica, que viabilizou o estudo dos conteúdos aqui abordados. Desta forma, foram necessários apresentar alguns tópicos de análise no \mathbb{R}^n , a fim de embasar o estudo de Superfícies Regulares e, assim, chegar na primeira forma fundamental, objetivo principal do estudo. A primeira forma fundamental possibilita tratar questões métricas sobre a superfície, tais como: comprimento de curvas, ângulo entre vetores tangentes e área de regiões. Assim, o trabalho explora tais propriedades métricas das Superfícies Regulares, bem como alguns exemplos.

Palavras-chave: Geometria Diferencial. Superfícies Regulares. Primeira Forma Fundamental.

ABSTRACT

The present work relates an introductory study about Regular Surfaces in \mathbb{R}^3 . Simply, it can be said that a S Regular Surface in \mathbb{R}^3 is constituted taking pieces of the plan, which are deformed and glued together smoothly so that S doesn't contain edges, arris or self-intersections. Setting S this mode makes it possible to extend the usual notions of Regular Surfaces Calculus. The method used during this work was bibliographical research, which enables us to study the contents addressed here. Thus, it was necessary to present some topics of analysis in \mathbb{R}^n to support the investigation of Regular Surfaces, achieving this way the first fundamental form, the main objective of the study. The first fundamental form allows the discussion of metric questions about the surface, such as length of curves, the angle between tangent vectors, and the area of regions. Therefore, the investigation of this work explores such metric properties of Regular Surfaces as well as some examples.

Keywords: Differential Geometry. Regular Surfaces. First Fundamental Form.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Definição de Superfície Regular.	32
Figura 2 – Gráfico de uma Aplicação Diferenciável.	34
Figura 3 – Parametrizações φ_1 e φ_2 da esfera S^2	35
Figura 4 – Parametrizações locais da esfera S^2	36
Figura 5 – Proposição 5.1.2.	39
Figura 6 – Uma Superfície de Revolução.	40
Figura 7 – Toro.	42
Figura 8 – Hiperbolóide de duas folhas.	43
Figura 9 – Proposição 5.1.3.	44
Figura 10 – Lema 5.2.1.	46
Figura 11 – Mudança de parâmetros.	48
Figura 12 – Aplicação entre superfícies regulares.	50
Figura 13 – Proposição 5.3.1.	52
Figura 14 – Boa definição da aplicação entre planos tangentes de superfícies regulares.	53

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	METODOLOGIA	11
3	EMBASAMENTO HISTÓRICO	13
4	REFERENCIAL TEÓRICO	15
4.1	Tópicos de Análise no \mathbb{R}^n	15
4.1.1	O Espaço Vetorial \mathbb{R}^n	15
4.1.2	Bolas e Sequências no espaço euclidiano	18
4.1.3	Limites e Aplicações contínuas	19
4.1.4	Conjuntos Abertos	21
4.1.5	Caminhos Diferenciáveis	23
4.1.6	Cálculo com funções reais de n variáveis	24
4.1.7	O Teorema da Aplicação Inversa	29
5	SUPERFÍCIES REGULARES	31
5.1	Superfícies Regulares; Imagens inversas de valores regulares	31
5.2	Mudança de Parâmetros; Funções Diferenciáveis sobre Superfícies	45
5.3	Plano Tangente; Diferencial de uma Aplicação	51
5.4	Primeira forma Fundamental; Área	55
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	63
	REFERÊNCIAS	64

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta um estudo inicial sobre Superfícies Regulares em \mathbb{R}^3 . Em sua essência, a Geometria Diferencial de Superfícies foi introduzida por Carl Friedrich Gauss em sua obra “*Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas*”, publicada em 1828. Neste artigo, Gauss apresenta o conceito de curvatura gaussiana e estabelece dois resultados importantes da Geometria Diferencial, conhecidos como Teorema *Egregium* e Teorema *Elegantissimum* (LIMA, 2016).

A Geometria Diferencial estuda as propriedades e generalizações de curvas e superfícies por meio do Cálculo. De acordo com Carmo (2010), pode-se dizer que a parte mais interessante e representativa dessa área é o estudo das Superfícies Regulares. Quando pensa-se em uma Superfície algumas questões naturais podem ser levantadas, uma delas é como fazer medidas sobre a superfície.

Aqui, serão abordados conceitos que precedem esses importantes teoremas citados anteriormente. Busca-se responder a questão norteadora do trabalho: como utilizar conceitos relacionados a uma Superfície Regular $S \subset \mathbb{R}^3$, em um ponto $p \in S$, para calcular comprimento de curvas, ângulo entre vetores e áreas entre regiões? Nesse sentido, o principal objetivo é estudar a primeira forma fundamental, que possibilita justamente tratar sobre essas questões métricas sobre a superfície.

Alguns pré-requisitos são necessários para o estudo de Superfícies Regulares. Especificamente, é preciso conhecer alguns fatos sobre continuidade e diferenciabilidade de funções e aplicações em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 . Assim, inicialmente, foram estudados tópicos de análise no \mathbb{R}^n , que são essenciais para a compreensão do trabalho. Na sequência, partiu-se para o estudo de Superfícies Regulares, suas propriedades e exemplos.

Organizou-se o trabalho em seis capítulos, sendo esta introdução o primeiro deles. O capítulo seguinte aborda a metodologia utilizada e descreve as etapas da realização do trabalho. Uma pequena contextualização histórica sobre Geometria Diferencial é feita no terceiro capítulo, onde comenta-se brevemente os principais estudiosos da área e as suas contribuições.

O capítulo 4 aborda o referencial teórico, onde são apresentados tópicos de análise no \mathbb{R}^n , fundamentais para o desenvolvimento do trabalho. O quinto capítulo é dedicado ao objeto chave do trabalho, o estudo de Superfícies Regulares em \mathbb{R}^3 . O último capítulo é destinado as considerações finais.

2 METODOLOGIA

Este trabalho baseia-se em uma pesquisa bibliográfica, visto que foi elaborado a partir de materiais já publicados. Pensa-se que esta metodologia é a mais adequada para conduzir o mesmo, pois a teoria base já encontra-se consolidada em livros, artigos, dissertações e teses. Nessa perspectiva, de acordo com Gil (2010, p. 45), uma pesquisa bibliográfica segue as seguintes etapas:

- i) escolha do tema;
- ii) levantamento bibliográfico preliminar;
- iii) formulação do problema;
- iv) elaboração do plano provisório de assunto;
- v) busca das fontes;
- vi) leitura do material;
- vii) fichamento;
- viii) organização lógica do assunto;
- ix) redação do texto.

Desta forma, a partir da escolha do tema e da sua delimitação, buscou-se bibliografias apropriadas, onde foram selecionados livros que são referências no assunto. Assim, foi elaborada a questão norteadora: “como utilizar conceitos relacionados a uma Superfície Regular $S \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in S$ para calcular comprimento de curvas, ângulo entre vetores e áreas entre regiões?”. Feito isso, foi possível determinar alguns objetivos a serem atingidos e um plano provisório de estudo.

Foram elencados os pré-requisitos fundamentais para a compreensão do trabalho, que são tópicos de Análise no \mathbb{R}^n . As principais referências utilizadas nesta etapa foram Lima, E. L. (2012, 2013) e Lima R. F. (2015). Desta forma, foi elaborado um plano provisório dos conteúdos a serem estudados, determinando uma estrutura lógica a fim de nortear a pesquisa. Para o levantamento histórico sobre o assunto, utilizou-se Boyer e Merzbach (2012), Eves (2004) e Katz (2010).

Tem-se Carmo (2010) como principal referência para o estudo de Superfícies Regulares e Lima, R. F (2016) e Tenenblat, K. (2008) como bibliografias complementares. Assim, a partir da definição de Superfície Regular, foram explorados alguns exemplos e estudados tópicos relacionados a essa definição, tais como mudança de parâmetros, plano

tangente e primeira forma fundamental, com o propósito de buscar uma resposta para o problema apresentado.

3 EMBASAMENTO HISTÓRICO

A Geometria Diferencial é o estudo das propriedades e generalizações de curvas e superfícies, utilizando o Cálculo. Geralmente, ela explora curvas e superfícies nas proximidades imediatas de qualquer de seus pontos. Pode-se dizer que a Geometria Diferencial, em sua forma moderna, iniciou nas primeiras décadas no século XVIII, com aplicações do Cálculo à Geometria Analítica. Gaspard Monge (1746 - 1818), matemático francês, é considerado o pai da Geometria Diferencial, visto que foi o pioneiro nos estudos de curvas e superfícies no espaço (EVES, 2004, p. 602).

Monge foi professor na Escola Politécnica e sob sua influência, matemáticos franceses como J. B. Meusnier (1754 - 1793), E. L. Malus (1775 - 1812), C. Dupin (1784 - 1873) e O. Rodrigues (1794 - 1851) entraram para o ramo da Geometria Diferencial, contribuindo com importantes teoremas da área. Ainda, Monge e seus seguidores consolidaram a escola francesa de especialistas em Geometria Diferencial, que posteriormente, incluiu nomes como A. L. Cauchy (1789 - 1857), B. de Saint-Venant (1796 - 1886), J. F. Frenet (1816 - 1888), J. A. Serret (1819 - 1885), V. Puiseux (1820 - 1883) e J. Bertrand (1822 - 1900), que também colaboraram com estudos no campo (EVES, 2004, p. 602).

De acordo com Katz (2010, pp. 991 - 992), em 1828 o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), publicou sua obra “*Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas*” (Investigações Gerais sobre Superfícies Curvas), que abordava a noção de curvatura de uma superfície curva. Gauss focou em superfícies com “curvatura contínua”, ou seja, superfícies que possuem planos tangentes em todos os pontos. Assim, Gauss definiu a curvatura gaussiana de uma superfície em um ponto. Segundo Boyer e Merzbach (2012, p. 348):

Se em um ponto P de uma superfície bem-comportada S levantamos uma reta N normal a S , o feixe de planos que contém N corta a superfície S em uma família de curvas planas, cada uma das quais terá um raio de curvatura. As direções das curvas com raios de curvatura máximo e mínimo, R e r , são chamados direções principais de S em P , e acontece serem sempre perpendiculares entre si. R e r chamam-se raios de curvatura principais de S em P , e a curvatura gaussiana de S em P é definida por $K = \frac{1}{rR}$.

Posteriormente, o matemático alemão Georg Bernhard Riemann (1826 - 1866) focou seus estudos em variedades m -dimensionais imersas em espaços n -dimensionais, deixando para trás o espaço tridimensional. Assim, confirmou-se uma tendência da matemática moderna, a busca pela maior generalização possível. Desta forma, foram exploradas as geometrias diferenciais generalizadas, as chamadas Geometrias Riemannianas, que desencadearam os estudos para as Geometrias Não-Riemannianas e outras (EVES, 2004, p. 603).

Segundo Carmo (2010, p. 1) a Geometria Diferencial aborda dois aspectos: Geometria Diferencial Clássica e a Geometria Diferencial Global. A Geometria Diferencial Clássica estuda o comportamento local de curvas e superfícies, isto é, nas vizinhanças de um ponto. Por outro lado, a Geometria Diferencial Global analisa “a influência das propriedades locais sobre o comportamento da curva ou superfície como um todo” (CARMO, 2010, p. 1). O tema dessa pesquisa, Superfícies Regulares em \mathbb{R}^3 , se encaixa no estudo das propriedades locais.

A Geometria Diferencial, de acordo com o IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) tem ligações com outras áreas da Matemática, tais como Equações Diferenciais Parciais, Topologia, Funções Analíticas Complexas, Sistemas Dinâmicos e Teoria dos Grupos. Assim, diante do seu caráter interdisciplinar, esta área tem manifestado grande relevância e vem se desenvolvendo em diversas direções, apresentando uma quantidade considerável de pesquisas.

Além disso, a escolha do tema justifica-se por uma motivação pessoal da autora. A mesma teve a oportunidade de conhecer a Geometria Diferencial devido sua identificação com as disciplinas de Geometria Analítica e Geometria Espacial e ainda, por incentivo de uma professora da área. Assim, durante a graduação, foram realizados estudos sobre curvas planas, os quais foram significativos para a autora. Nesse sentido, considerou-se adequado continuar os estudos em Geometria Diferencial, com tópicos mais avançados.

4 REFERENCIAL TEÓRICO

4.1 Tópicos de Análise no \mathbb{R}^n

Esta seção visa apresentar tópicos de Análise no \mathbb{R}^n que são essenciais para a compreensão deste trabalho. Os teoremas, definições e proposições aqui apresentados foram extraídos e/ou adaptados de Lima, E. L. (2012, 2013) e Lima, R. F. (2015).

4.1.1 O Espaço Vetorial \mathbb{R}^n

Aqui, serão abordados alguns tópicos iniciais de topologia do espaço euclidiano, tais como: noções do espaço vetorial \mathbb{R}^n , produto interno, norma e algumas propriedades.

Dado um número natural n , o espaço *euclidiano n -dimensional* \mathbb{R}^n é o produto cartesiano de n fatores iguais a \mathbb{R} , ou seja,

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cdots \times \mathbb{R}.$$

Os pontos de \mathbb{R}^n são as sequências de n termos reais $x = (x_1, \dots, x_n)$. Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ em \mathbb{R}^n tem-se $x = y$ se, e somente se, $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$.

Definição 4.1.1. *Dados dois conjuntos A, B com $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$, temos que o produto cartesiano $A \times B$ é o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y) tais que $x \in A$ e $y \in B$, isto é,*

$$A \times B = \{(x, y); x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Definiremos a soma e o produto, respectivamente, por $x + y$ e $\alpha \cdot x$ como sendo

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

e

$$\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

Observe que estas operações fazem de \mathbb{R}^n um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo dos reais, onde o elemento neutro para a adição é $0 = (0, \dots, 0)$ e o simétrico de $x = (x_1, \dots, x_n)$ é $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$.

A *base canônica* ou *base natural* de \mathbb{R}^n é constituída pelos vetores $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, 0, \dots, 1)$, que têm uma única coordenada não-nula, igual a 1. Desta forma, a igualdade $x = (x_1, \dots, x_n)$ significa que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

Definição 4.1.2. Chamamos por *produto interno* de x por y , denotado por $\langle x, y \rangle$, a operação que associa a cada par de vetores $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ a um número real que satisfaz as propriedades a seguir.

Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, são verificadas:

- i) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
- ii) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$;
- iii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle$;
- iv) $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle > 0$.

Neste trabalho, utilizaremos o produto interno usual de \mathbb{R}^n , dado por

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Definição 4.1.3. Uma função $|\cdot| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ é dita *norma* em \mathbb{R} se, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e sendo $|\alpha|$ o valor absoluto do número real α , tem-se:

- i) $|x + y| \leq |x| + |y|$;
- ii) $|\alpha \cdot x| = |\alpha| \cdot |x|$;
- iii) $x \neq 0 \Rightarrow |x| > 0$.

