



CONSIDERAÇÕES SOBRE A APLICAÇÃO DA EQUAÇÃO EULER PARA MÁQUINAS DE FLUXO MOTORAS AXIAIS: UMA NOVA PERSPECTIVA

Andrei Colussi, andrei.colussi@gmail.com¹

Sérgio Wortmann, sergio.wortmann@farroupilha.ifrs.edu.br¹

¹Instituto Federal do Rio Grande do Sul, Câmpus Farroupilha. Av. São Vicente – Cinquentenário, Farroupilha – RS, 95180-000.

Resumo: Neste trabalho se analisou a aplicação da equação de Euler, escrita em formulação global que fornece o salto energético do fluido em máquinas motoras axiais como uma função das velocidades desse fluido na entrada e saída das pás do rotor, conforme descrito na bibliografia Henn, 2006. Restou demonstrado que a expressão sugerida pelo citado livro só pode ser utilizada para Máquinas Radiais, sendo inviável para Axiais. Portanto, para Máquinas Axiais foi sugerida uma formulação alternativa cuja dedução apresentada é baseada na aplicação da Equação da Quantidade de Movimento Angular em um volume de controle, bem como a Equação da Conservação de Energia e a Eq. da Eficiência de Betz. A nova formulação de caráter analítico para as Máquinas Axiais mostrou-se factível.

Palavras-chave: Máquinas de Fluido, turbinas eólicas, Equação de Euler, Eficiência de Betz.

1. INTRODUÇÃO

Ao longo da história, a utilização da energia eólica e hidráulica disponível ajudou fortemente a evolução das civilizações no planeta. Destacando os mesopotâmicos, egípcios e gregos, que já utilizavam rodas d'água para moagem de grãos, irrigação e até mesmo em embarcações, onde se usará a energia eólica para a propulsão das velas (Santos, 2019).

Dos diferentes tipos de máquinas de fluxo existentes, podem-se citar como exemplo: bombas, compressores, turbinas, ventiladores e entre outros. Contudo, o presente estudo terá maior enfoque nas turbinas axiais, as quais tiveram inúmeras finalidades ao longo da história, desde moagem de grãos à geração de energia elétrica.

O uso da energia eólica, captada através das turbinas axiais, foi ficando cada vez mais desenvolvido e diversificado em suas aplicações, sendo que em destaque encontram-se os Países Baixos, com a utilização de moinhos de vento para a moagem de grãos e no bombeamento de água, onde a energia oriunda das hélices era transformada em energia mecânica através de engrenagens (Sanchez, 2015).

As máquinas de fluxo motoras axiais, que segundo Henn (2006, p.39) “são capazes de converter energia de fluido em energia mecânica num fluxo axial”, podem ser compreendidas pelas turbinas eólicas e hidráulicas. As mesmas tiveram um grande papel no desenvolvimento humano, proporcionando qualidade de vida e gerando riquezas ao meio onde foram empregadas, de modo que, ainda hoje, são amplamente utilizadas com o propósito de gerar energia elétrica de forma menos poluente que outros métodos.

Com o advento da eletricidade, os projetos de produção de energia elétrica, através de rotores axiais, ficaram cada vez mais ambiciosos a ponto de se criar aero geradores elétricos movidos pelas turbinas eólicas, as quais foram ganhando maior complexidade em seu formato. Isto se deu por conta dos constantes avanços da ciência e da engenharia, que posteriormente possibilitaram trabalhar melhor a geometria das pás a fim de aproveitar com mais eficácia a energia oriunda do vento. (Fadigas, 2011).

Os estudos voltados ao equacionamento e dimensionamento destes rotores (turbinas axiais) vêm sofrendo constantes evoluções, sendo cada vez mais comum a utilização de métodos computacionais para a realização dos projetos, visando uma produtividade mais eficaz (Santos, 2019).

No entanto, ainda assim, se esbarra na necessidade de uma análise das definições contidas na literatura acerca destas máquinas de fluxo. Este trabalho mostra algumas incoerências na equação fundamental das máquinas de fluxo. Verificou-se que para a energia específica, a equação se torna incompatível quando aplicada em turbinas axiais, conforme será demonstrado.

A motivação principal para a escrever este artigo deve-se a um episódio ocorrido na disciplina de Máquinas de Fluxo do curso de Engenharia Mecânica, do câmpus Farroupilha. Na ocasião, ao realizar uma das provas da disciplina, a qual abordava o dimensionamento de uma turbina axial, constataram-se problemas ao calcular o salto energético para este tipo de Máquina. O referido episódio ensejou o cancelamento da avaliação, apesar de que, segundo (Henn, 2006), era possível aplicar a Equação de Euler para todos os tipos de Máquinas de Fluido, mas ao realizar a questão o aluno concluiu que a aplicação da referida equação para as Máquinas Axiais era impossível.

Diante disso, o presente estudo tem por objetivo analisar a equação de Euler apresentada pelas literaturas (Henn, 2006 e Fox, 2008), a fim de demonstrar a sua inconsistência quando aplicada às Máquinas de Fluxo Axiais; bem como propor uma equação alternativa mais adequada a estes equipamentos, sendo está, expressa de forma analítica, possibilitando o seu uso em qualquer calculadora. Inicia com a fundamentação teórica, que contém a revisão do conceito de máquinas de fluxo e seus elementos, e segue com a análise da teoria do triângulo de velocidades e da equação de Euler, clássica das literaturas (Henn, 2006 e Fox, 2008). Em seguida, é apresentada uma análise que demonstra que o equacionamento sugerido na bibliografia consultada não pode ser usado no caso de turbinas axiais. Uma vez demonstrada a inconsistência, é proposto um novo equacionamento, a fim de torná-lo factível neste tipo de máquina.

2. MÁQUINAS DE FLUXO

2.1. Revisão Bibliográfica

Nos próximos parágrafos é apresentada uma amostra de trabalhos consultados relacionados às deduções da equação fundamental das máquinas de fluxo. É notável o baixo número de material presente na bibliografia que aborda o tema de forma analítica. Por outro lado, há um crescente número de publicações relacionadas à aplicação de métodos computacionais, como simulações, no qual é possível dimensionar este tipo de rotor.

Em Henn (2006) o assunto acerca das máquinas de fluido é tratado de forma bastante completa. É literatura clássica nesta área bastante citada em trabalhos acadêmicos. Ele apresenta as deduções das equações mais utilizadas em máquinas de fluxo em formulação global e a solução de vários exercícios de engenharia referentes ao tema. Porém, conforme já dito, a motivação básica deste trabalho consiste em fazer algumas considerações sobre a equação de Euler apresentada por Henn (2006), mais notadamente quando ela é aplicada em máquinas axiais.