Dizemos que duas normas $|\cdot|_1$ e $|\cdot|_2$ sobre \mathbb{R}^n são equivalentes se existirem constantes reais positivas α e β tais que

$$\alpha|x|_1 \leq |x| \leq \beta|x|_2, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

O número não negativo $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ chama-se a *norma euclidiana* (ou o *comprimento*) do vetor $x \in \mathbb{R}^n$. Se $x = (x_1, \dots, x_n)$ então

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Por definição, tem-se $\langle x, x \rangle = |x|^2$, de modo que $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Também temos que dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ são *ortogonais* quando $\langle x, y \rangle = 0$, o qual denota-se $x \perp y$.

Teorema 4.1.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Dados quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se $|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y|$ se, e somente se, um dos vetores x, y é um múltiplo escalar do outro.*

A demonstração será omitida e pode ser encontrada em Lima (2012, p. 5).

A seguir, veremos algumas propriedades da norma euclidiana que serão importantes para estabelecer relações entre diferentes normas.

Em \mathbb{R}^n podemos utilizar outras duas normas quando houver necessidade. A norma do máximo, que representaremos por $|x|_M = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ e a norma da soma representada por $|x|_S = |x_1| + \dots + |x_n|$.

Ainda, temos que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, é válida a seguinte relação

$$|x|_M \leq |x| \leq |x|_S \leq n \cdot |x|_M,$$

ou seja, tais normas são equivalentes, onde $|x|$ é a norma euclidiana e, ainda, para toda norma em \mathbb{R}^n , vale a desigualdade

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Definição 4.1.4. *A distância $d(x, y)$ entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}^n$, é definida por*

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

As condições i), ii) e iii) da Definição 4.1.3, que a norma satisfaz, implicam que a distância dispõe das seguintes propriedades:

- i) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;
- ii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- iii) $x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0$.

4.1.2 Bolas e Sequências no espaço euclidiano

Definição 4.1.5. *Sejam $a \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Definimos por*

i) bola aberta de centro a e raio r o conjunto

$$B(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| < r\};$$

ii) bola fechada de centro a e raio r o conjunto

$$B[a; r] = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| \leq r\};$$

iii) esfera de centro a e raio r o conjunto

$$S[a; r] = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| = r\}.$$

Uma sequência em \mathbb{R}^n é uma aplicação $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que associa a cada número natural k um ponto $x_k \in \mathbb{R}^n$ e podemos representar a sequência por (x_k) , (x_1, \dots, x_k, \dots) ou $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Consideramos uma subsequência de (x_k) como sendo uma restrição da sequência a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{k_1, k_2, \dots, k_i, \dots\} \subset \mathbb{N}$, com $k_i < k_{i+1}$. Assim, indicamos por $(x_k)_{k \in \mathbb{N}'}$, $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ ou $(x_{k_1}, \dots, x_{k_i}, \dots)$.

Dizemos que uma sequência (x_k) é limitada quando o conjunto de seus termos é limitado em \mathbb{R}^n , ou seja, quando existe um número real $c > 0$ tal que $|x_k| \leq c$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Também temos que, um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é o limite da sequência (x_k) quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k > k_0 \Rightarrow |x_k - a| < \varepsilon,$$

isto é, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, que também pode ser denotado por $\lim_{k \in \mathbb{N}} x_k = a$ e $\lim x_k = a$.

Definição 4.1.6. *Uma sequência $(x_k) \in \mathbb{R}^n$ é dita convergente quando existe $a = \lim x_k$. Caso contrário, a sequência é divergente.*

Definição 4.1.7. *Uma sequência (x_k) é dita sequência de Cauchy quando para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$k, r > k_0 \Rightarrow |x_k - x_r| < \varepsilon.$$

A seguir, veremos alguns teoremas sobre convergência de seqüências.

Teorema 4.1.2. *Uma seqüência $(x_k) \in \mathbb{R}^n$ converge para o ponto $a = (a_1, \dots, a_n)$ se, e somente se, para cada $i = 1, \dots, n$, tem-se $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k_i} = a_i$, isto é, cada coordenada de x_k converge para a coordenada correspondente de a .*

A demonstração será omitida e pode ser encontrada em Lima (2012, p. 16).

Teorema 4.1.3 (Bolzano-Weierstrass). *Toda seqüência limitada em \mathbb{R}^n possui uma subseqüência convergente.*

A demonstração será omitida e pode ser encontrada em Lima (2012, p. 17).

Teorema 4.1.4. *Duas normas quaisquer no espaço \mathbb{R}^n são equivalentes.*

A demonstração será omitida e pode ser encontrada em Lima (2012, p. 19).

Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é dito ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, quando toda bola de centro a contém algum ponto de X , diferente de a , ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, deve existir $x \in X - \{a\}$ tal que $0 < |x - a| < \varepsilon$. Denotaremos o conjunto dos pontos de acumulação de X por X' .

Teorema 4.1.5. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$. São equivalentes:*

- i) a é ponto de acumulação de X ;*
- ii) a é limite de uma seqüência de pontos $x_k \in X - \{a\}$;*
- iii) Toda bola aberta de centro a contém uma infinidade de pontos de X .*

A demonstração será omitida e pode ser encontrada em Lima (2012, p. 21).

4.1.3 Limites e Aplicações contínuas

Nesta subseção, serão definidos conceitos importantes sobre continuidade de aplicações que são fundamentais no estudo de Superfícies Regulares.

Definição 4.1.8. *Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ e $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação de X . Diz-se que $b \in \mathbb{R}^n$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para a , se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon,$$

e denota-se,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Definição 4.1.9. *Dizemos que uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto $a \in X$ quando, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, pode-se obter $\delta > 0$ tal que*

$$x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Teorema 4.1.6. *Sejam $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : Y \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, com $f(X) \subset Y$. Se f é contínua no ponto $a \in X$ e g é contínua no ponto $b = f(a)$, então a aplicação $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ é contínua no ponto a .*

Demonstração. Por hipótese, como g é contínua no ponto $b = f(a)$, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que

$$y \in Y, |y - f(a)| < \eta \Rightarrow |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon. \quad (4.1.1)$$

Por outro lado, pela continuidade de f , pode-se obter $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \eta. \quad (4.1.2)$$

Logo, de (4.1.1), (4.1.2) e tomando $y = f(x)$, obtemos

$$x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon.$$

Portanto, a aplicação $g \circ f$ é contínua no ponto a . □

Teorema 4.1.7. *Uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, as funções $f_1, \dots, f_n : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, denominadas por funções coordenadas, são contínuas nesse ponto.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.1.6, temos que a continuidade de f implica a continuidade das f_i , tomando g como π_i , projeção na i -ésima coordenada. Reciprocamente, se cada $f_i : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto $a \in X$, dado $\varepsilon > 0$, existem números $\delta_1, \dots, \delta_n > 0$ tais que

$$x \in X, |x - a| < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon.$$

Assim, tomando a norma do máximo em \mathbb{R}^n e $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$, temos

$$x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = \max\{|f_i(x) - f_i(a)|; 1 \leq i \leq n\} < \varepsilon.$$

Portanto, f é contínua no ponto a . □

Teorema 4.1.8. *Uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, para toda sequência de pontos $x_k \in X$ com $\lim x_k = a$, tem-se $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)$.*

A demonstração será omitida e pode ser encontrada em Lima (2012, p. 27).

Definição 4.1.10. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que a aplicação $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo se f é uma bijeção contínua, cuja inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ também é contínua.*

4.1.4 Conjuntos Abertos

Seja $a \in X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que a é ponto interior a X quando é centro de alguma bola aberta contida em X , isto é, quando existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow x \in X$. O interior de X , representado por $\text{int}X$, é formado pelos pontos interiores a X . Quando $x \in \text{int}V$, dizemos que o conjunto V é uma vizinhança do ponto x .

Definição 4.1.11. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se aberto quando todos os seus pontos são interiores, ou seja, $\text{int}X = X$. Isso equivale a dizer que, para cada $x \in X$ existe $\delta > 0$ tal que $B(x; \delta) \subset X$.*

Teorema 4.1.9. *Seja $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação, f é contínua se, e somente se, a imagem inversa $f^{-1}(A)$ de todo aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ seja um conjunto aberto em X .*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha f contínua e A um aberto de \mathbb{R}^n . Mostraremos que $f^{-1}(A)$ é um aberto de X .

O caso $f^{-1}(A) = \emptyset$ é trivial. Deste modo, supondo que existe $a \in f^{-1}(A)$, então $f(a) \in A$. Como A é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(a); \varepsilon) \subset A$. Ainda, como f é contínua, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$, ou seja, $x \in X \cap B(a; \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(a); \varepsilon)$. Assim, $f(X \cap B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon) \subset A$, donde $B(a; \delta) \cap X \subset f^{-1}(A)$. Logo, $f^{-1}(A)$ é aberto em X .

(\Leftarrow) Dado $a \in X$, mostraremos que f é contínua, ou seja, para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Por hipótese, tomemos $A = B(f(a); \varepsilon)$, temos que $f^{-1}(A)$ é um aberto de X . Note que $a \in f^{-1}(A)$, então existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \cap X \subset f^{-1}(A)$, ou seja, $x \in X \cap B(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in A$. Logo, f é contínua. \square

A seguir, veremos alguns exemplos sobre conjuntos abertos.

Exemplo 4.1.1. Se $A \subset \mathbb{R}^m$ e $B \subset \mathbb{R}^n$ são abertos, então o produto cartesiano $A \times B \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ é aberto.

Tomando $(x, y) \in A \times B$, devemos mostrar que existe $r > 0$ tal que $B_M((x, y); r) \subset A \times B$, onde $B_M((x, y); r)$ é uma bola aberta, conforme a Definição 4.1.5, com a norma do máximo. De fato, como A é aberto, existe $r_1 > 0$ tal que $B_M(x; r_1) \subset A$. Da mesma forma, como B é aberto, existe $r_2 > 0$ tal que $B_M(y; r_2) \subset B$.

Agora, tome $r = \min\{r_1, r_2\}$. Desta forma, temos $B_M(x; r) \subset A$ e $B_M(y; r) \subset B$. Assim, $B_M(x; r) \times B_M(y; r) \subset A \times B$ e então, $B_M((x, y); r) \subset A \times B$, como queríamos.

Portanto, $A \times B \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ é aberto.

Exemplo 4.1.2. Cada uma das m projeções $\pi_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, é uma aplicação aberta.

Tome um aberto qualquer $A \subset \mathbb{R}^m$, devemos mostrar que $\pi(A)$ é aberto.

Seja $x_j \in \pi(A)$ qualquer, temos que $x_j = \pi_j(x)$, para algum $x \in A$. Como A é aberto, existe $r > 0$ tal que $B_M(x; r) \subset A$. Porém, $B_M(x; r) = (x_1 - r, x_1 + r) \times \dots \times$

$\times(x_n - r, x_n + r)$, onde $(x_i - r, x_i + r)$ é um intervalo de \mathbb{R} , $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Pelo exemplo 4.1.1, temos que, $B_M(x; r) \subset A$ e $\pi(B_M(x; r)) \subset \pi(A)$.

Assim, $\pi(A)$ é aberto.

4.1.5 Caminhos Diferenciáveis

Seja o intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Um caminho em \mathbb{R}^n é uma aplicação $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, se para cada $t \in I$, temos $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$, onde as n funções $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Para simplificar a notação, utilizaremos I para denotar o intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$.

Temos que o caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínuo no ponto $a \in I$ se, e somente se, cada uma das suas funções coordenadas é contínua em a . Isso pode ser verificado de modo análogo ao Teorema 4.1.7.

Definição 4.1.12. *Definimos o vetor velocidade do caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, no ponto $a \in I$, como sendo*

$$f'(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t},$$

quando tal limite existe.

Definição 4.1.13. *O caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dito diferenciável quando existe $f'(a)$ para todo $a \in I$.*

Note que o caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ possui vetor tangente no ponto a se, e somente se, cada uma de suas funções coordenadas f_i possui derivada nesse ponto. Assim, $f'(a) = (f'_1(a), \dots, f'_n(a))$.

Proposição 4.1.1. *O caminho $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável se, e somente se, cada uma de suas funções coordenadas $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real diferenciável no intervalo I .*

A demonstração será omitida e pode ser encontrada em Lima (2013, p. 41).

Sejam, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ caminhos diferenciáveis, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $|f(t)| = \sqrt{\langle f(t), f(t) \rangle}$, valem as seguintes regras de derivação:

- i) $\frac{d}{dt}[f(t) + g(t)] = f'(t) + g'(t);$
- ii) $\frac{d}{dt}[\alpha(t) \cdot f(t)] = \alpha'(t)f(t) + \alpha(t)f'(t);$
- iii) $\frac{d}{dt}\langle f(t), g(t) \rangle = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle;$
- iv) $\frac{d}{dt}|f(t)| = \frac{\langle f(t), f'(t) \rangle}{|f(t)|},$ se $f(t) \neq 0.$

Note que quando f' existe e é contínuo, diz-se que o caminho f é de classe C^1 . Analogamente, quando f'' é contínuo, o caminho f é de classe C^2 . Desta forma, para todo inteiro $k > 1$, quando $f^{(k)}$ for de classe C^1 , temos que f é de classe C^{k+1} . Dizemos que f é de classe C^∞ , quando existirem as derivadas de todas as ordens do caminho f .

A Regra da Cadeia é uma relação da derivada de uma função composta com as derivadas destas funções. Tal relação pode ser vista no Teorema a seguir.

Teorema 4.1.10 (Regra da Cadeia). *Sejam $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real diferenciável no ponto $a \in I$ e $f : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $\varphi(I) \subset J$, um caminho diferenciável no ponto $b = \varphi(a)$. Então, o caminho $f \circ \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto a e, ainda,*

$$(f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a) \cdot f'(\varphi(a)).$$

A demonstração será omitida e pode ser encontrada em Lima (2012, p. 87).

4.1.6 Cálculo com funções reais de n variáveis

Para o entendimento do conceito de Superfícies Regulares e da Geometria Diferencial em geral, noções de Cálculo em \mathbb{R}^n são muito importantes. Para tal, estudaremos alguns tópicos de derivadas parciais, derivadas direcionais, funções diferenciáveis, gradiente de uma função diferenciável e diferenciabilidade de uma aplicação.

Definição 4.1.14. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. A i -ésima derivada parcial de f no ponto $a \in U$ (onde $1 \leq i \leq n$) é o limite*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}, \quad (4.1.3)$$

quando esse limite existe.

Como U é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $a + te_i \in U$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Assim, está bem definido o caminho retilíneo $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ com $\lambda(t) = a + te_i$. A Definição 4.1.14, diz que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (f \circ \lambda)'(0)$, ou seja, a i -ésima derivada parcial de f no ponto a é a derivada, no ponto $t = 0$, da função $f \circ \lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$.

A função f , quando restrita ao segmento de reta aberto $J = (a - \varepsilon e_i, a + \varepsilon e_i)$, torna-se uma função real $f(a + te_i)$, da variável real t e $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ é a derivada desta função no ponto $t = 0$. Note que, a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é a derivada de f em relação a sua i -ésima variável e nos dá informações sobre o crescimento de f ao longo desse segmento.

Definição 4.1.15. *Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, $a \in U$ e $v \in \mathbb{R}^n$. A derivada direcional de f no ponto a , de acordo com o vetor v , é o limite*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t},$$

quando esse existe.

A derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ é a derivada, no ponto $t = 0$, da função $f \circ \lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o caminho retilíneo, $\lambda(t) = a + tv$, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, onde $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno tal que a imagem de λ esteja contida em U .

Teorema 4.1.11 (Teorema do Valor Médio). *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Suponhamos que o segmento de reta $[a, a + v]$ esteja contido em U , que a restrição $f|_{[a, a + v]}$ seja contínua e que exista a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$, segundo v , em todo ponto $x \in (a, a + v)$. Então, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que $f(a + v) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a + \theta v)$.*

A demonstração será omitida e pode ser encontrada em Lima (2012, p. 123).

Corolário 4.1.1. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e conexo. Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ possui derivadas direcionais em todo ponto $x \in U$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = 0$ para qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^n$ e qualquer $x \in U$, então f é constante.*

A demonstração será omitida e pode ser encontrada em Lima (2012, p. 123).

Definição 4.1.16. *Dada $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in U$. Temos que f é diferenciável no ponto a quando existirem constantes A_1, \dots, A_n tais que, para todo vetor*

$v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, com $a + v \in U$, se tenha

$$f(a + v) = f(a) + A_1 \cdot \alpha_1 + \dots + A_n \cdot \alpha_n + r(v), \text{ onde } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

A função f é dita diferenciável, quando for diferenciável em todos os pontos de U . Se f é diferenciável no ponto a então, tomando $v = te_i$, ou seja, $\alpha_j = 0$ se $j \neq i$ e $\alpha = t$, se $j = i$, segue que,

$$\begin{aligned} f(a + v) - f(a) &= A_i \cdot \alpha_i + r(v) \\ \Rightarrow f(a + te_i) - f(a) &= A_i \cdot t + r(te_i) \\ \Rightarrow \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} &= A_i \pm \frac{r(te_i)}{|te_i|}. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Aplicando o limite com $t \rightarrow 0$ em (4.1.4) e utilizando (4.1.3) temos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} A_i \pm \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(te_i)}{|te_i|},$$

como $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(te_i)}{|te_i|} = 0$, obtemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = A_i,$$

ou seja, existe cada derivada parcial de f no ponto a .

Teorema 4.1.12 (Regra da Cadeia). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(U) \subset V$ e cada função coordenada $f_k : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $a \in U$. Ainda, seja $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $b = f(a)$. Então, a função composta $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto a e suas derivadas parciais são*

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_k}(b) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a).$$

A demonstração será omitida e pode ser encontrada em Lima (2012, p. 126).

Corolário 4.1.2. *Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto b e se $\lambda : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ é um caminho diferenciável no ponto a , com $\lambda(a) = b$ e $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$, então a função composta $f \circ \lambda : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto a , e tem-se*

$$(f \circ \lambda)'(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(b) \cdot \lambda'_i(a).$$

Definição 4.1.17. Dada a função diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, o gradiente de f no ponto $a \in U$ é o vetor

$$\text{grad } f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Corolário 4.1.3. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Dado $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, se $\lambda : (-\delta, \delta) \rightarrow U$ é qualquer caminho diferenciável tal que $\lambda(0) = a \in U$ e $\lambda'(0) = v$, tem-se

$$(f \circ \lambda)'(0) = \langle \text{grad } f(a), v \rangle = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \alpha_i.$$

A demonstração será omitida e pode ser encontrada em Lima (2013, p. 61).

Definição 4.1.18. Dadas $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e c um número real, diz-se que o ponto $x \in U$ está no nível c , em relação a f , quando $f(x) = c$. Chama-se superfície de nível c da função f , o conjunto dos pontos de U que estão no nível c , ou seja, a imagem inversa $f^{-1}(c)$.

Fixado $a \in U$ e supondo $\text{grad } f(a) \neq 0$. Valem as seguintes propriedades do gradiente:

- i) O gradiente aponta para a direção em que f é crescente;
- ii) A direção do gradiente é a de crescimento mais rápido, em relação às outras em que f também cresce;
- iii) O gradiente de f no ponto a é perpendicular à superfície de nível de f que passa por esse ponto.

Definição 4.1.19. A aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, diz-se diferenciável no ponto $a \in U$ quando existe uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(a + v) - f(a) = T \cdot v + r(v),$$

onde $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$ e $v, a + v \in U$.

Tal aplicação T pode ser denotada como $df_a : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e é chamada por *diferencial* de f no ponto a .

Proposição 4.1.2. *Toda aplicação diferenciável num ponto é contínua nesse ponto.*

A demonstração será omitida e pode ser encontrada em Cipolatti (2018, p. 70).

A aplicação linear $df_a : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ possui, em relação às bases canônicas de \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n , uma matriz $n \times m$ chamada a *matriz jacobiana* de f no ponto a , denotada $J_f(a)$, dada por

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}.$$

Teorema 4.1.13. *A aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $a \in U$ se, e somente se, suas funções-coordenadas $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis nesse ponto.*

A demonstração será omitida e pode ser encontrada em Lima (2012, p. 246).

Corolário 4.1.4. *A aplicação $f = (g, h) : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, dada por $f(x) = (g(x), h(x))$, é diferenciável no ponto $a \in U$ se, e somente se, cada uma das aplicações coordenadas $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ o é. Em caso afirmativo, $f'(a) = (g'(a), h'(a)) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.*

A demonstração será omitida e pode ser encontrada em Lima (2012, p. 246).

Definição 4.1.20. *Uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se diferenciável no aberto U quando é diferenciável em todos os pontos de U . Neste caso, fica definida a aplicação derivada $f' : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, que associa a cada ponto $x \in U$ a transformação linear $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, derivada de f naquele ponto.*

Definição 4.1.21. *Definimos, para cada $v \in \mathbb{R}^m$, a aplicação $\frac{\partial f}{\partial v} : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, cujo valor num ponto $x \in U$ é a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = f'(x) \cdot v$.*

Teorema 4.1.14. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) f é diferenciável e a aplicação derivada $f' : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ é contínua;*

- ii) As funções-coordenada $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ da aplicação f possuem derivadas parciais contínuas $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : U \rightarrow \mathbb{R}$;
- iii) Para cada $v \in \mathbb{R}^m$, existe a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ em qualquer ponto $x \in U$ e a aplicação $\frac{\partial f}{\partial v} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua.

A demonstração será omitida e pode ser encontrada em Lima (2012, p. 247).

4.1.7 O Teorema da Aplicação Inversa

Um dos teoremas mais importantes do Cálculo Diferencial é o chamado Teorema da Aplicação Inversa, ele será muito útil no estudo de Superfícies Regulares.

Definição 4.1.22. *Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^m$ abertos. Um difeomorfismo $f : U \rightarrow V$ é uma bijeção diferenciável cuja inversa é diferenciável. Em particular, f é um homeomorfismo entre U e V .*

Quando o difeomorfismo f é de classe C^k , seu inverso também o é. Ainda, é imediato que a inversa de um difeomorfismo é um difeomorfismo e que a composta de difeomorfismos é um difeomorfismo.

Proposição 4.1.3. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ um difeomorfismo. Então, para todo $x \in U$, a derivada $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ é um isomorfismo. Em particular, tem-se $m = n$.*

A demonstração será omitida e pode ser encontrada em Lima (2015, p. 200).

Exemplo 4.1.3. *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ a bola aberta de centro na origem e raio 1. A aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida por $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \langle x, x \rangle}}$, é um difeomorfismo de classe C^∞ , cuja inversa $g : \mathbb{R}^m \rightarrow U$ é dado por $g(y) = \frac{y}{\sqrt{1 + \langle y, y \rangle}}$.*

Definição 4.1.23. *Uma aplicação diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um difeomorfismo local quando para cada $x \in U$ existe um aberto V_x , com $x \in V_x \subset U$, tal que a restrição de f a V_x é um difeomorfismo sobre um aberto $W_x \subset \mathbb{R}^m$.*

Proposição 4.1.4. *Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um difeomorfismo local de U sobre $V = f(U)$ então, para cada $x \in U$, a derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo.*

A demonstração será omitida e pode ser encontrada em Lima (2012, p. 277).

O teorema da aplicação inversa estabelecerá a recíproca, no caso em que $f \in C^k (k \geq 1)$.

Veremos a seguir, uma versão do teorema da aplicação inversa na qual supõe-se a aplicação diferenciável em apenas um ponto. Na versão clássica do teorema, que decorre imediatamente depois desta, supõe-se que a aplicação seja pelo menos de classe C^1 .

Lema 4.1.1 (Diferenciabilidade do homeomorfismo inverso). *Seja $f : U \rightarrow V$ um homeomorfismo entre os abertos $U, V \subset \mathbb{R}^m$. Se f é diferenciável num ponto $a \in U$ e a derivada $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, então o homeomorfismo inverso $f^{-1} : V \rightarrow U$ é diferenciável no ponto $b = f(a)$. Se f é fortemente diferenciável no ponto a , então f^{-1} é fortemente diferenciável no ponto b .*

A demonstração será omitida e pode ser encontrada em Lima (2012, p. 281).

Teorema 4.1.15 (Teorema da Aplicação Inversa). *Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, fortemente diferenciável no ponto $a \in U$ e $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um isomorfismo. Então, f é um homeomorfismo de um aberto V contendo a sobre um aberto W contendo $f(a)$. O homeomorfismo inverso $f^{-1} : W \rightarrow V$ é fortemente diferenciável no ponto $f(a)$ e sua derivada nesse ponto é $[f'(a)]^{-1}$. Se $f \in C^k (k \geq 1)$ então V pode ser tomado de modo que f seja um difeomorfismo de V sobre W .*

A demonstração será omitida e pode ser encontrada em Lima (2012, p. 282).

Corolário 4.1.5. *Uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, de classe C^k no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, (onde $1 \leq k \leq \infty$), é um difeomorfismo local se, e somente se, para todo $x \in U$, a derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo (isto é, $\det Jf(x) \neq 0$).*

Definição 4.1.24. *Uma imersão do aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ no espaço euclidiano \mathbb{R}^n é uma aplicação diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, para cada $x \in U$, a derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear injetiva. Evidentemente, isto só pode ocorrer quando $m \leq n$.*

A aplicação composta de duas imersões é ainda uma imersão.

5 SUPERFÍCIES REGULARES

De acordo com Carmo (2010, p. 61) e Lima, R. F. (2016, p. 33), sem grande rigor, podemos dizer que uma superfície regular em \mathbb{R}^3 é formada tomando pedaços do plano, deformando-os e colando-os suavemente entre si, de modo que a superfície resultante não tenha pontas, arestas ou auto-interseções. Assim, tem sentido definir em cada um de seus pontos um plano tangente. Definindo o conjunto dessa forma e com a existência do plano tangente, as noções do Cálculo podem ser estendidas às superfícies regulares.

Os teoremas, definições e proposições aqui apresentados foram extraídos e/ou adaptados de Carmo (2010) e Tenenblat, K. (2008).

5.1 Superfícies Regulares; Imagens inversas de valores regulares

Nesta seção vamos introduzir a definição de uma superfície regular em \mathbb{R}^3 , bem como algumas proposições e exemplos.

Definição 5.1.1. *Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular, se para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $\varphi : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que (ver Figura 1)*

i) φ é diferenciável, isto é, escrevendo

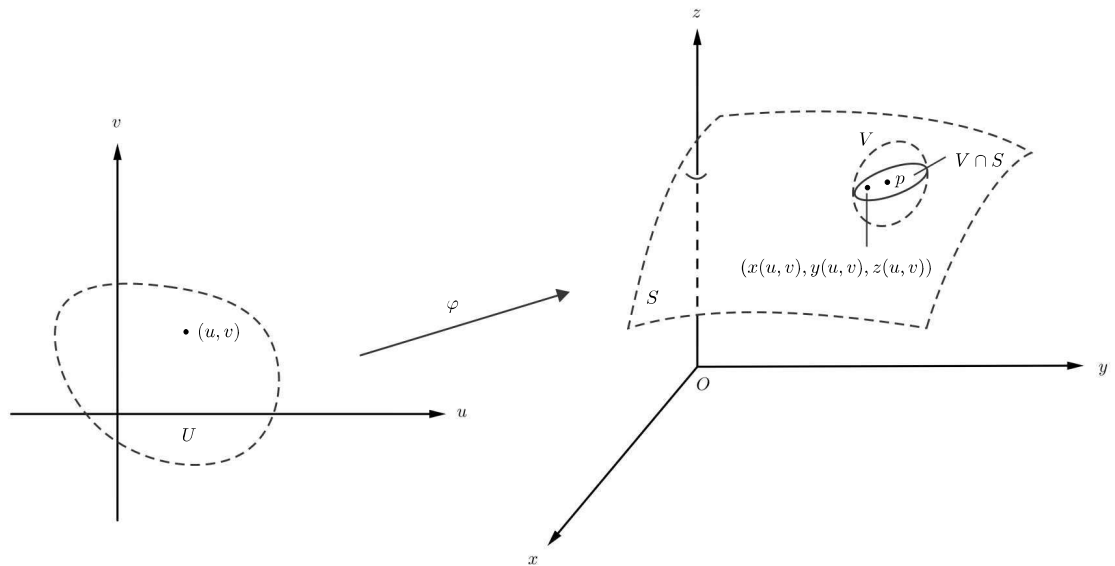
$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \text{ onde } (u, v) \in U,$$

temos que as funções $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U ;

ii) φ é um homeomorfismo, ou seja, existe a inversa $\varphi^{-1} : V \cap S \rightarrow U$, que também é contínua;

iii) (Condição de regularidade) para todo $q \in U$, a diferencial $d\varphi_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva, ou seja, φ é uma imersão.

Figura 1 – Definição de Superfície Regular.



Fonte: Elaborado pela autora.

A seguir, vamos mostrar que a condição iii) da Definição 5.1.1 pode ser expressa de outra maneira. Mas, para isso, precisamos da definição de dependência e independência linear, que segue abaixo.

Definição 5.1.2. *Sejam V um espaço vetorial e $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é linearmente independente (LI), ou que os vetores v_1, v_2, \dots, v_n são LI, se a equação*

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$$

implica que $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. Caso contrário, dizemos que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é linearmente dependente (LD), ou que os vetores v_1, v_2, \dots, v_n são LD.

Note que a aplicação φ é dita uma parametrização de S na vizinhança de $p \in S$ se satisfaz os itens i) e ii) da Definição 5.1.1. A condição iii) pode ser representada calculando a matriz da aplicação $d\varphi_q$ nas bases canônicas $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$, onde $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ com coordenadas $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ e $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 0)$ e $f_3 = (0, 0, 1)$, onde $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}^3$ com coordenadas (x, y, z) .

Observe que considerando $q = \varphi^{-1}(p)$, tem-se que $d\varphi_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva. Desta forma, pondo $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $x, y, z : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ as funções

coordenadas de φ , temos que

$$d\varphi_q(e_1) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(q) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(q), \frac{\partial y}{\partial u}(q), \frac{\partial z}{\partial u}(q) \right),$$

$$d\varphi_q(e_2) = \frac{\partial\varphi}{\partial v}(q) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(q), \frac{\partial y}{\partial v}(q), \frac{\partial z}{\partial v}(q) \right)$$

e

$$d\varphi_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}(q) & \frac{\partial\varphi}{\partial v}(q) \end{bmatrix}.$$

Então,

$$d\varphi_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{bmatrix}.$$

Agora, a condição iii) pode ser expressa exigindo-se que os vetores coluna $\left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial u}(q), \frac{\partial\varphi}{\partial v}(q) \right\}$ sejam linearmente independentes, ou, de forma equivalente, que um dos menores $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, $\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}$ ou $\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}$ seja diferente de zero em q , ou ainda, que $d\varphi_q$ tenha posto 2.