Outra literatura clássica que aborda o tema de máquinas de fluido é o Fox (2008). Ela apresenta a demonstração da equação de Euler a partir do Princípio da Quantidade de Movimento Angular de um Volume de Controle, entretanto assim como Henn (2006) apresenta uma equação geral para as turbinas sem mostrar restrições quanto ao tipo de Máquina (axial ou radial).

Em Figueiredo (2020), um Trabalho de Conclusão de Curso que aborda o tema acerca do equacionamento utilizado para o dimensionamento de turbinas. Nele é apresentada a equação de Euler, que pode ser usada tanto para turbinas radiais como axiais, o rendimento da máquina e demais equações para a geometria das pás. Bem como os demais, Figueiredo (2020) também generaliza o uso da equação fundamental das máquinas de fluxo.

Nas demais bibliografias analisadas torna-se explícito o baixo número de material voltado ao equacionamento e dimensionamento analítico de máquinas motoras axiais. Na maior parte das vezes são aplicados métodos computacionais de simulação, como o estudo feito por Farias (2018), em que buscou melhorar o ganho energético de uma turbina eólica através de método Runge-Kutta de quarta ordem, o qual foi possível otimizar a angulação das pás na entrada e saída do fluido, possibilitando um melhor ganho energético.

Portanto, por mais que Henn (2006) e Fox (2008) apresentem uma expressão global para a equação de Euler, ambos não questionam ou mostram aplicações da formulação em Máquinas Axiais. Mais do que isso (Henn, 2006) diz que o equacionamento sugerido pode ser aplicado tanto para axial como para radial. Então cabe lembrar aqui que o principal objetivo deste estudo é justamente questionar a generalidade da equação apresentada nestas referências. A seguir será apresentado uma breve revisão sobre Máquinas de Fluxo e, posteriormente, a prova de que a equação não pode ser usada em máquinas axiais, bem como uma proposta de equacionamento alternativo usada para este tipo de Máquinas.

2.2. Definições das Máquinas de Fluxo e Máquinas de Fluido

“Máquina de fluido é o equipamento que promove a troca de energia entre um sistema mecânico e um fluido transformando energia mecânica em energia de fluido ou energia de fluido em energia mecânica” (Henn, 2006, p.33). No primeiro caso, em que há o aumento do nível energético de um fluido a partir do fornecimento de energia mecânica, costuma-se designar a máquina de máquina de fluido geratriz ou geradora. No segundo, em que a energia mecânica é

produzida a partir da redução do nível energético de um fluido, a máquina é usualmente chamada de máquina de fluido motriz ou motora. Sendo estas, simples considerações gerais, para maiores detalhes consultar o Henn (2006).

Para (Brasil, 2006, p.13), “o fluido de trabalho de uma máquina de fluxo pode estar confinado entre as fronteiras do sistema formado pelo conjunto de máquinas e dispositivos, ou escoar através destas fronteiras, o que caracteriza um volume de controle”. Assim, ao passar pela máquina, o fluido é submetido a trocas de energia devido aos esforços dinâmicos de um elemento rotativo, denominado rotor.

É importante ressaltar que há uma pequena diferença entre Máquinas de Fluido e de Fluxo. Conforme (Henn, 2006) as Máquinas de Fluido compreendem as Máq. de Fluxo e as de Deslocamento Positivo. Sendo as de Deslocamento Positivo aquelas que deslocam uma quantidade fixa de fluido para cada giro completo do rotor (equipamentos a pistão, bombas de engrenagem, etc), já os demais equipamentos centrífugos e axiais são chamados de Máquinas de Fluxo.

As máquinas de fluxo podem ser classificadas quanto à trajetória do fluido no rotor, sendo elas radiais e axiais. A Figura.1 demonstra os dois tipos de máquinas de fluxo.

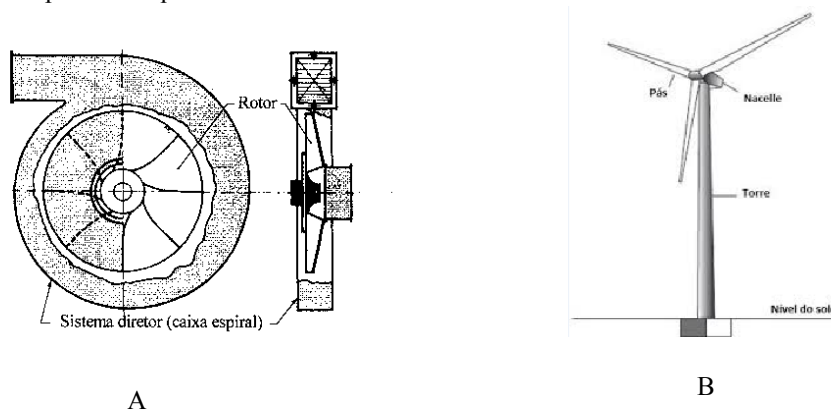


Figura 1. Modelos de máquinas de fluxo, (A) Exemplo de máquina radial (ventilador centrífugo), Fonte (Henn, 2006); (B) Exemplo de máquina axial (turbina eólica). Fonte (Guimarães, 2020).

Na subseção abaixo é mostrado a definição geral do triângulo de velocidades, bem como sua aplicação genérica à um rotor de uma Máquina de Fluxo.

2.3. Triângulo de velocidades

“O triângulo de velocidades é uma forma geométrica de expressar a equação vetorial que relaciona o movimento relativo com o movimento absoluto das partículas fluidas que percorrem o rotor de uma máquina de fluxo” (Henn, 2006, p. 52), como mostrado na figura 2. Esta ferramenta é indispensável para o estudo simplificado do complexo escoamento através das máquinas de fluxo, bem como para o objetivo do presente estudo, sendo necessário para as demonstrações das Equações de Euler. Vale ressaltar que o sistema O' tem um deslocamento relativo em relação ao O fixo.

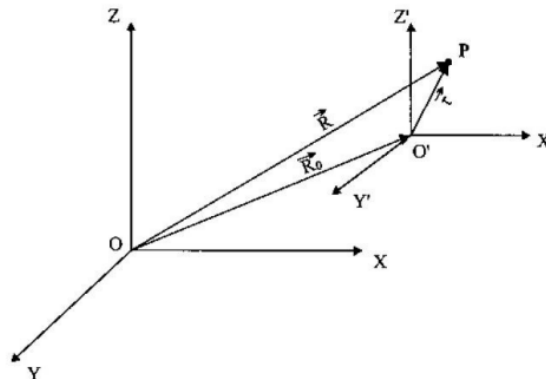


Figura 2. Sistema de coordenadas absoluto e relativo. Fonte (Henn, 2006).