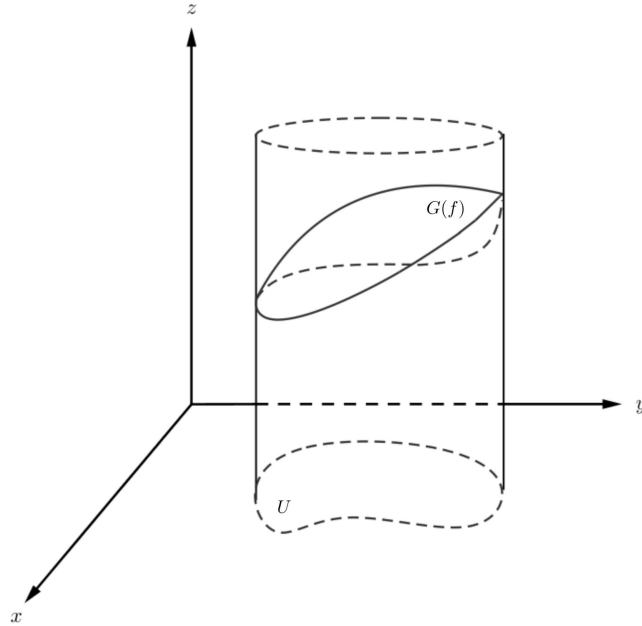
$$\text{Observe que } \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

A condição de diferenciabilidade em i) é bastante natural se desejamos tratar de geometria diferencial em S . Já a injetividade na condição ii) tem como propósito excluir a possibilidade de auto-interseções em superfícies regulares.

Vejam os dois exemplos de superfícies regulares.

Exemplo 5.1.1. Gráficos de aplicações diferenciáveis $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde U é aberto (ver Figura 2).

Figura 2 – Gráfico de uma Aplicação Diferenciável.



Fonte: Elaborado pela autora.

De fato, ponha $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow G(f) \subset \mathbb{R}^3$ como sendo $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$. Assim, de acordo com a definição de superfície regular, temos que:

- i) φ é diferenciável, pois f é diferenciável;
- ii) φ é um homeomorfismo. De fato, temos que a aplicação projeção $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\pi(x, y, z) = (x, y)$ é contínua e como $\varphi^{-1} = \pi|_{G(f)}$ é a restrição de uma aplicação contínua, obtemos que também é contínua;
- iii) $d\varphi_q$ é injetiva, $\forall q \in U$.

De fato, $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$ e, portanto, $\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right\}_q$ é linearmente independente.

Exemplo 5.1.2. A esfera unitária $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é uma superfície regular.

Primeiro, observamos que o conjunto de seus pontos cuja coordenada z é positiva é o gráfico da aplicação $\varphi_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\varphi_1(x, y) = \left(x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}\right), (x, y) \in U,$$

onde $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ e $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$. Note que φ_1 é uma parametrização de S^2 , ou seja, $\varphi_1(U)$ é a parte (aberta) de S^2 acima do plano xy .

Observe que

- i) como as funções coordenadas são diferenciáveis, isto é, possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens, segue que φ_1 é diferenciável;
- ii) sendo φ_1 uma aplicação bijetora e que $\varphi_1^{-1} = \pi|_{\varphi_1(U)}$, ou seja, φ_1^{-1} é a restrição da projeção $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\pi(x, y, z) = (x, y)$ ao conjunto $\varphi_1(U)$. Como a aplicação projeção é contínua, temos que φ_1^{-1} é contínua em $\varphi_1(U)$;
- iii) $d\varphi_{1,q}$ é injetiva, $\forall q \in U$.

De fato, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \left(1, 0, -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \left(0, 1, -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$, e, portanto, $\left\{\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right\}_q$ é linearmente independente.

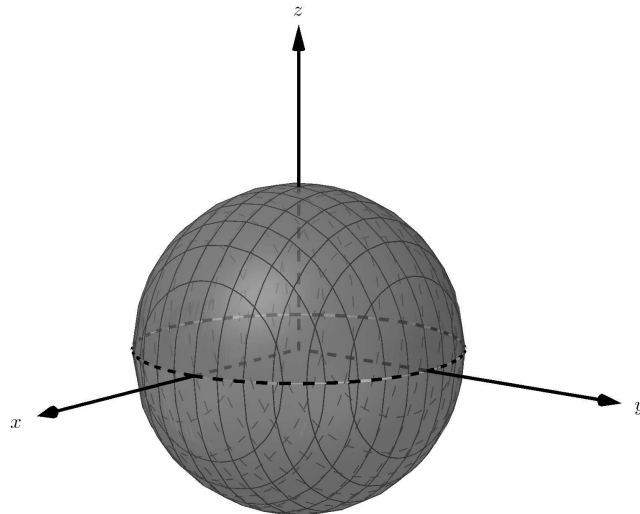
Agora, cobriremos a esfera inteira utilizando parametrizações similares. Definimos $\varphi_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$\varphi_2(x, y) = \left(x, y, -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}\right), (x, y) \in U.$$

Desse modo, teremos que φ_2 também é uma parametrização e observamos que $\varphi_1(U) \cup \varphi_2(U)$ cobre a esfera menos o equador

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, z = 0\}.$$

Figura 3 – Parametrizações φ_1 e φ_2 da esfera S^2 .



Fonte: Elaborado pela autora.

Analogamente, utilizando os planos xz e yz , definimos as seguintes parametrizações

$$\varphi_3(x, z) = \left(x, +\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z \right),$$

$$\varphi_4(x, z) = \left(x, -\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z \right),$$

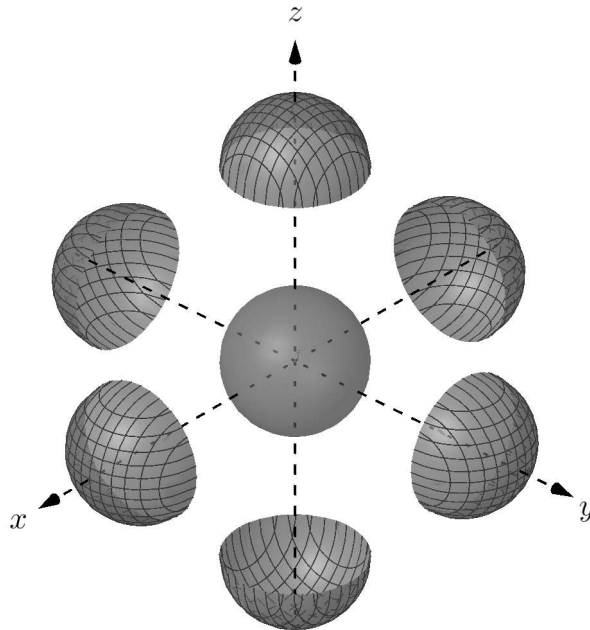
$$\varphi_5(y, z) = \left(+\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z \right),$$

$$\varphi_6(y, z) = \left(-\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z \right),$$

que, juntamente com φ_1 e φ_2 , cobrem inteiramente S^2 (ver Figura 4).

Mostramos assim que S^2 é uma superfície regular.

Figura 4 – Parametrizações locais da esfera S^2 .



Fonte: Elaborado pela autora.

Note que, mostrar a partir da definição, que um dado subconjunto de \mathbb{R}^3 é uma superfície regular, pode ser um tanto cansativo. Assim, apresentaremos a seguir duas proposições que simplificarão essa tarefa.

Proposição 5.1.1. *Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, então o gráfico de f , isto é, o subconjunto de \mathbb{R}^3 dado por $(x, y, f(x, y))$ para $(x, y) \in U$, é uma superfície regular.*

Demonstração. Esta Proposição é a formalização do Exemplo 5.1.1 e portanto, a demonstração é análoga. \square

Antes de enunciarmos a Proposição 5.1.2, precisaremos da seguinte definição.

Definição 5.1.3. *Dada uma aplicação diferenciável $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida em um conjunto aberto U , dizemos que $p \in U$ é um ponto crítico de F se a diferencial $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ não é uma aplicação sobrejetiva. A imagem $F(p) \in \mathbb{R}^m$ de um ponto crítico é chamado um valor crítico de F e um ponto de \mathbb{R}^m que não é um valor crítico é chamado um valor regular de F .*

A terminologia é motivada pelo caso particular em que $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real de uma variável real. Um ponto $x_0 \in U$ é crítico se $f'(x_0) = 0$, isto é, se a diferencial df_{x_0} leva todos os vetores em \mathbb{R} no vetor nulo. Note que qualquer ponto $a \notin f(U)$ é um valor regular de f .

Se $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então df_p aplicada ao vetor $(1, 0, 0)$ é obtida calculando-se o vetor tangente em $f(p)$ à curva

$$x \longrightarrow f(x + x_0, y_0, z_0),$$

onde $P = (x_0, y_0, z_0)$.

Decorre daí que

$$df_p(1, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = f_x$$

e, de forma análoga, que

$$df_p(0, 1, 0) = f_y, \quad df_p(0, 0, 1) = f_z.$$

Assim, temos que a matriz de df_p na base $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ é dada por

$$df_p = (f_x, f_y, f_z).$$

Note que, nesse caso, dizer que df_p não é sobrejetiva é equivalente a dizer que $f_x = f_y = f_z = 0$ em p . Portanto, $a \in f(U)$ é um valor regular de $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ se e, somente se, f_x , f_y e f_z não se anulam simultaneamente em qualquer ponto da imagem inversa

$$f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in U; f(x, y, z) = a\}.$$

Proposição 5.1.2. *Se $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $a \in f(U)$ é um valor regular de f , então $f^{-1}(a)$ é uma superfície regular em \mathbb{R}^3 .*

Demonstração. Seja $S = f^{-1}(a)$. Como a é valor regular para f , temos que $S \neq \emptyset$ e para todo $p \in S$, podemos admitir que alguma das derivadas parciais de f é não nula, ou seja, $\det(df_p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right) \neq \vec{0}$. Supomos sem perda de generalidade, que $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$.

Agora, definimos uma aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

$$F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)).$$

Note que $S = f^{-1}(a) \subset U$ e $p \in U$. Indicamos por (u, v, t) as coordenadas de um ponto do \mathbb{R}^3 onde F toma seus valores.

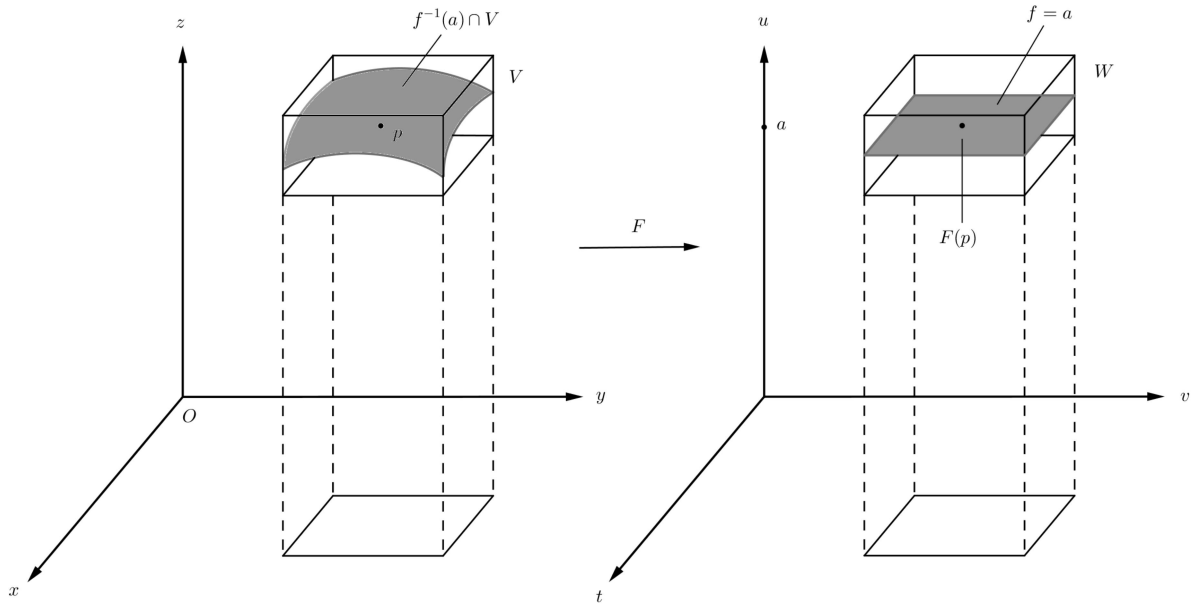
Observe que a diferencial de F em p é dada por

$$dF_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(p) & \frac{\partial f}{\partial y}(p) & \frac{\partial f}{\partial z}(p) \end{bmatrix}$$

e que $\det(dF_p) = \frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$.

Desta forma, aplicando o teorema da função inversa, temos que existem abertos V e W de \mathbb{R}^3 , com $p \in V$ e $F(p) \in W$, tais que $F : V \rightarrow W$ é inversível e a inversa $F^{-1} : W \rightarrow V$ é diferenciável, ou seja, a aplicação F é um difeomorfismo (ver Figura 5).

Figura 5 – Proposição 5.1.2.



Fonte: Elaborado pela autora.

Segue que as funções coordenadas $x = u$, $y = v$ e $z = g(u, v, t)$, com $(u, v, t) \in W$ de F^{-1} são diferenciáveis. Em particular, $z = g(u, v, a) = \pi(x, y)$ é uma função diferenciável definida na projeção de V sobre o plano xy . Como

$$F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, t); t = a\},$$

concluimos que o gráfico de π é $f^{-1}(a) \cap V$. Pela Proposição 5.1.1, $f^{-1}(a) \cap V$ é uma vizinhança coordenada de p . Consequentemente, todo $p \in f^{-1}(a)$ pode ser coberto por uma vizinhança coordenada, e podemos concluir que $f^{-1}(a)$ é uma superfície regular. \square

Exemplo 5.1.3. O elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ é uma superfície regular.

De fato, definindo uma função diferenciável

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

podemos notar que 0 é um valor regular de f , pois as derivadas parciais $f_x = \frac{2x}{a^2}$, $f_y = \frac{2y}{b^2}$ e $f_z = \frac{2z}{c^2}$ se anulam simultaneamente apenas no ponto $(0, 0, 0)$, o qual não pertence a $f^{-1}(0)$.

Portanto, pela Proposição 5.1.2, o elipsóide dado por $S = f^{-1}(0)$ é uma superfície regular.

Observação 5.1.1. Note que, a ser valor regular para $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, não é condição necessária para que $S = F^{-1}(a)$ seja superfície regular.