A Equação (1) relaciona os vetores posição nos dois sistemas de referência, onde o vetor posição da partícula em relação à origem do sistema de coordenadas absoluto \vec{R} é a soma do vetor posição da partícula em relação à origem do

sistema de coordenadas relativo \vec{r} com o vetor posição da origem sistema relativo em relação à origem do sistema absoluto \vec{R}_0 .

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{r} \quad (1)$$

Derivando a equação (1) no tempo e realizando algumas manipulações algébricas, como mostrado em (Henn, 2006, p. 53), chega-se à equação (2) que governa o triângulo de velocidades, onde temos a velocidade absoluta do fluido \vec{c} , relativa (\vec{w} e tangencial do rotor \vec{u}).

$$\vec{c} = \vec{w} + \vec{u} \quad (2)$$

Após se entender os sistemas de coordenada e o movimento relativo das partículas no fluido, podemos visualizar na Figura 3 os triângulos de velocidades na entrada e na saída do rotor de uma máquina de fluxo geradora radial com suas componentes de velocidade e os ângulos de entrada e saída, além de entender melhor como ocorre a denominação dos pontos nas variáveis que irão aparecer. onde adotamos como ponto “3” para imediatamente antes da entrada no rotor, ponto “4” quando situadas imediatamente após a entrada do rotor, ponto “5” quando se encontram imediatamente antes da saída do rotor e ponto “6” para imediatamente após a saída do canal móvel.

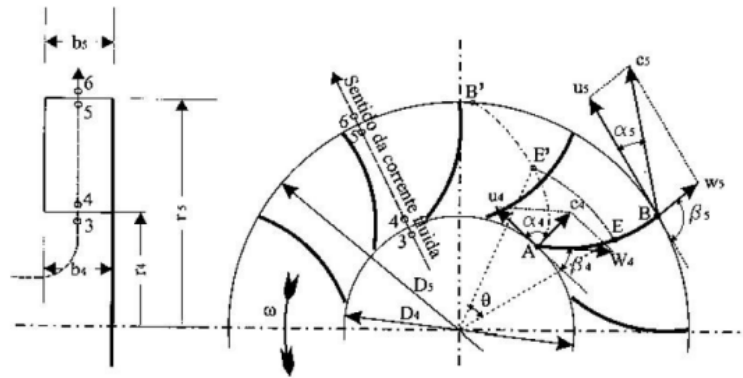


Figura 3. Triângulo de velocidades na entrada e saída do rotor de uma máquina de fluxo radial. Fonte (Henn, 2006).

Por fim, após a visualização do triângulo de velocidades aplicado a um rotor de máquina de fluxo, a figura 4 traz um triângulo genérico com todas as suas propriedades e definições, destacando seus componentes, possibilitando a melhor visualização e aplicação de equações usadas posteriormente.

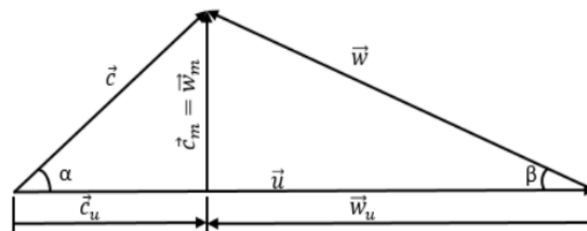


Figura 4. Triângulo de velocidades genérico. Fonte (Autor).

Onde:

\vec{u} = velocidade tangencial do rotor;

\vec{c} = velocidade absoluta da corrente fluida;
 \vec{w} = velocidade relativa (ao rotor) da corrente fluida (tangente à pá);
 α = ângulo formado pelos vetores \vec{u} e \vec{c} (ângulo de ataque ou de fuga do fluido);
 β = ângulo formado pelos vetores \vec{w} e \vec{u} , ou seja, ângulo de inclinação das pás;
 \vec{c}_u = componente tangencial da velocidade absoluta;
 \vec{c}_m = componente meridiana da velocidade absoluta;
 \vec{w}_m = componente meridiana da velocidade relativa;
 \vec{w}_u = componente tangencial da velocidade relativa.

3. EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DAS MÁQUINAS DE FLUXO

3.1. Equação Fundamental das Máquinas de Fluxo para um número infinito de pás

Também chamada de “Equação de Euler”, a “Equação Fundamental para as Máquinas de Fluxo” (Henn, 2006, p.63) define a energia que o fluido recebe ou cede ao passar pelo rotor da máquina. Essa equação considera um número de pás infinito, onde o escoamento se dá em um regime permanente e sem perdas de energia durante as transformações.

Henn (2006), bem como Fox (2008) nos apresentam essa equação para máquinas de fluxo geradoras radiais e axiais na forma de salto energético específico ou trabalho específico ($Y_{p\infty}$), ou seja, para um número infinito de pás e sem perdas, como descrito na equação abaixo, onde c_u representa a componente tangencial da velocidade absoluta. Conforme visto na Fig. 4.

$$Y_{p\infty} = u_5 c_{u5} - u_4 c_{u4} \quad (3)$$

Os autores também apresentam uma equação para máquinas de fluxo motoras, representada abaixo pela Equação (4), sua diferença nada mais é que a troca do sinal em relação a geradora. Bem como na equação anterior, as bibliografias dizem que esta pode ser usada tanto para máquinas radiais como axiais, não apresentando limitações em suas aplicações.

$$Y_{p\infty} = u_4 c_{u4} - u_5 c_{u5} \quad (4)$$

3.2. Dedução da Equação Fundamental das Máquinas de Fluxo radiais para um número infinito de pás

Nesta subseção será realizada a demonstração das Eq. (3) e (4), apresentadas por Henn (2006) e Fox (2008).

A ferramenta utilizada para a demonstração será a aplicação da equação da quantidade de movimento angular em um volume de controle, onde o volume de controle é o rotor radial da Máquina de Fluxo, com entrada e saída, considerando um número infinito de pás. Para tanto, as hipóteses simplificadoras são: 1 - escoamento invíscido, 2 - regime permanente, 3 - velocidades do fluido tomadas pelos seus valores médios e 4 - escoamento incompressível.