Exemplo 5.1.4. (Superfícies de Revolução). Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ o conjunto obtido ao girarmos uma curva regular plana C em torno de um eixo plano que não encontra esta curva. Vamos considerar o plano xz como o plano da curva e o eixo Oz como o eixo de rotação. Tome

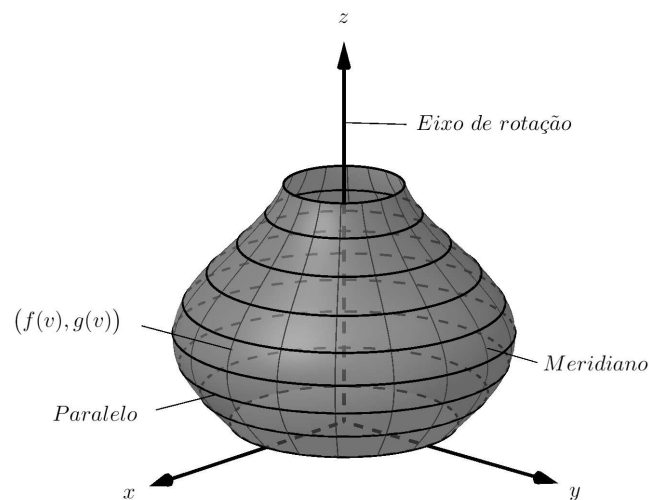
$$x = f(v), z = g(v), a < v < b, f(v) > 0,$$

uma parametrização para C e denote por u o ângulo de rotação em torno do eixo Oz . Assim, obtemos a seguinte aplicação

$$\varphi(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$$

do conjunto aberto $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, a < v < b\}$ em S (ver Figura 6).

Figura 6 – Uma Superfície de Revolução.



Fonte: Elaborado pela autora.

Na sequência veremos que φ satisfaz as condições para uma parametrização na definição de uma superfície regular. Note que S pode ser inteiramente coberta por parametrizações similares. Desta forma segue que S é uma superfície regular, chamada *superfície de revolução*. Também temos que a curva C é dita *curva geratriz* de S e o eixo Oz é o *eixo de rotação* de S . Os círculos descritos pelos pontos de C são chamados de *paralelos* de S , e as várias posições de C sobre S são os *meridianos* de S .

Para mostrar que φ é uma parametrização de S precisamos verificar as condições i), ii) e iii) da Definição 5.1.1:

i) φ é diferenciável, pois suas funções coordenadas possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U ;

ii) Primeiramente, vamos mostrar que φ é injetiva. De fato, como $(f(v), 0, g(v))$ é uma parametrização de C , dados z e $x^2 + y^2 = (f(v))^2$, podemos determinar v de maneira única. Logo, φ é injetiva.

Observamos que, novamente por $(f(v), 0, g(v))$ ser uma parametrização de C , v é uma função contínua de z e de $\sqrt{x^2 + y^2}$, e conseqüentemente, uma função contínua de (x, y, z) .

Para provar que φ^{-1} é contínua, resta mostrar que u é uma função contínua de (x, y, z) . Como $f(v) \neq 0$ e se $u \neq \pi$, temos que

$$\begin{aligned} \tan \frac{u}{2} &= \frac{\sin \frac{u}{2}}{\cos \frac{u}{2}} = \frac{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}}{2 \cos^2 \frac{u}{2}} = \frac{\sin u}{1 + \cos u} \\ &= \frac{\frac{y}{f(v)}}{1 + \frac{x}{f(v)}} = \frac{\frac{y}{f(v)}}{\frac{f(v) + x}{f(v)}} = \frac{y}{f(v) + x} \\ &= \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Logo, temos que

$$u = 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Assim, se $u \neq \pi$, u é uma função contínua de (x, y, z) . Isso mostra que φ^{-1} é contínua.

iii) $d\varphi_q$ é injetiva, $\forall q \in U$.

De fato, $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = (-f(v) \sin u, f(v) \cos u, 0)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = (f'(v) \cos u, f'(v) \sin u, g'(v))$, e, portanto, $\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\}_q$ é linearmente independente.

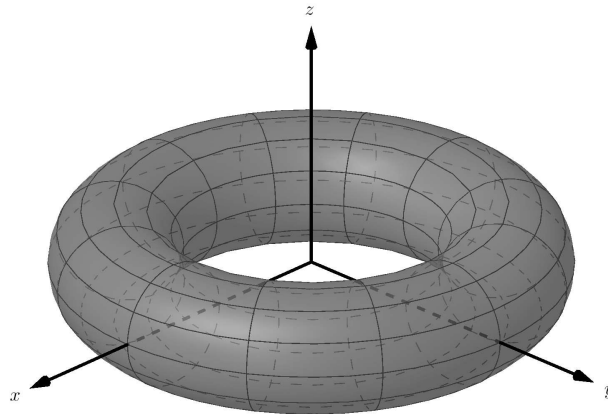
Exemplo 5.1.5. Seja $\alpha(u) = (a + r \cos u, 0, r \sin u)$, $u \in \mathbb{R}$ e $0 < r < a$, a curva que descreve a circunferência contida no plano xz , centrada no ponto $(a, 0, 0)$, de raio r . A

rotação de α em torno do eixo Oz gera a superfície de rotação

$$\varphi(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u),$$

$(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $0 < u < 2\pi$ e $0 < v < 2\pi$, que descreve o toro T (ver Figura 7). Assim, pelo Exemplo 5.1.4 segue que o toro é uma superfície regular.

Figura 7 – Toro.



Fonte: Elaborado pela autora.

Note que, a Proposição 5.1.2 e o Exemplo 5.1.4 são “ferramentas” para a criação de Superfícies Regulares.

Definição 5.1.4. *Uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é conexa se quaisquer de dois de seus pontos podem ser ligados por uma curva contínua contida em S .*

Note que os exemplos de superfícies regulares que apresentamos até agora são conjuntos conexos de \mathbb{R}^3 . Entretanto, na definição de superfície regular, não fizemos nenhuma restrição sobre a conexidade das superfícies. Assim, o exemplo a seguir mostra que superfícies regulares dadas pela Proposição 5.1.2 podem não ser conexas.

Exemplo 5.1.6. O hiperbolóide de duas folhas $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ é uma superfície regular.

De fato, definindo uma função diferenciável

$$f(x, y, z) = -x^2 - y^2 + z^2 - 1,$$

podemos notar que 0 é um valor regular de f . Isso ocorre do fato das derivadas parciais $f_x = -2x$, $f_y = -2y$ e $f_z = 2z$ se anularem simultaneamente apenas no ponto $(0, 0, 0)$, o qual não pertence a $f^{-1}(0)$.

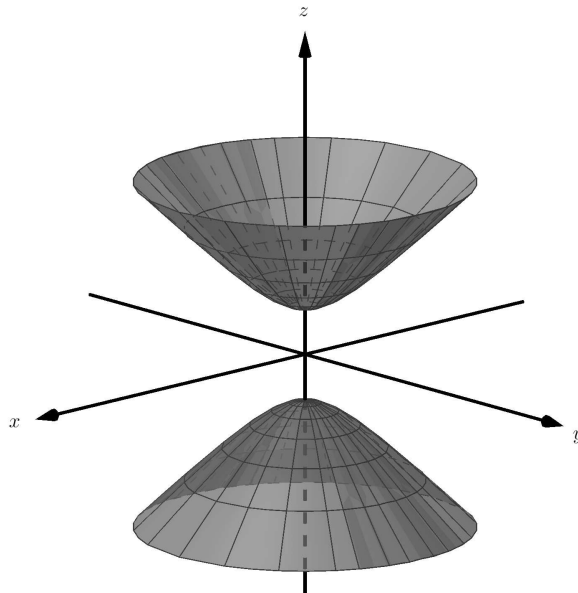
Portanto, o hiperbolóide de duas folhas dado por $S = f^{-1}(0)$ é uma superfície regular (ver Figura 8).

Observe que a superfície S não é conexa, ou seja, dados dois pontos em duas folhas distintas ($z > 0$ e $z < 0$) não é possível ligá-los por uma curva contínua

$$\begin{aligned}\alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (x(t), y(t), z(t))\end{aligned}$$

tal que $\alpha \subset S$.

Figura 8 – Hiperbolóide de duas folhas.



Fonte: Elaborado pela autora.

Observe que a Proposição 5.1.1 afirma que o gráfico de uma função diferenciável é uma superfície regular. A Proposição a seguir fornece uma recíproca local deste fato, isto é, qualquer superfície regular é localmente o gráfico de uma função diferenciável.

Proposição 5.1.3. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$. Então, existe uma vizinhança V de p em S tal que V é o gráfico de uma função diferenciável que tem uma das seguintes formas: $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$, $x = h(y, z)$.*

Demonstração. Seja $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de S em p dada por $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in U$. Pela condição iii) da Definição 5.1.1,

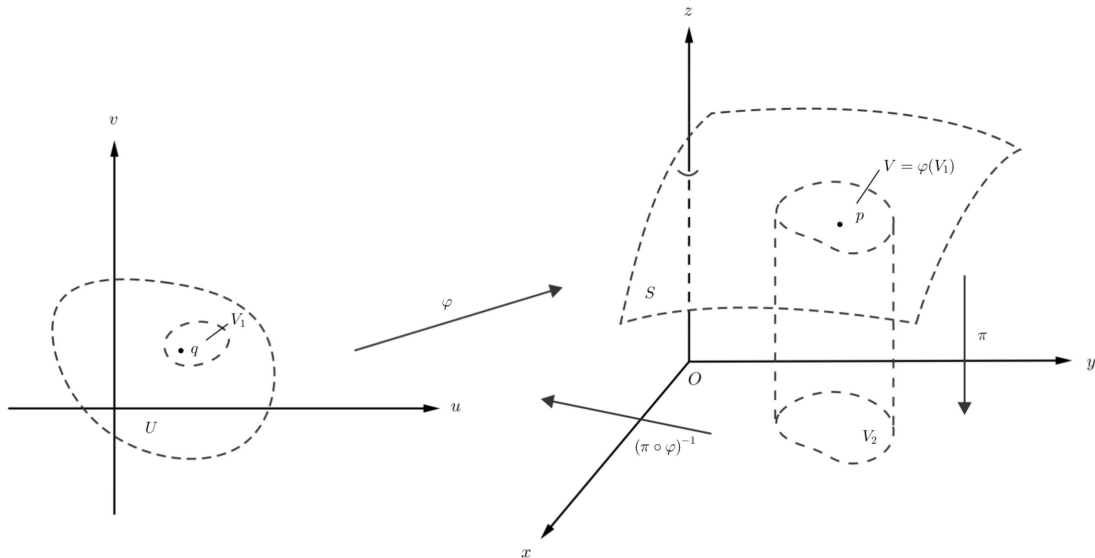
um dos determinantes Jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)},$$

não se anula em $\varphi^{-1}(p) = q$.

Primeiramente, vamos supor que $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$, e consideramos a aplicação $\pi \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde π é a projeção $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Então, $(\pi \circ \varphi)(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, e como $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$ podemos aplicar o teorema da função inversa para garantir a existência de vizinhanças abertas V_1 de q e V_2 de $(\pi \circ \varphi)(q)$ tais que $\pi \circ \varphi : V_1 \subset U \rightarrow V_2 \subset \mathbb{R}^2$ seja um difeomorfismo (ver Figura 9).

Figura 9 – Proposição 5.1.3.



Fonte: Elaborado pela autora.

Note que, $\pi|_{\varphi(V_1)} = V_2$ é bijetiva e tem uma inversa diferenciável $(\pi \circ \varphi)^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$. Observe que, como φ é um homeomorfismo, V é uma vizinhança de p em S .

Agora, considerando a composição da aplicação

$$\begin{aligned} (\pi \circ \varphi)^{-1} : V_2 \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow V_1 \subset U \\ (x, y) &\mapsto (u(x, y), v(x, y)) \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} f : V_2 &\rightarrow V \\ (x, y) &\mapsto \varphi(u(x, y), v(x, y)) \end{aligned}$$

é bijetiva, pois é composta de bijetivas, e

$$\begin{aligned}
 \pi \circ f(x, y) &= \pi \circ \varphi(u(x, y), v(x, y)) \\
 &= \pi \circ \varphi((\pi \circ \varphi)^{-1}(x, y)) \\
 &= (\pi \circ \varphi) \circ (\pi \circ \varphi)^{-1}(x, y) \\
 &= (x, y),
 \end{aligned}$$

ou seja, V é gráfico de uma função diferenciável $z = f(x, y)$.

Para os casos $x = h(y, z)$ e $y = g(x, z)$, a demonstração é feita de maneira análoga a $z = f(x, y)$. \square

Proposição 5.1.4. *Seja $p \in S$ um ponto de uma superfície regular S e seja $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^3$ uma aplicação com $p \in \varphi(U)$ tal que as condições i) e iii) da Definição 5.1.1 sejam satisfeitas. Suponha que φ seja bijetiva. Então, φ^{-1} é contínua.*

Demonstração. Sejam $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in U$ e $q \in U$. Pelas condições i) e iii) podemos supor, sem perda de generalidade, que $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$. Seja $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Pelo teorema da função inversa, temos que existem vizinhanças (abertas) V_1 de q em U e V_2 de $(\pi \circ \varphi)(q)$ em \mathbb{R}^2 tais que $\pi \circ \varphi : V_1 \subset U \rightarrow V_2 \subset \mathbb{R}^2$ é um difeomorfismo.

Agora, suponhamos que φ seja bijetiva. Então, restrita a $\varphi(V_1) \subset S$, tem-se que

$$\varphi^{-1} = (\pi \circ \varphi)^{-1} \circ \pi,$$

(ver Figura 9). Assim, φ^{-1} é contínua, pois a composição de aplicações contínuas é contínua. \square

5.2 Mudança de Parâmetros; Funções Diferenciáveis sobre Superfícies

De acordo com a Definição 5.1.1, cada ponto p de uma superfície regular S pertence a uma vizinhança coordenada. Entretanto, um ponto p de S pode pertencer a várias vizinhanças coordenadas. Além disso, outros sistemas de coordenadas poderiam ser escolhidos em uma vizinhança de p . Assim, para que a definição de superfície regular faça sentido, é preciso que ela não dependa do sistema de coordenadas escolhido. Isto

é, quando um ponto pertence a duas vizinhanças coordenadas com parâmetros (u, v) e (ξ, η) , é possível passar de um destes pares de coordenadas ao outro por meio de uma aplicação diferenciável.

Desta forma, seja S uma superfície regular e $p \in S$. Indicaremos por (φ, U) uma parametrização de S em uma vizinhança do ponto p , ou seja,

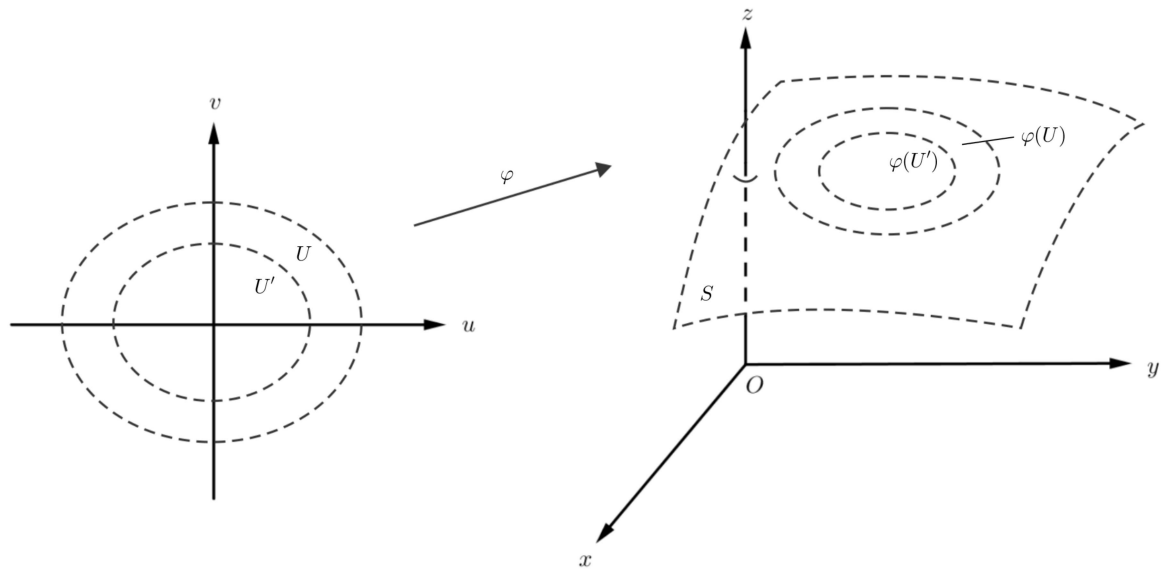
$$\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$$

parametrização com $p \in \varphi(U)$.

Na seqüência veremos dois Lemas que serão utilizados na demonstração da Proposição 5.2.1.

Lema 5.2.1. *Seja S uma superfície regular de \mathbb{R}^3 . Dada uma parametrização (φ, U) de S , se $U' \subset U$ é um aberto, então $\varphi(U')$ é também um aberto de S (ver Figura 10).*

Figura 10 – Lema 5.2.1.



Fonte: Elaborado pela autora.

Demonstração. Note que, da definição de parametrização $\varphi(U) = V \cap S$ e V é um aberto de \mathbb{R}^3 . Seja $\tilde{V} = V - \overline{(\varphi(U) - \varphi(U'))}$. Então \tilde{V} é um aberto de \mathbb{R}^3 e $\varphi(U') = \tilde{V} \cap S$.

Portanto, segue da definição de aberto que $\varphi(U')$ é um aberto de S . \square

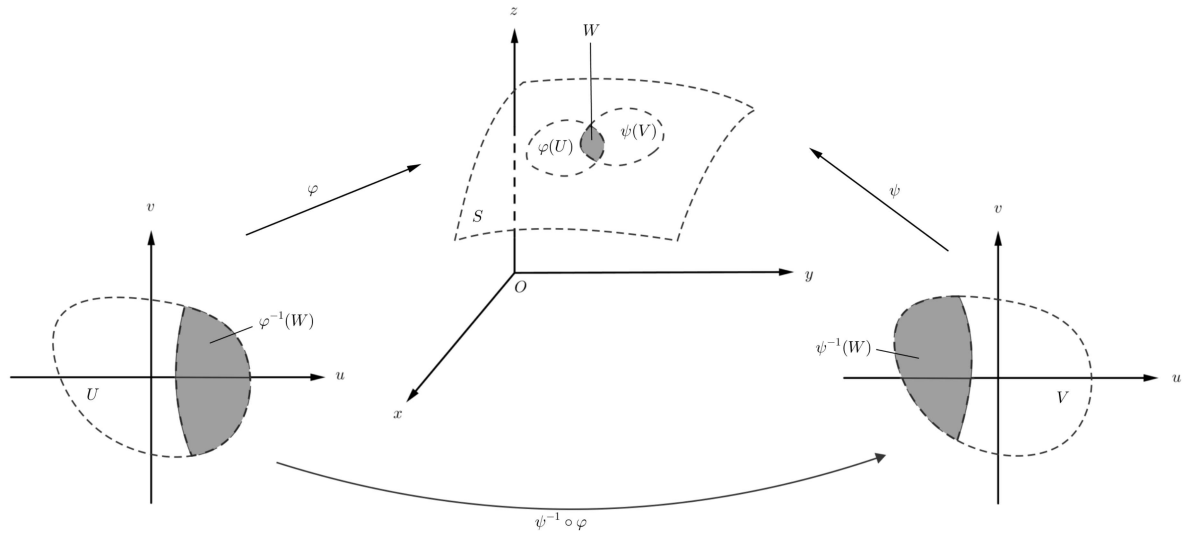
Lema 5.2.2. *Seja S uma superfície regular de \mathbb{R}^3 e $A \subset S$ um conjunto. Então, $A \cap S$ é aberto de S se, e somente se, $\varphi^{-1}(A)$ é aberto em \mathbb{R}^2 , onde φ é uma parametrização qualquer de S .*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponhamos $A \subset S$ aberto de S . Neste caso, $A = V \cap S$, onde V é um aberto do \mathbb{R}^3 . Então, $\varphi^{-1}(A) = \varphi^{-1}(V \cap S) \subset \varphi^{-1}(V)$, onde φ é uma parametrização qualquer de S . Por outro lado, $\varphi^{-1}(V) \subset \varphi^{-1}(A)$ também ocorre, donde $\varphi^{-1}(A) = \varphi^{-1}(V)$. Logo, como φ é um homeomorfismo $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, então a pré-imagem de qualquer aberto de \mathbb{R}^3 por φ é um aberto em \mathbb{R}^2 . Logo, $\varphi^{-1}(A)$ é um aberto de \mathbb{R}^2 .

(\Leftarrow) Seja $A \subset S$ tal que $\varphi^{-1}(A)$ é um aberto de \mathbb{R}^2 , para toda parametrização φ de S . Dado $p \in A$, como $A \subset S$ e S é uma superfície regular, existe (φ_p, U_p) , $p \in \varphi_p(U_p)$ e V_p aberto de \mathbb{R}^3 tal que $\varphi_p(U_p) = V_p \cap S$. Por hipótese, temos que, $\varphi_p^{-1}(A) = U' \subset U_p$ é um aberto de \mathbb{R}^2 . Logo, do Lema 5.2.1, $\varphi_p(U') \subset A$ é um aberto de S . Como $p \in \varphi_p(U')$, existe W_p aberto de \mathbb{R}^3 tal que $\varphi_p(U') = W_p \cap S \subset A$. Então, $A = \bigcup_{p \in A} (W_p \cap S)$ que é a união de abertos de S . Portanto, A é aberto de S . \square

Proposição 5.2.1. *(Mudança de Parâmetros). Seja S uma superfície regular do \mathbb{R}^3 , e sejam $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ e $\psi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ duas parametrizações de S . Suponha que $W := \varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$. Então, $\varphi^{-1}(W)$ e $\psi^{-1}(W)$ são abertos de U e V , respectivamente, e a aplicação “mudança” de coordenadas $\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \rightarrow \psi^{-1}(W)$ é um difeomorfismo (ver Figura 11).*

Figura 11 – Mudança de parâmetros.



Fonte: Elaborado pela autora.

Demonstração. Decorre dos Lemas 5.2.1 e 5.2.2 anteriores que $\varphi^{-1}(W)$ e $\psi^{-1}(W)$ são abertos de \mathbb{R}^2 . Além disso, do fato de φ e ψ serem parametrizações de S , segue que $\psi^{-1} \circ \varphi$ é uma bijeção (composta de injetores é injetora e ela é obviamente sobrejetora). Assim, basta mostrar que $\psi^{-1} \circ \varphi$ e $(\psi^{-1} \circ \varphi)^{-1}$ são diferenciáveis. Como $(\psi^{-1} \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi$, provando a diferenciabilidade de $\psi^{-1} \circ \varphi$ a outra é análoga.

Dado $p_0 \in \varphi^{-1}(W)$ e seja $q_0 = (\psi^{-1} \circ \varphi)(p_0)$. Temos $q_0 \in \psi^{-1}(W) \subset V$. Como $\psi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão, $d\psi_{q_0} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva, então $\det [d\psi_{q_0}] \neq 0$. Pondo $\psi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$,

$$d\psi_{q_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

é tal que $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, $\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}$ ou $\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}$ é não nulo.

Suponha que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(q_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(q_0) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Defina $F : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, pondo $F(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, onde $\psi^{-1}(W) \subset V$. Temos que $dF_{q_0} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\det[dF_{q_0}] = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$. Pelo teorema da Aplicação Inversa, existem abertos $D \subset \mathbb{R}^2$ com $q_0 \in D$ e $D' \subset \mathbb{R}^2$ com $F(q_0) \in D'$ tal que $F : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow D' \subset \mathbb{R}^2$ é um difeomorfismo. Então, $F^{-1} : D' \rightarrow D$ e $(u, v) = F^{-1}(x(u, v), y(u, v))$. Tome $E = \varphi^{-1}(\psi(D))$, temos que E é um aberto em $\varphi^{-1}(W)$ (pelos Lemas 5.2.1 e 5.2.2) contendo p_0 .

Agora, defina $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ onde $\pi(x, y, z) = (x, y)$, vamos mostrar que $(\psi^{-1} \circ \varphi)|_E = (F^{-1} \circ \pi \circ \varphi)|_E$ e como F^{-1} , π e φ são funções diferenciáveis, segue que $\psi^{-1} \circ \varphi$ é diferenciável em E .

Temos que

$$(\psi^{-1} \circ \varphi)|_E = (F^{-1} \circ \pi \circ \varphi)|_E \Leftrightarrow (\psi^{-1} \circ \varphi)(x, y) = (F^{-1} \circ \pi \circ \varphi)(x, y), \forall (x, y) \in E.$$

Como $E = \varphi^{-1}(\psi(D))$, temos

$$\begin{aligned} (\psi^{-1} \circ \varphi)|_E = (F^{-1} \circ \pi \circ \varphi)|_E &\Leftrightarrow (\psi^{-1} \circ \varphi)(\varphi^{-1}(\psi(u, v))) = (F^{-1} \circ \pi \circ \varphi)(\varphi^{-1}(\psi(u, v))), \\ &\forall (u, v) \in D. \end{aligned}$$

Mas,

$$(\psi^{-1} \circ \varphi)(\varphi^{-1}(\psi(u, v))) = (u, v)$$

e

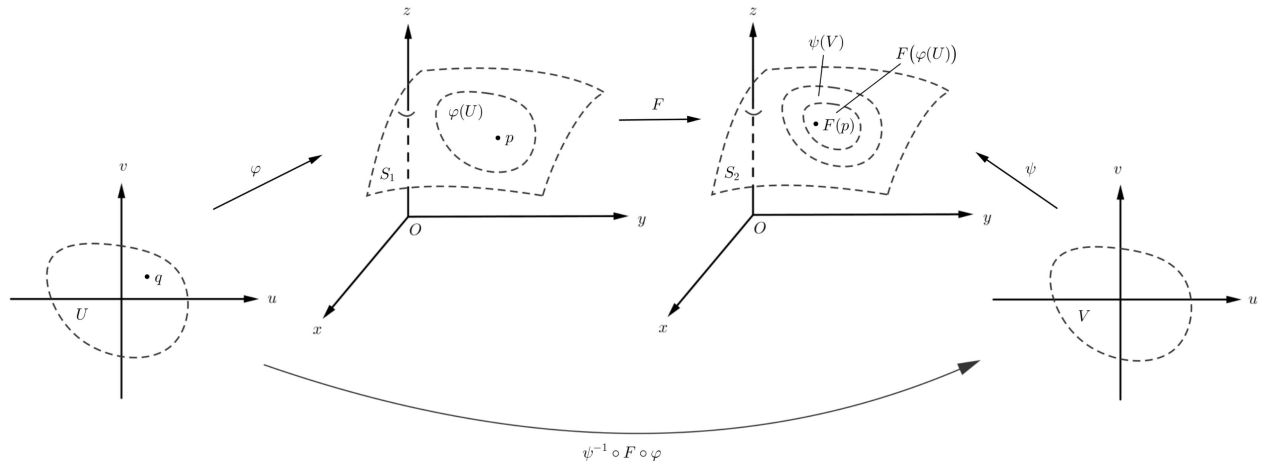
$$\begin{aligned} (F^{-1} \circ \pi \circ \varphi)(\varphi^{-1}(\psi(u, v))) &= (F^{-1} \circ \pi)(\varphi(u, v)) = F^{-1} \circ \pi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\ &= F^{-1}(x(u, v), y(u, v)) = (u, v). \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } (\psi^{-1} \circ \varphi)|_E = (F^{-1} \circ \pi \circ \varphi)|_E. \quad \square$$

Agora, definiremos uma aplicação diferenciável entre duas superfícies regulares do \mathbb{R}^3 .

Definição 5.2.1. *Sejam S_1 e S_2 superfícies regulares do \mathbb{R}^3 e considere uma aplicação $F : S_1 \rightarrow S_2$. Dizemos que F é diferenciável em $p \in S_1$, se existem parametrizações (φ, U) de S_1 com $p \in \varphi(U)$, (ψ, V) de S_2 com $F(\varphi(U)) \subset \psi(V)$ tal que $\psi^{-1} \circ F \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é diferenciável em $q = \varphi^{-1}(p)$ (ver Figura 12).*

Figura 12 – Aplicação entre superfícies regulares.



Fonte: Elaborado pela autora.

Proposição 5.2.2. *Sejam S_1 e S_2 superfícies regulares e $F : S_1 \rightarrow S_2$ diferenciável em $p \in S_1$. Então, para qualquer par de parametrizações (φ, U) , (ψ, V) em torno de $p \in S_1$ e $F(p) \in S_2$, respectivamente, com $\varphi(U) \subset \psi(V)$, temos que a aplicação*

$$\psi^{-1} \circ F \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

é diferenciável em $q = \varphi^{-1}(p)$.

Demonstração. Como $F : S_1 \rightarrow S_2$ é diferenciável em $p \in S_1$, existem parametrizações (φ_0, U_0) , (ψ_0, V_0) em torno de $p \in S_1$ e $F(p) \in S_2$, respectivamente, com $\varphi_0(U_0) \subset \psi_0(V_0)$ tal que,

$$\psi_0^{-1} \circ F \circ \varphi_0 : U_0 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

é diferenciável em $q = \varphi_0^{-1}(p)$.

Dados (φ, U) , (ψ, V) quaisquer, satisfazendo as condições dadas na hipótese relativas à p , note que,

- i) $\varphi_0^{-1} \circ \varphi : \tilde{U} \subset U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U_0 \subset \mathbb{R}^2$ é diferenciável em $q \in \tilde{U}$, pela Proposição 5.2.1;
- ii) $\psi_0^{-1} \circ F \circ \varphi_0 : U_0 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V_0 \subset \mathbb{R}^2$ é diferenciável em $q = \varphi_0^{-1}(p)$ por hipótese;
- iii) $\psi^{-1} \circ \psi_0 : \tilde{V} \subset V_0 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$ é diferenciável em $\psi_0^{-1}(p)$, pela Proposição 5.2.1.