A equação (5) pode ser definida pela Quantidade de Movimento Angular em um Volume de Controle, em que o operador "x" se refere ao produto vetorial, e o operador "." se refere ao produto escalar.

$$\vec{r} \times \vec{F}S + \int_{V.C} (\vec{r} \times \vec{g}) \rho dV + \vec{T}e = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C} (\vec{r} \times \vec{v}) \rho dV + \int_{S.C} (\vec{r} \times \vec{v}) (\rho \vec{v} \cdot d\vec{A}) \quad (5)$$

Aplicando a equação (5) em um rotor radial de uma Máquina de Fluxo, bem como as hipóteses simplificadoras, tem-se: por hipótese, considera-se um escoamento invíscido, onde o torque devido às forças cisalhantes superficiais é nula, ou seja, não temos a presença de atrito do fluido sobre a superfície. Portanto,

$$\vec{r} \times \vec{F}S = 0. \quad (6)$$

Devido a hipótese de regime permanente a derivada temporal é nula.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C} (\vec{r} \times \vec{v}) \rho dV = 0 \quad (7)$$

Como o rotor é simétrico, não se tem o efeito da força peso, portanto,

$$\int_{V.C} (\vec{r} \times \vec{g}) \rho dV = 0. \quad (8)$$

Zerando as hipóteses simplificadoras a Equação (5) fica

$$\vec{T}e = \int_{S.C} (\vec{r} \times \vec{v}) (\rho \vec{v} \cdot \vec{d}A). \quad (9)$$

Em que T_e é definido como torque de eixo, ou seja, a equação resultante acima nos diz que ao aplicar um torque sob um eixo, tem-se a presença de uma quantidade de movimento angular no rotor, sendo ela uma máquina geradora. Já para uma máquina motora, ao momento que o fluido passa pelo rotor, o mesmo gera uma quantidade de movimento angular, produzindo, assim, o torque de eixo.

Portanto para a resolução da equação (9), inicialmente é feita a definição das superfícies do volume de controle, e uma análise dos vetores r e v , nas duas superfícies de controle. A velocidade absoluta v será renomeada como c , e por fim usando a definição de produto vetorial, como a área (vetorial) do paralelogramo e, ainda, tomando seu módulo

$$|\vec{r} \times \vec{v}| = |\vec{r}| |\vec{c}| \text{sen}(\theta). \quad (10)$$

Em que θ seja o ângulo formado entre o vetor raio, perpendicular a superfície e a velocidade absoluta c , sendo ela a velocidade de entrada e saída do fluido. Como representado na figura abaixo, bem como as superfícies de controle, representadas pelo tracejado vermelho. Importante ressaltar que na Figura. abaixo, todas as representações são vetores. Não carregam o símbolo na escrita por motivos de poluição visual, tornando-se mais clara e compreensiva.

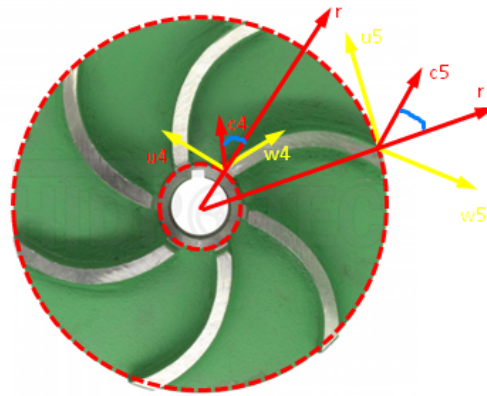


Figura 5. Representação do ângulo formado entre o raio e a velocidade absoluta do fluido na entrada e saída, bem como a representação das superfícies de entrada e saída. Fonte (Autor).

Fazendo uma análise dos vetores de velocidade apresentados na figura e aplicando-os em um triângulo de velocidades genérico, a fim de entender os ângulos entre os vetores temos que, por definição, o ângulo formado entre \vec{c} e \vec{u} é α . Como representado na Figura 4:

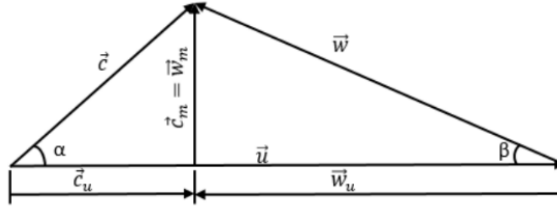


Figura 4. Triângulo de velocidades genérico. Fonte (Autor).

Diante do exposto nas figuras, é possível concluir que o ângulo θ (ângulo formado entre \vec{r} e \vec{c}), para as duas superfícies de controle seja definido em função de α , sendo ele

$$\theta = (90^\circ - \alpha).$$

Aplicando na equação escalar apresentada acima e usando as identidades trigonométricas, temos

$$|\vec{r} \times \vec{v}| = |\vec{r}| |\vec{c}| \text{sen}(90^\circ - \alpha) = |\vec{r}| |\vec{c}| \cos(\alpha). \quad (11)$$

Usando a definição de \vec{c}_u do triângulo de velocidades, é possível afirmar que

$$|\vec{c}| \cos \alpha = \vec{c}_u. \quad (12)$$

Portanto,

$$|\vec{r} \times \vec{v}| = |\vec{r}| |\vec{c}_u| = r \cdot c_u. \quad (13)$$

Feita a análise da primeira etapa de resolução da equação (9), basta agora resolver o segundo termo, o da vazão volumétrica nas duas superfícies de controle, abordadas a seguir de forma separadas.

Para a superfície 4 (entrada), o termo da vazão se torna, com a velocidade sendo definida por \vec{c} , então

$$(\vec{v} \cdot \vec{dA}) = \vec{c}_4 \cdot \vec{dA}_4. \quad (14)$$

Utilizando a definição de produto escalar na equação acima, a mesma pode ser escrita em termos escalares, como sendo

$$\vec{c}_4 \cdot \vec{dA}_4 = |\vec{c}_4| |\vec{dA}_4| \cos(\theta). \quad (15)$$

Sendo θ o ângulo formado entre os vetores \vec{c}_4 e \vec{dA}_4 , como representado abaixo, e que os vetores pertencentes a superfície 4 estão todos no plano perpendicular ao eixo do rotor.

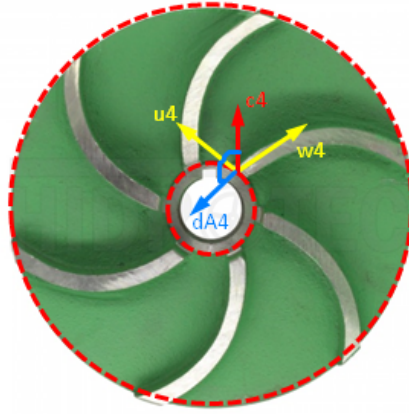


Figura 6. Representação dos vetores da superfície 4, bem como o ângulo formado entre o vetor de diferencial de área e a velocidade absoluta do fluido na entrada do rotor (ponto 4). Fonte (Autor).

Portanto sabendo que a velocidade tangencial \vec{u} é perpendicular ao vetor diferencial de área, e que o ângulo entre \vec{u} e \vec{c} é α , θ pode ser definido como

$$\theta = (90^\circ + \alpha).$$

Então substituindo na equação, temos

$$\left| \vec{c}_4 \right| \left| d\vec{A}_4 \right| \cos\theta = C_4 dA_4 \cos(90^\circ + \alpha). \quad (16)$$

Usando as definições trigonométricas na equação acima, se obtém

$$C_4 dA_4 \cos(90^\circ + \alpha) = -C_4 dA_4 \sin(\alpha). \quad (17)$$

Aplicando a definição de C_m (componente meridiana da velocidade absoluta), mostrada no triângulo de velocidade genérico é possível afirmar que:

$$C_4 \sin(\alpha) = C_{m_4}.$$

E por fim substituindo tudo na equação da vazão volumétrica para a entrada 4, se obtém

$$\left| \vec{c}_4 \right| \left| d\vec{A}_4 \right| \cos\theta = -C_{m_4} dA_4. \quad (18)$$

Da maneira semelhante, este procedimento é aplicado a saída de fluido 5, porém neste caso o ângulo do diferencial de área é no sentido oposto o da entrada 4, resultando em um θ sendo $(90^\circ - \alpha)$, o qual altera o sinal do termo da vazão volumétrica, representado por:

$$\left| \vec{c}_5 \right| \left| d\vec{A}_5 \right| \cos\theta = C_{m_5} dA_5. \quad (19)$$

Uma vez definidos os termos necessários para a resolução da equação (9), apenas substituímos os mesmos para as duas superfícies de controle, considerando um rotor ideal sem perdas e com um número infinito de pás ($T_{p\infty}$), como mostrado abaixo:

$$T_{p\infty} = - \int_{A_4} r_4 C_{u4} \rho C_{m4} dA_4 + \int_{A_5} r_5 C_{u5} \rho C_{m5} dA_5. \quad (20)$$

Por estar em regime permanente, a vazão mássica (taxa de massa no tempo, dm/dt) do fluido é constante, ou seja, a vazão é a mesma para as duas entradas.

$$\rho C_m A = \dot{m}$$

Portanto,

$$T_{p\acute{a}\infty} = \dot{m}(r_5 C_{u5} - r_4 C_{u4}). \quad (21)$$

Multiplicando os dois lados da equação por ω (velocidade angular), aplicando a definição $\omega r = u$ e que $Pe = T\omega$, temos:

$$Pe_{p\acute{a}\infty} = \dot{m}(u_5 C_{u5} - u_4 C_{u4}). \quad (22)$$

Por fim, analisando as unidades, onde potência de eixo dividida pela vazão mássica, se torna o salto energético específico do fluido.

$$Y_{p\acute{a}\infty} = u_5 c_{u5} - u_4 c_{u4} \quad (3)$$

Conforme a Henn (2006) a equação (3) é intitulada como a Equação Fundamental das Máquinas de Fluxo Geradoras. Para as motoras, é usado o mesmo procedimento de demonstração, porém há uma inversão de sinal nos termos da equação, pois se inverte entrada com saída, culminando na equação (4), definida como Equação Fundamental das Máquinas de Fluxo Motoras.

$$Y_{p\acute{a}\infty} = u_4 c_{u4} - u_5 c_{u5} \quad (4)$$

3.2.1. Aplicação da Equação Fundamental das Máquinas de Fluxo para um número infinito de pás em um exemplo acadêmico fictício

Como já exposto anteriormente, (Henn, 2006, p.66) traz a equação (4) como formulação global das Máquinas de Fluxo Motoras, não apresentando nenhuma restrição quanto à sua aplicação, mencionando que “aplicando o raciocínio análogo a um escoamento de fluido através de um rotor de turbina, chega-se a Equação Fundamental das Máquinas de Fluxo Motoras”. Não mencionando exceções quanto ao tipo de turbina, e sim possibilitando ser usadas para qualquer máquina motora (axial ou radial).

Contudo ao aplicar a equação (4) em um exemplo acadêmico fictício qualquer de uma turbina eólica (Máquina Motora Axial), em que a velocidade absoluta do fluido na entrada é perpendicular ao plano da área da hélice, notam-se incompatibilidades. Este exemplo hipotético é exemplificado na Figura abaixo.

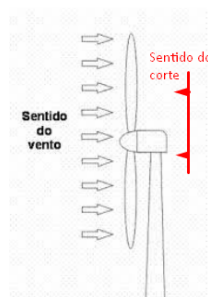


Figura 7. Representação esquemática do exemplo acadêmico fictício de uma turbina eólica (vista lateral do rotor, para observação em corte) . Fonte (Autor).

A análise no triângulo de velocidades na seção transversal de uma das pás, na vista do plano lateral do corte, é representada pela figura abaixo.



Figura 8. Representação das velocidades e do triângulo de velocidades na entrada da pá da turbina. Fonte (Autor).

Onde:

\vec{c}_4 = velocidade absoluta do fluido;

\vec{u}_4 = velocidade tangencial do rotor;

\vec{w}_4 = velocidade relativa (tangencial a curvatura da pá).

Com isso, é possível, através da definição do triângulo de velocidades afirmar que o módulo do vetor C_{u4} (componente tangencial da velocidade absoluta) seja zero e C_{m4} (componente meridional da velocidade absoluta) = C_4 .

Portanto, com as componentes de velocidades conhecidas, aplicando-as na Equação (4), temos

$$Y_{pá\infty} = (-u_5 C_{u5}).$$

Conclui-se que se a equação (4) fosse aplicada a este exemplo de uma máquina axial motora, o ganho de energia para quando \vec{c}_4 for perpendicular ao plano da área da hélice, é negativo. Esta afirmação implica que ela não deve estar ganhando energia do fluido e sim perdendo energia para o mesmo, ou seja, a turbina (motora) tornar-se-ia um ventilador (geradora).

Então, conforme está provado acima, a Equação (4) não pode ser usada para uma máquina geradora axial a despeito de haver literatura afirmando o contrário. Isto se deve, pois, a abordagem da equação empregada é apenas voltada ao salto energético ($Y_{pá\infty}$) fornecido pela energia cinética oriunda das velocidades presentes nas fronteiras do rotor, dispensando a energia devido a diferença de pressão no volume de controle.