Assim, $(\psi^{-1} \circ \psi_0) \circ (\psi_0^{-1} \circ F \circ \varphi_0) \circ (\varphi_0^{-1} \circ \varphi) : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$ é diferenciável em $q \in \tilde{U}$ e $q = \varphi^{-1}(p)$, já que a composta de aplicações diferenciáveis é diferenciável em um aberto de \mathbb{R}^2 . \square

5.3 Plano Tangente; Diferencial de uma Aplicação

Agora, mostraremos que a condição iii) da Definição 5.1.1 garante que, em uma superfície regular S , para cada $p \in S$, o conjunto de vetores tangente às curvas parametrizadas de S , passando por p , constituem um plano.

Definição 5.3.1. *Sejam S uma superfície regular e $p \in S$. Ao conjunto*

$$T_p S = \{ \alpha'(0); \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \text{ é diferenciável com } \alpha(0) = p \}$$

damos o nome de plano tangente à S em p .

Proposição 5.3.1. *Seja S uma superfície regular do \mathbb{R}^3 e seja $p \in S$. Dada $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de S e seja $q = \varphi^{-1}(p)$. O subespaço vetorial de dimensão 2, satisfaz*

$$T_p S = d\varphi_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$$

Demonstração. Dado $v \in T_p S$, temos que $v = \alpha'(0)$ para alguma $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ diferenciável, com $\alpha(0) = p$. Diminua ε se necessário, de tal forma que $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \varphi(U)$. Seja $\beta(t) = (\varphi^{-1} \circ \alpha)(t)$. Então, $\alpha(t) = (\varphi \circ \beta)(t)$. Logo,

$$\alpha'(0) = \left. \frac{d}{dt} \varphi(\beta(t)) \right|_{t=0} = d\varphi_{\beta(t)}(\beta'(t)) \Big|_{t=0} = d\varphi_{\beta(0)}(\beta'(0)) = d\varphi_q(\beta'(0)).$$

Assim, pondo $u = \beta'(0)$, temos que $v = d\varphi_q(u)$. Portanto, $T_p S \subset d\varphi_q(\mathbb{R}^2)$ (ver Figura 13).

Por outro lado, dado $v \in d\varphi_q(\mathbb{R}^2)$. Então, $v = d\varphi_q(w)$, $w \in \mathbb{R}^2$. Seja $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ dada por $\beta(t) = q + tw$. Temos que $\beta(0) = q$ e $\beta'(t) = w$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, então $\beta'(0) = w$.

Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, diminuindo ε caso necessário, dada por

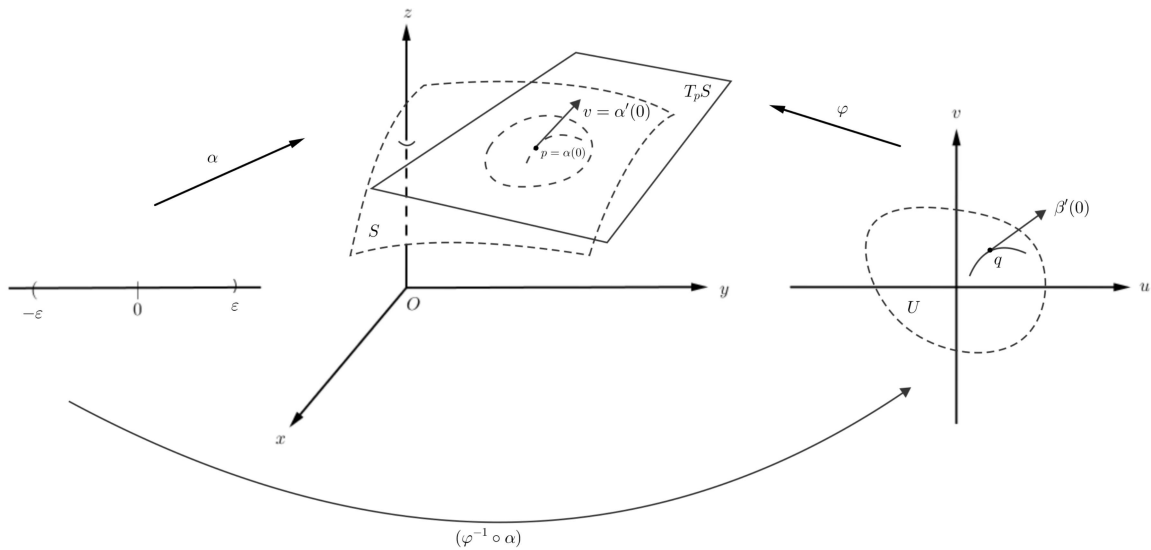
$$\alpha(t) = \varphi(\beta(t)) \Rightarrow \alpha(t) = \varphi(q + tw).$$

Então,

$$\begin{aligned}\alpha'(0) &= \left. \frac{d}{dt} \varphi(\beta(t)) \right|_{t=0} = d\varphi_{\beta(t)}(\beta'(t)) \Big|_{t=0} = d\varphi_{\beta(0)}(\beta'(0)) \\ &\Rightarrow \alpha'(0) = d\varphi_q(w) = v.\end{aligned}$$

Portanto, $v \in T_p S$ e $d\varphi_q(\mathbb{R}^2) \subset T_p S$.

Figura 13 – Proposição 5.3.1.



Fonte: Elaborado pela autora.

□

Proposição 5.3.2. *Seja (φ, U) uma parametrização de S na vizinhança de p . Então, o plano tangente $T_p S$ é gerado por $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(q)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(q)$, onde $q = \varphi^{-1}(p)$.*

Demonstração. Dado $v \in T_p S$, $v = \alpha'(0)$, onde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ e $\alpha(0) = p$. Sem perda de generalidade, suponhamos ε tal que $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \varphi(U)$. Ponha $\beta(t) = (\varphi^{-1} \circ \alpha)$. Note que, $\beta(t) = (u(t), v(t))$, $q = \varphi^{-1}(p) = \beta(0)$ e $\alpha(t) = (\varphi \circ \beta)(t)$. Então,

$$\begin{aligned}v = \alpha'(0) &= \left. \frac{d}{dt} (\varphi \circ \beta)(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \varphi(u(t), v(t)) \right|_{t=0} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(q) \cdot u'(0) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(q) \cdot v'(0) = d\varphi(\beta'(0)).\end{aligned}$$

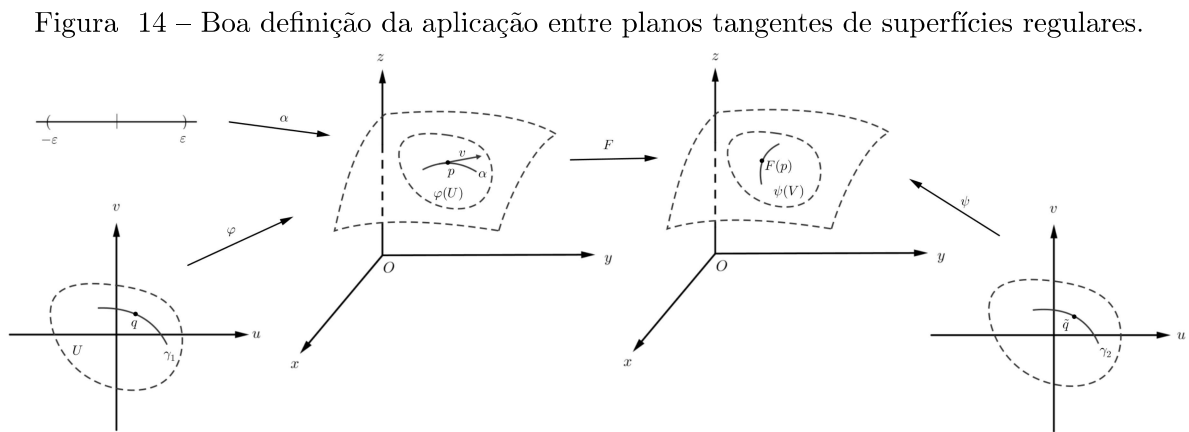
□

Definição 5.3.2. *Sejam S_1 e S_2 superfícies regulares do \mathbb{R}^3 e seja $F : S_1 \rightarrow S_2$ diferenciável. Dado $p \in S_1$, a derivada de F em p é a aplicação $dF_p : T_p S_1 \rightarrow T_{F(p)} S_2$ dada*

por $dF_p(v) = \frac{d}{dt}(F \circ \alpha)(t) \Big|_{t=0}$, onde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$ é qualquer curva diferenciável com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.

Proposição 5.3.3. *A aplicação dF_p da Definição 5.3.2 anterior está bem definida e é linear.*

Demonstração. Para esta demonstração iremos considerar duas parametrizações. Seja (φ, U) uma parametrização de S_1 na vizinhança de p . Dado $v \in T_p S_1$, $v = \alpha'(0)$, onde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$ e $\alpha(0) = p$. Sejam $\beta = (F \circ \alpha) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_2$ e (ψ, V) uma parametrização de S_2 na vizinhança de $F(p)$. Sem perda de generalidade, suponhamos $F(\varphi(U)) \subset \psi(V)$. Conforme podemos ver na Figura 14.



Fonte: Elaborado pela autora.

Primeiramente, mostraremos que dF_p é linear. Deste modo, sem perda de generalidade, suponhamos $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \varphi(U)$. Agora, seja $\gamma_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$, onde $\gamma_1(t) = (\varphi^{-1} \circ \alpha)(t)$. Temos que $\gamma_1(t) = (u(t), v(t))$, então $\alpha(t) = (\varphi \circ \gamma_1)(t)$ e $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$.

Assim, pondo $q = \varphi^{-1}(p)$, temos

$$v = \alpha'(0) = \frac{d}{dt} \varphi(u(t), v(t)) \Big|_{t=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(q) \cdot u'(0) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(q) \cdot v'(0), \quad (5.3.1)$$

onde $\gamma_1(t) = (u'(0), v'(0))$.

Agora, seja $\gamma_2(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$, onde $\gamma_2(t) = (\psi^{-1} \circ \beta)(t)$. Podemos escrever $\gamma_2(t) = (\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$. Então, pondo $\tilde{q} = \gamma_2(0) = \psi^{-1}(F(p))$, temos $\beta(t) = (\psi \circ \gamma_2)(t)$ e

$\gamma_2(t) = \psi(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$. Segue que

$$\left. \frac{d}{dt}(F \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} = \beta'(0) = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{u}}(\tilde{q}) \cdot \tilde{u}'(0) + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{v}}(\tilde{q}) \cdot \tilde{v}'(0). \quad (5.3.2)$$

Portanto, das equações 5.3.1 e 5.3.2, podemos escrever

$$dF_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(q) \cdot u'(0) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(q) \cdot v'(0) \right) = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{u}}(\tilde{q}) \cdot \tilde{u}'(0) + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{v}}(\tilde{q}) \cdot \tilde{v}'(0),$$

ou seja, dF_p é linear.

Agora, mostraremos que a aplicação dF_p está bem definida. Considere a aplicação $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$, dada por $g = (\psi^{-1} \circ F \circ \varphi)$. Como F é diferenciável, então g também é diferenciável. Temos, em $q = \varphi^{-1}(p)$ que $dg_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Note que,

$$(g \circ \gamma_1)(t) = (\psi^{-1} \circ F \circ \varphi \circ \gamma_1)(t) = (\psi^{-1} \circ F)(\alpha(t)) = \psi^{-1}(\beta(t)) = \gamma_2(t).$$

Assim, para $\gamma_1'(0)$, tem-se

$$dg_q(\gamma_1'(0)) = \left. \frac{d}{dt}(g \circ \gamma_1)(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\gamma_2)(t) \right|_{t=0} = (\tilde{u}'(0), \tilde{v}'(0)),$$

observe que dg_q não depende das parametrizações φ e ψ . Ou seja,

$$dg_q(u'(0), v'(0)) = (\tilde{u}'(0), \tilde{v}'(0)),$$

o qual de Análise no \mathbb{R}^n sabemos que está bem definido e não depende das parametrizações tomadas.

Assim,

$$dg_q(u'(0), v'(0)) = (\tilde{u}'(0), \tilde{v}'(0)) = [dF_p(v)],$$

donde da equação 5.3.2, segue que não depende da escolha de α .

Portanto, dF_p está bem definida e é linear. Note que não depende de α . \square

Definição 5.3.3. *Seja S uma superfície regular do \mathbb{R}^3 e $p \in S$. Um vetor normal a S em p é um vetor $N(p) \in \mathbb{R}^3$ tal que $N(p) \perp T_p S$.*

Observação 5.3.1. *Seja (φ, U) uma parametrização de S na vizinhança p . Então, como $\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u}(q), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(q) \right\}$ é linearmente independente e o plano tangente $T_p S$ é gerado por $\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u}(q), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(q) \right\}$. Deste modo, $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(q) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(q)$ é ortogonal a $T_p S$, bem como*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(q) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(q) = -\frac{\partial \varphi}{\partial v}(q) \times \frac{\partial \varphi}{\partial u}(q).$$

Fixada uma parametrização, $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ em $p \in S$, podemos definir a escolha de um vetor unitário normal em cada ponto $q \in \varphi(U)$, pela seguinte regra

$$N(p) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(q) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(q)}{\left| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(q) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(q) \right|}.$$

5.4 Primeira forma Fundamental; Área

Nesta seção começaremos o estudo de outras estruturas geométricas associadas a uma superfície, tais como, comprimento de curvas, ângulo entre vetores tangentes e área de regiões da superfície.

Definição 5.4.1. *Seja S uma superfície regular. Dado $p \in S$ a aplicação $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$I_p(v) = \langle v, v \rangle_p = |v|^2 \geq 0$$

é denominada a primeira forma quadrática de S em p . Onde $\langle v, v \rangle_p$ é o produto interno usual do \mathbb{R}^3 .

Assim, a primeira forma fundamental é a expressão de como a superfície S herda o produto interno natural do \mathbb{R}^3 . Geometricamente, a primeira forma fundamental nos viabiliza fazer medidas sobre a superfície, sem fazer menção ao espaço ambiente \mathbb{R}^3 , onde está a superfície.

Agora, vamos expressar a primeira forma fundamental na base $\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\}$, que denotaremos por $\{\varphi_u, \varphi_v\}$, associada a uma parametrização (φ, U) na vizinhança de p . Como um vetor tangente $w \in T_p S$ é o vetor tangente a uma curva parametrizada $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, com $p = \alpha(0) = \varphi(u_0, v_0)$, obtemos

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle \varphi_u u' + \varphi_v v', \varphi_u u' + \varphi_v v' \rangle_p \\ &= \langle \varphi_u u', \varphi_u u' \rangle_p + \langle \varphi_u u', \varphi_v v' \rangle_p + \langle \varphi_v v', \varphi_u u' \rangle_p + \langle \varphi_v v', \varphi_v v' \rangle_p \\ &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_p (u')^2 + 2 \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_p u' v' + \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_p (v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2, \end{aligned}$$

onde os valores das funções envolvidas são calculados em $t = 0$, e

$$E(u_0, v_0) = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_p,$$

$$F(u_0, v_0) = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_p,$$

$$G(u_0, v_0) = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_p,$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ de $T_p S$. Fazendo p variar na vizinhança coordenada correspondente a $\varphi(u, v)$, obtemos funções $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$, que são diferenciáveis nessa vizinhança.