A Figura abaixo representa de forma esquemática o fluxo do fluido quando submetido a uma turbina axial.

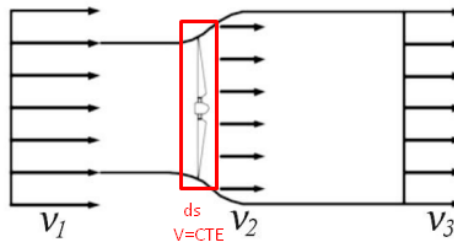


Figura 9. Representação do comportamento do fluido em uma turbina axial, mostrando a disposição das velocidades e espessura infinitesimal analisada pela equação (4), que possui velocidade constante. Fonte (Autor).

Através da Figura 9 é possível compreender que, analisando o rotor de espessura assumida infinitesimal, o salto energético presente se dá pela diferença de pressão. Esta afirmação vem do fato que na espessura, ds , do rotor, a velocidade meridiana de entrada é igual a de saída, satisfazendo assim a Equação da Continuidade. Ou seja, sendo o escoamento incompressível a vazão mássica se mantém constante. Além disso, por possuir as mesmas áreas de entrada e saída, as velocidades também se mantêm iguais. Desta forma, a energia que o rotor obtém do fluido só pode ser da diferença de pressão entre a entrada e saída do mesmo.

Por outro lado, fazendo uma análise de forma macro é possível deduzir que, quando as fronteiras do volume de controle estão no ponto 1 e 3, a energia específica ($Y_{pá\infty}$) presente se dá pela diferença das velocidades.

Dito isto, é possível verificar a existência de dois meios possíveis de dedução de equacionamento para turbinas axiais, sendo elas as que estão livres no ambiente (turbinas eólicas), e as que absorvem energia vinda da diferença de pressão, como as contidas em um tubo de seção constante.

Para tanto, as próximas duas seções abordarão a dedução do equacionamento a ser utilizado. Sendo o primeiro, baseado na diferença de pressão e o segundo na diferença de energia cinética.

3.3. Aplicação da Equação da Conservação da Energia em um Volume de Controle para um rotor axial de pás infinitas e sem perdas

O salto energético de uma Máquina de Fluxo Motora Axial (turbina) provém da diferença de energia cinética e/ou da diferença da pressão entre a entrada e saída do rotor. Porém, no caso da Figura 9 (abordagem de uma seção infinitesimal onde a velocidade meridional de entrada e saída é constante) e, Figura 10 mostrada abaixo, em que a velocidade (C_m) é constante, a energia transmitida ao rotor vem essencialmente da diferença de pressão da entrada e saída do mesmo. Abaixo é exposta a dedução da energia específica que leva em consideração a ΔP (diferença de pressão).

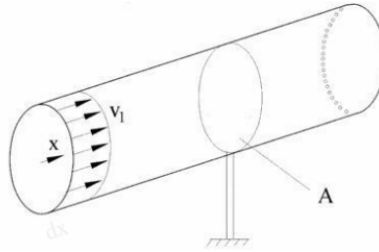


Figura 10. Representação do escoamento de fluido em volume de controle para turbinas axiais interiores a tubos de seção constante. Fonte (Autor).

Será aplicada aqui a Equação da Conservação de Energia em um Volume de Controle. Para tal considera-se o volume de controle como o rotor axial da Máquina de Fluido (Figura 9), bem como é assumido um processo reversível e um número infinito de pás. Para tanto, as hipóteses simplificadoras são: 1 - sem transferência de calor, 2 - regime permanente, 3 - escoamento invíscido e 4 - escoamento incompressível.

A Equação da Conservação de Energia em um Volume de Controle em formato global é

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eixo} - \dot{W}_{cis.} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C} (e) \rho dV + \int_{S.C} (e + P/\rho) (\rho \vec{v} \cdot \vec{dA}). \quad (23)$$

Onde e é a energia associada ao fluido (interna “u”, cinética “v” e potencial “z” respectivamente), definida por

$$e = u + v^2/2 + gz. \quad (24)$$

Aplicando as hipóteses simplificadoras e substituindo a equação da energia acima (em que $\Delta u=0$, devido a não ter diferença de temperatura entre entrada e saída) em (9), obtemos:

$$- \dot{W}_{eixo} = \int_{S.C} (v^2/2 + gz + P/\rho) (\rho \vec{v} \cdot \vec{dA}). \quad (24)$$

O sinal negativo do primeiro membro da equação é uma convenção de sinal para trabalho em um volume de controle. Outro ponto a ser observado é que não existe diferença de energia associada à diferença de potencial ($Z_4=Z_5$) e, por fim, aplicando o produto escalar da vazão na entrada e saída como já explicado em deduções anteriores (figura 9).

$$Pe_{pá\infty} = \int_{A4} (C_4^2/2 + P_4/\rho) (\rho C_{m4} dA_4) + \int_{A5} (C_5^2/2 + P_5/\rho) (\rho C_{m5} dA_5) \quad (25)$$

Resolvendo as integrais, sem esquecer que não há variação das áreas de entrada e saída, e aplicando as definições de vazão mássica, bem como a de salto energético é possível concluir que

$$Y_{p\acute{a}\infty} = (C_5^2 - C_4^2)/2 + (P_5 - P_4)/\rho. \quad (26)$$

Por sua vez, segundo (Henn, 2006) a Equação (26) também é considerada Equação Fundamental das Máquinas De Fluxo, em que nos traduz basicamente que a troca de energia oriunda do fluido é devido à diferença de pressão e/ou de energia cinética. Para os dois casos mostrados nas Figuras 9 e 10, desprezando a variação de energia cinética, a equação pode se resumir a

$$Y_{p\acute{a}\infty} = (\Delta P_{4-5})/\rho. \quad (27)$$

Usando mesmo raciocínio exposto até aqui, com o intuito de poder aplicá-lo a uma turbina exposta ao ambiente onde $\Delta P=0$ (aberta para o ambiente), ou seja, a energia absorvida é apenas da ΔE_c . Para isto é considerado o volume de controle finito representado na Figura 11, o qual aborda as velocidades vistas de uma maneira macro. Pode-se comprovar experimentalmente que a seção circular paralela ao rotor aumenta em área quando passa pelo rotor.

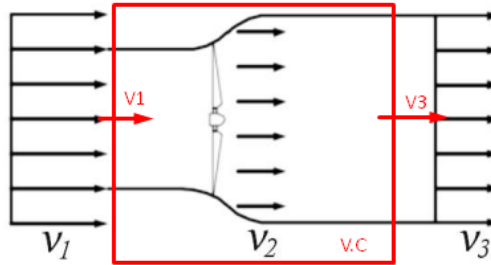


Figura 11. Representação do volume de controle finito (Autor).

Aplicando a Equação (26) para o V.C (volume de controle) e usando todos os métodos e definições mostrados acima é possível chegar no seguinte resultado.

$$Y_{p\acute{a}\infty} = (C_1^2 - C_3^2)/2. \quad (28)$$

O resultado acima mostra o ganho energético obtido através da diferença de energia cinética presente nas superfícies de controle, porém é insuficiente para uma abordagem totalmente analítica, visto que a velocidade (V_3) é desconhecida *a priori*. Dito isto, na próxima seção é realizado um equacionamento que possibilita calcular o salto energético em função de V_1 apenas.

3.4. Demonstração da potência de uma turbina axial oriunda da energia cinética proposta por Betz

Utilizando o volume de controle proposto na Figura 11 (considerando um processo reversível) e aplicando as definições de energia cinética e derivando em função do tempo, se tem.

$$E_c = 1/2(mv^2). \quad (29)$$

Derivando no tempo.

$$P = 1/2(\dot{m}v^2). \quad (30)$$

Onde:

P = Potência;

\dot{m} = Vazão mássica.

Considerando que por definição em todo o volume de controle a vazão mássica é constante e vale $\rho vA = \dot{m}$, é possível obter a potência através da energia cinética de entrada V_1 .

$$P = 1/2(A\rho v^3) \quad (31)$$

Ou seja a energia cinética total do fluido que passa pelo rotor axial é dada pela equação acima, porém a mesma não é aproveitada por completo, segundo, (Terciote, 2002, p.3), “pode-se imaginar que a máxima energia retirada dos ventos por

uma turbina eólica é a energia cinética dos ventos que atravessam um círculo formado pela área das pás. Porém, o vento ainda possui velocidade (energia cinética) na esteira do rotor e, desta forma, nem toda energia é retirada dos ventos”. Ou seja, existe um valor máximo de energia cinética que pode ser retirado do fluido (demonstração descrita a seguir), representado por um coeficiente de performance (C_p) associado a Equação (31).

$$P = 1/2(A\rho v^3)C_p \quad (32)$$

Partindo da definição de força e aplicando as expressões para vazão mássica constante em qualquer ponto, é possível concluir que

$$F = ma = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{m}{\Delta t} \Delta v = \dot{m} \Delta v = A\rho v_2(v_1 - v_3). \quad (33)$$

Onde Δv é dado pela diferença de velocidades na entrada e saída. Então pela definição de potência no ponto 2 (rotor), é possível afirmar que,

$$P_2 = F_2 \frac{dx}{dt} = F_2 v_2. \quad (34)$$

Então substituindo a força na equação da potência, chega-se a

$$P_2 = F_2 v_2 = A\rho v_2^2(v_1 - v_3). \quad (35)$$

Assim como a equação (31), a (35) representa a potência oriunda da energia cinética do fluido, porém em função das velocidades 1, 2 e 3, em que as últimas duas são desconhecidas *a priori*, porém de acordo com o teorema Rankine (1865) e Froude (1885), a velocidade v_2 é calculada através da média aritmética entre as velocidades de entrada e saída da turbina, sendo v_1 e v_3 respectivamente. Chamando de “x” a razão de v_3 e v_1 .

$$v_2 = \frac{(v_1 + v_3)}{2}$$

Portanto, assumindo a razão de velocidades definidas.

$$v_2 = \frac{(v_1 + v_3)}{2} = \frac{v_1}{2}(1 + x). \quad (36)$$

$$(v_1 - v_3) = v_1(1 - x). \quad (37)$$

Substituindo tudo na equação (35), é possível obter.

$$P_2 = \frac{1}{2}A_2 \rho v_1^3 \frac{1}{2}(1 + x)(1 - x^2). \quad (38)$$

Por observação da Equação (32), pode-se dizer que

$$C_p = \frac{1}{2}(1 + x)(1 - x^2). \quad (39)$$

O C_p (coeficiente de performance) possui um valor máximo mesmo em um processo reversível, podendo ser determinado pela teoria dos máximos e mínimos locais de uma função. Dito isso, derivando-o e igualando-o a zero, a função apresenta seu máximo em $x=1/3$. Implicando em um C_p máximo teórico possível de

$$C_p(1/3) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) = \frac{16}{27}. \quad (40)$$

Logo, para um processo reversível (ideal), ou seja, onde não há perdas e possuindo um ângulo de pás ideal, chegamos à máxima energia cinética teórica cedida pelo fluido em uma turbina eólica.

$$P_2 = \frac{1}{2}A_2 \rho v_1^3 \frac{16}{27} \quad (41)$$

Entretanto, para aplicações reais (processo irreversível), a equação mostrada acima se torna ineficaz, pois a mesma não leva em consideração o ângulo de inclinação das pás, o tamanho do raio do rotor, perdas mecânicas, etc. Dito isso, é possível quantificar as consequências das perdas e configuração do rotor através do modelo matemático proposto por Heier (2014), onde apresenta a seguinte equação para a energia cinética total aproveitável em uma turbina eólica.

$$P_m = \frac{1}{2} C_p(\beta, \lambda) A \rho v^3 \quad (42)$$

Onde:

P_m = Potência Mecânica;

$C_p(\beta, \lambda)$ = Coeficiente de performance dependente dos parâmetros (β, λ) como seu máximo valor sendo 16/27;

β = Ângulo de inclinação das pás do rotor;

λ = Razão de velocidades, dada pela Equação (43).

$$\lambda = \frac{\omega r}{v} \quad (43)$$

Sendo, ω a velocidade angular do rotor, r o raio do mesmo e v , a velocidade do vento. Por fim, o modelo proposto apresenta a definição de $C_p(\beta, \lambda)$ sendo.

$$C_p(\beta, \lambda) = C_1 \left(\frac{c_2}{\lambda_i} - c_3 \beta - c_4 \beta^{c_5} - c_6 \right) e^{-\frac{c_7}{\lambda_i}} \quad (44)$$

Em que:

$$\lambda_i = \frac{1}{\frac{1}{\lambda + c_8 \beta} - \frac{c_9}{\beta^3 + 1}} \quad (45)$$

Os parâmetros c_i mostrados são apresentados pela tabela abaixo, vale ressaltar que o modelo proposto por Heier (2014), não prevê a variação na inclinação das pás na entrada e saída, ou seja, o mesmo considera o β constante ao longo da pá.