A partir de agora, vamos omitir o índice p na indicação de produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ e na forma quadrática I_p , quando for claro pelo contexto a que ponto nos referimos.

Na sequência, veremos alguns exemplos que de alguma forma podemos analisar a aplicabilidade da primeira forma fundamental.

Exemplo 5.4.1. Seja $P \subset \mathbb{R}^3$ um plano passando por $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e contendo os vetores ortonormais $w_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $w_2 = (b_1, b_2, b_3)$, ou seja, P é descrito por

$$\varphi(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2, (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Temos que $\varphi_u = w_1$ e $\varphi_v = w_2$. Como w_1 e w_2 são ortonormais, ou seja, são vetores unitários ortogonais, temos que os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \langle w_1, w_1 \rangle = 1,$$

$$F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle = 0,$$

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \langle w_2, w_2 \rangle = 1.$$

Portanto, a primeira forma fundamental é essencialmente o teorema de Pitágoras, isto é, o quadrado do comprimento de um vetor w , com coordenadas a, b na base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$, é igual a $a^2 + b^2$.

Exemplo 5.4.2. Seja $\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, com $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ e $0 < u < 2\pi$, $-\infty < v < \infty$, uma parametrização para o cilindro reto $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$.

Para calcular a primeira forma fundamental, notamos que $\varphi_u = (-\sin u, \cos u, 0)$ e $\varphi_v = (0, 0, 1)$, então

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \sin^2 u + \cos^2 u = 1,$$

$$F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0,$$

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 1.$$

Agora, conhecendo a primeira forma fundamental, podemos estudar questões métricas sobre uma superfície regular, como mencionamos anteriormente.

Numa superfície regular S , o comprimento de arco de uma curva se expressa inteiramente por meio da primeira forma fundamental. Dada uma curva parametrizada $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$, para quaisquer $a, b \in I$, tem-se

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_{\alpha(t)}} dt = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t))} dt.$$

Para justificar tal fato, vamos considerar (φ, U) uma parametrização de S na vizinhança de $p \in S$. Sejam as curvas $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$, diferenciável, com $\alpha(0) = p$, $\alpha(I) \subset \varphi(U)$ e $\beta(t) = (u(t), v(t))$, onde $\beta = \varphi^{-1}(\alpha)$. Então, $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$, daí

$$\alpha'(t) = \varphi_u u'(t) + \varphi_v v'(t).$$

Logo,

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle [u'(t)]^2 + 2\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle u'(t)v'(t) + \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle [v'(t)]^2.$$

Assim, pondo

$$E(u, v) = \langle \varphi_u(u, v), \varphi_u(u, v) \rangle_{\varphi(u, v)},$$

$$F(u, v) = \langle \varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v) \rangle_{\varphi(u, v)},$$

$$G(u, v) = \langle \varphi_v(u, v), \varphi_v(u, v) \rangle_{\varphi(u, v)},$$

temos

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_{\alpha(t)} = E[u'(t)]^2 + 2F u'(t)v'(t) + G[v'(t)]^2.$$

Portanto,

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \sqrt{E[u'(t)]^2 + 2F u'(t)v'(t) + G[v'(t)]^2} dt.$$

Seja S uma superfície regular. Dadas duas curvas parametrizadas regulares $\alpha : I \rightarrow S$ e $\beta : I \rightarrow S$ tais que $\alpha(0) = \beta(0) = p$. O ângulo θ entre as curvas α e β em p ,

é o ângulo entre os vetores $\alpha'(0)$ e $\beta'(0)$. Por sua vez, $\langle \alpha'(0), \beta'(0) \rangle = |\alpha'(0)| |\beta'(0)| \cos \theta$, então

$$\theta = \arccos \frac{\langle \alpha'(0), \beta'(0) \rangle}{|\alpha'(0)| |\beta'(0)|}.$$

Em particular, o ângulo ω das curvas coordenadas de uma parametrização $\varphi(u, v)$ é

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \frac{\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle}{|\varphi_u| |\varphi_v|} = \frac{F}{\sqrt{\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle} \cdot \sqrt{\langle \varphi_v, \varphi_v \rangle}} \\ &= \frac{F}{\sqrt{\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \cdot \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

decorre da equação (5.4.1) que as curvas coordenadas de uma parametrização são ortogonais se, e somente se, $F(u, v) = 0$, para todo (u, v) . Uma tal parametrização é chamada uma parametrização ortogonal.

Exemplo 5.4.3. Vamos determinar os coeficientes da primeira forma fundamental do toro T na parametrização $\varphi(u, v) = ((2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, \sin v)$.

Temos que

$$\varphi_u = (-\sin u(2 + \cos v), \cos u(2 + \cos v), 0),$$

$$\varphi_v = (-\sin v \cos u, -\sin v \sin u, \cos v).$$

Então,

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \sin^2 u(2 + \cos v)^2 + \cos^2 u(2 + \cos v)^2 = (2 + \cos v)^2,$$

$$F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \sin u \sin v \cos u(2 + \cos v) - \sin u \sin v \cos u(2 + \cos v) = 0,$$

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \sin^2 v \cos^2 u + \sin^2 v \sin^2 u + \cos^2 v = 1.$$

Na sequência, vamos definir a noção de área de uma região limitada de uma superfície regular S , usando a primeira forma fundamental.

Definição 5.4.2. Um domínio (regular) de S é um subconjunto aberto e conexo de S , cuja fronteira é a imagem de um círculo por um homeomorfismo diferenciável que é regular (ou seja, a sua diferencial não se anula) exceto em um número finito de pontos. Uma região de S é a união de um domínio com a sua fronteira. Uma região de $S \subset \mathbb{R}^3$ é limitada se está contida em alguma bola de \mathbb{R}^3 .

Definição 5.4.3. *Seja $R \subset S$ uma região limitada de uma superfície regular S , contida em uma vizinhança coordenada de uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$. O número positivo*

$$\iint_Q |\varphi_u \times \varphi_v| \, du \, dv = A(R),$$

onde $Q = \varphi^{-1}(R)$, é chamado área de R .

Podemos escrever a área de R usando os coeficientes da primeira forma fundamental. Convém notar que

$$|\varphi_u \times \varphi_v| = |\varphi_u| |\varphi_v| \sin \theta \quad (5.4.2)$$

e

$$\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = |\varphi_u| |\varphi_v| \cos \theta. \quad (5.4.3)$$

Das equações (5.4.2) e (5.4.3), temos

$$\begin{aligned} |\varphi_u \times \varphi_v|^2 + \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 &= |\varphi_u|^2 |\varphi_v|^2 \sin^2 \theta + |\varphi_u|^2 |\varphi_v|^2 \cos^2 \theta \\ &= |\varphi_u|^2 |\varphi_v|^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &= |\varphi_u|^2 |\varphi_v|^2, \end{aligned}$$

assim, o integrando de $A(R)$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} |\varphi_u \times \varphi_v|^2 &= |\varphi_u|^2 |\varphi_v|^2 - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 \\ |\varphi_u \times \varphi_v| &= \sqrt{|\varphi_u|^2 |\varphi_v|^2 - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2} \\ |\varphi_u \times \varphi_v| &= \sqrt{\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \cdot \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2} \\ |\varphi_u \times \varphi_v| &= \sqrt{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$A(R) = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.$$

Exemplo 5.4.4. Vamos calcular a área do toro, considerando a vizinhança coordenada correspondente à parametrização

$$\varphi(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u),$$

onde $0 < u < 2\pi$ e $0 < v < 2\pi$, que cobre o toro, exceto por um meridiano e um paralelo.

Note que

$$\varphi_u = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u)$$

e

$$\varphi_v = (-\sin v(a + r \cos u), \cos v(a + r \cos u), 0).$$

Então, os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = r^2 \sin^2 u \cos^2 v + r^2 \sin^2 u \sin^2 v + r^2 \cos^2 u = r^2,$$

$$F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = r \sin u \cos v \sin v(a + r \cos u) - r \sin u \sin v \cos v(a + r \cos u) = 0,$$

$$G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \sin^2 v(a + r \cos u)^2 + \cos^2 v(a + r \cos u)^2 = (a + r \cos u)^2.$$

Logo,

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{r^2(a + r \cos u)^2} = r(a + r \cos u).$$

Agora, considerando a região R_ε , dada pela imagem por φ da região Q_ε dada por ($\varepsilon > 0$ e pequeno),

$$Q_\varepsilon = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 + \varepsilon \leq u \leq 2\pi - \varepsilon, 0 + \varepsilon \leq v \leq 2\pi - \varepsilon\}.$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} A(R_\varepsilon) &= \iint_{Q_\varepsilon} r(a + r \cos u) \, du \, dv \\ &= \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} (ra + r^2 \cos u) \, du \, dv \\ &= \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \left[\int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} (ra + r^2 \cos u) \, du \right] \, dv \\ &= \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} [r^2(\sin(2\pi - \varepsilon) - \sin \varepsilon) + 2\pi ra - 2\varepsilon ra] \, dv \\ &= (\sin(2\pi - \varepsilon) - \sin \varepsilon)(r^2(2\pi - \varepsilon) - r^2\varepsilon) + ra(2\pi - 2\varepsilon)(2\pi - \varepsilon - \varepsilon), \end{aligned}$$

ou seja,

$$A(R_\varepsilon) = r^2(2\pi - 2\varepsilon)(\sin(2\pi - \varepsilon) - \sin \varepsilon) + ra(2\pi - 2\varepsilon)^2. \quad (5.4.4)$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ na equação (5.4.4), obtemos que a área do toro é dada por

$$A(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(R_\varepsilon) = 4\pi^2 ra.$$

Exemplo 5.4.5. Vamos calcular a área da esfera unitária $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, considerando a vizinhança coordenada correspondente à parametrização

$$\varphi(\theta, \omega) = (\sin \theta \cos \omega, \sin \theta \sin \omega, \cos \theta),$$

onde $0 < \theta < \pi$ e $0 < \omega < 2\pi$, que cobre a esfera exceto por um meridiano e o equador.

Note que,

$$\varphi_\theta = (\cos \theta \cos \omega, \cos \theta \sin \omega, -\sin \theta)$$

e

$$\varphi_\omega = (-\sin \omega \sin \theta, \sin \theta \cos \omega, 0).$$

Logo,

$$E = \langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle = \cos^2 \theta \cos^2 \omega + \cos^2 \theta \sin^2 \omega + \sin^2 \theta = 1,$$

$$F = \langle \varphi_\theta, \varphi_\omega \rangle = -\cos \theta \cos \omega \sin \omega \sin \theta + \cos \theta \cos \omega \sin \omega \sin \theta = 0,$$

$$G = \langle \varphi_\omega, \varphi_\omega \rangle = \sin^2 \omega \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \omega = \sin^2 \theta.$$

Logo,

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\sin^2 \theta} = \sin \theta.$$

Agora, vamos considerar a região R_ε , conforme feito no exemplo 5.4.4, dada pela imagem φ da região Q_ε dada por ($\varepsilon > 0$ e pequeno),

$$Q_\varepsilon = \{(\theta, \omega); 0 + \varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon, 0 + \varepsilon \leq \omega \leq 2\pi - \varepsilon\}.$$

Então,

$$\begin{aligned} A(R_\varepsilon) &= \iint_Q \sin \theta \, d\theta \, d\omega \\ &= \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \int_{0+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} (\sin \theta) \, d\theta \, d\omega \\ &= \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \left[-\cos \theta \right]_{0+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} d\omega \\ &= \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} (\cos \varepsilon - \cos(\pi - \varepsilon)) \, d\omega \\ &= \left[\omega \cos \varepsilon - \omega \cos(\pi - \varepsilon) \right]_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}, \end{aligned}$$

logo,

$$A(R_\varepsilon) = (2\pi - \varepsilon) \cos \varepsilon - (2\pi - \varepsilon) \cos(\pi - \varepsilon) - \varepsilon \cos \varepsilon + \varepsilon \cos(\pi - \varepsilon). \quad (5.4.5)$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ na equação (5.4.5), obtemos que a área da esfera unitária é dada por

$$A(S^2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(R_\varepsilon) = 4\pi.$$

Exemplo 5.4.6. A área A de uma região limitada R da superfície $z = f(x, y)$ é

$$A = \iint_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy,$$

onde Q é a projeção ortogonal de R sobre o plano xy .

Considerando a parametrização $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $\varphi_x = (1, 0, f_x)$ e $\varphi_y = (0, 1, f_y)$.

Assim, os coeficientes da primeira fundamental são

$$E = \langle \varphi_x, \varphi_x \rangle = 1 + f_x^2,$$

$$F = \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle = f_x f_y,$$

$$G = \langle \varphi_y, \varphi_y \rangle = 1 + f_y^2.$$

Desta forma, a área de R é dada por

$$\begin{aligned} A &= \iint_Q \sqrt{EG - F^2} \, dx \, dy \\ &= \iint_Q \sqrt{(1 + f_x^2)(1 + f_y^2) - (f_x f_y)^2} \, dx \, dy \\ &= \iint_Q \sqrt{1 + f_y^2 + f_x^2 + f_x^2 f_y^2 - f_x^2 f_y^2} \, dx \, dy \\ &= \iint_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy. \end{aligned}$$

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio deste estudo, acredita-se que respondemos a questão norteadora da pesquisa “Como utilizar conceitos relacionados a uma Superfície Regular $S \subset \mathbb{R}^3$, em um ponto $p \in S$, para calcular comprimento de curvas, ângulo entre vetores e áreas entre regiões?”. Como ferramenta para responder o problema, utilizou-se a primeira forma fundamental.

Desta forma, a partir da primeira forma fundamental, pode-se estudar tais questões métricas sobre a superfície, sem fazer referência ao espaço ambiente \mathbb{R}^3 . Conhecendo os coeficientes da primeira forma fundamental, consegue-se resolver de outra maneira questões que envolvem o comprimento de arco de uma curva, o ângulo entre vetores tangentes e a área de uma região limitada de uma superfície S .

O desenvolvimento deste trabalho foi de grande importância, visto que no curso não há a oferta da disciplina de Geometria Diferencial. Nesse sentido, foi um grande desafio e contribuiu muito para minha formação acadêmica. O conteúdo trabalhado não se esgotou com essa pesquisa, futuramente, almeja-se estudar orientação de superfícies, segunda forma fundamental, símbolos de Christoffel e o Teorema *Egregium* de Gauss.

REFERÊNCIAS

- [1] BOLDRINI, J. L. *et al.* **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: HARBRA , 1980.
- [2] BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 2012.
- [3] CARMO, M. P. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.
- [4] CIPOLATTI, R. **Cálculo Avançado**. Rio de Janeiro: SBM, 2018.
- [5] EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.
- [6] GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010.
- [7] KATZ, V. J. **História da Matemática**. 2. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.
- [8] LIMA, E. L. **Curso de análise vol. 2**. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [9] LIMA, E. L. **Análise real v. 2**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- [10] LIMA, R. F. **Topologia e análise no Espaço \mathbb{R}^n** . Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- [11] LIMA, R. F. **Introdução à Geometria Diferencial**. 1. ed. Macapá: SBM, 2016. PDF.
- [12] TENENBLAT, K. **Introdução à geometria diferencial**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2008.