Tabela 1. Valores propostos para os parâmetros c_i , usados no cálculo de C_p e λ . Fonte (Heier, 2014).

C_i	C_1	C_2	C_3	C_4	C_6	C_7	C_8	C_9
Valores	0,5	116	0,4	0	5	21	0,08	0,035

O referido autor mostra também os coeficientes de performance, gerados a partir dos parâmetros mostrados. No gráfico abaixo é possível ver o comportamento de C_p em relação ao ângulo da pá.

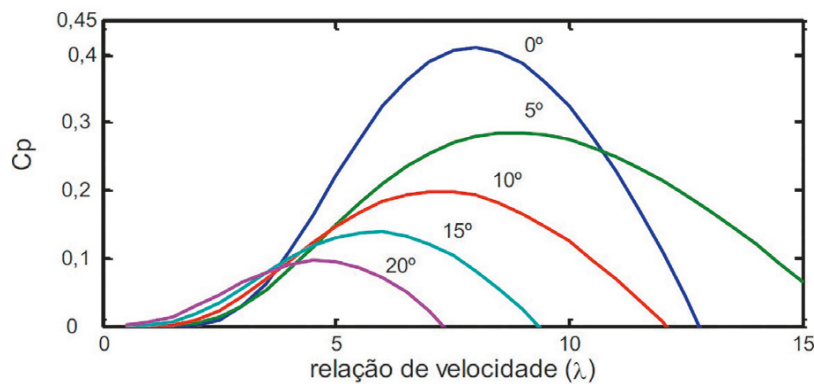


Figura 12. Coeficientes de performance de turbinas eólicas. Fonte (Heier, 2014).

O gráfico exposto acima, oriundo da Equação (44), o qual nos traduz que, o máximo aproveitamento da energia cinética do vento se dá quando a direção do fluxo do fluido no rotor for perpendicular ao seu raio. Outro ponto de análise é a existência de uma relação de velocidades (λ) à qual, apresenta o valor aproximado de 12,75.

4. CONCLUSÃO

Acerca do apresentado, é possível concluir que a generalização da Equação de Euler para as Máquinas de Fluxo é questionável, sendo inviabilizada para as Máquinas Axiais, devido a abordagem que leva em consideração apenas a diferença de energia cinética no rotor. Diante disto é notável a coerência da aplicabilidade do equacionamento proposta pela

literatura a uma Máquina Radial, onde as áreas de entrada e saída do rotor variam, alterando as velocidades nas fronteiras do rotor. Porém para um rotor axial, em que as áreas de entrada e saída são iguais, o ganho energético provém da diferença de pressão.

Portanto, as soluções mostradas buscaram servir como alternativa a incompatibilidade apresentada pela Equação de Euler, sendo possível aplicá-las em rotores expostos ao ambiente, quanto aos contidos em tubulações.

Tendo em vista a pequena disponibilidade de recursos (demonstrações e aplicações analíticas) presentes na bibliografia, a metodologia aplicada no estudo se mostrou clara, objetiva e viável, atendendo a proposta inicial do mesmo, proporcionando assim, novas possíveis soluções e formas de abordar os problemas relacionados a este tipo de Máquinas, além de contribuir para um acréscimo na disponibilidade de material teórico acerca do tema.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BRASIL, Alex N., Máquinas Termohidráulicas de Fluxo, disponível em <alexbrasil.com.br>, acessado em 17/03/2023.
- BURTON, T. et al. Wind Energy Handbook. Segunda edição. ed. West Sussex: [s.n.], 2001.
- FADIGAS, E. Energia Eólica. 1ª Edição. São Paulo: Editora Manole Ltda., 2011. 356 p.
- FARIA, Geovanne Silva et al. Simulação computacional de escoamentos bidimensionais sobre turbinas eólicas de eixo vertical. 2018.
- FIGUEIREDO, Antonio Augusto de Carvalho. Heat and Fluids: Application of dimensional analysis and fluid direction in turbomachinery. 2020. 30 F. Course Conclusion Work (Graduation in Mechanical Engineering) - Faculdade Pitágoras, Poços de Caldas, 2020.
- FOX, R.; Pritchard, P. J. e McDonald, A. T. Introdução a Mecânica dos Fluidos. 7a ed. LTC, Rio de Janeiro, 2011.
- GUIMARÃES, Julliana Alves. Análise Dinâmica de Torre Eólica e Dimensionamento de Amortecedor de Massa Sintonizada. 2020. Tese de Doutorado. Instituto Politécnico de Bragança (Portugal).
- HEIER, Siegfried. Integração na rede de energia eólica: sistemas de conversão onshore e offshore. John Wiley & Filhos, 2014.
- HENN, Érico Antônio Lopes. Máquinas de Fluido, 2ª edição. Santa Maria: UFSM, 2006.
- SANCHES, Celso Berton. Energia Eólica. 2015. Unesp. Disponível em: <https://www.feis.unesp.br/#!/departamentos/engenharia-eletrica/pesquisas-e-projetos/eco2/fontes-de-energia/eolica/>. Acesso em: 15 mar. 2023.
- SANTOS, Vinícius Gajdeczka dos. Dimensionamento e proposta de melhoria do rotor de um ventilador centrífugo: estudo de caso. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
- TERCIOTE, Ricardo. Eficiência Energética de um Sistema Eólico Isolado.[SI], 2002.

ABSTRACT

Andrei Colussi, andrei.colussi@gmail.com¹

Sérgio Wortmann, sergio.wortmann@farroupilha.ifrs.edu.br¹

¹Federal Institute of Education, Science and Technology of Rio Grande do Sul - Farroupilha Campus, São Vicente Avenue, 785, Bairro Cinquentenário, CEP 95180-000, Farroupilha – RS

Abstract. *This study examines the application of Euler Equation, written in a global formulation that provides the energy jump of the fluid in axial flow machines as a function of the fluid velocities at the inlet and outlet of the rotor blades, as described in the Henn (2006) bibliography. It has demonstrated that, the expression suggested by the aforementioned literature, cannot be used, and an alternative formulation has been proposed, whose deduction is based on the application of the Equation of Angular Momentum in a control volume, along with the Equations of Energy Conservation and the Betz Efficiency. After analyzing the results, it is concluded that the proposed equation is consistent with expectations.*

Keywords: *Fluid Machinery, wind turbines, Euler Equation, Betz Efficiency.*