

INSTITUTO FEDERAL
Rio Grande do Sul
Campus Farroupilha

OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS RETICULADAS INCLUINDO OS EFEITOS DA NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA NA ANÁLISE ESTRUTURAL

Rodrigo Pereira, rodrigoopereira@gmail.com¹

Adelano Esposito (orientador), adelano.esposito@farroupilha.ifrs.edu.br¹

¹Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, Campus Farroupilha - Av. São Vicente 785, Farroupilha – RS. CEP 95180-000.

Resumo: *A crescente competitividade no ramo industrial tem levado as indústrias buscarem por métodos mais eficientes de fabricação e redução de custos em geral. Tratando-se de estruturas metálicas, essa redução de custo, normalmente, está associada à redução de massa da estrutura, a qual é obtida com a utilização de elementos estruturais esbeltos. Assim, a fim de garantir maior segurança a esses sistemas, a consideração das ocorrências de flambagem e os comportamentos não lineares da estrutura, tornam-se fatores decisivos para um projeto adequado às condições reais de utilização. Nesta conjuntura, o presente trabalho teve como objetivo a implementação numérica de um algoritmo de otimização metaheurístico considerando, na análise estrutural, o comportamento linear e não linear geométrico de treliças planas e espaciais. Atendendo a esse propósito, realizou-se inicialmente uma breve fundamentação teórica sobre: análise estrutural; método dos elementos finitos para análise linear e não linear geométrica de elementos de barra; problemas de otimização e métodos para solução dos mesmos. Posteriormente, realizou-se a implementação de modelos numéricos para análise estrutural, os quais foram incorporados a um algoritmo de otimização por enxame de partículas. Por fim, desenvolveu-se uma interface gráfica para entrada dos dados e visualização dos resultados da otimização estrutural. Para validação dos modelos implementados, exemplos comuns da literatura foram analisados e comparados. Os resultados obtidos foram condizentes aos presentes na literatura, assim verificou-se que os modelos implementados estão operando corretamente. Notou-se o quão significativo é a consideração dos critérios de flambagem na análise de estruturas esbeltas, uma vez que uma única barra que venha sofrer os efeitos de flambagem pode influenciar no comportamento de todas as demais barras da estrutura.*

Palavras-chave: *otimização estrutural, análise estrutural, não linearidade geométrica, método dos elementos finitos, PSO.*

1. INTRODUÇÃO

A criação e aprimoramento de estruturas, máquinas, materiais e processos estão entre as principais atribuições dos profissionais de engenharia. Tratando-se da engenharia estrutural, onde as treliças têm uma ampla aplicação, esse aprimoramento está ligado, principalmente, à obtenção de estruturas mais leves, eficientes e confiáveis. Para se conseguir essa diminuição de massa, normalmente, são utilizadas estruturas com menos elementos, e estes se tornam esbeltos, o que requer que as análises dessas estruturas sejam mais cautelosas com relação a efeitos de flambagem e escoamento. (Pereira et al., 2007; Leite e Lavall, 2000)

Com o avanço da tecnologia e da capacidade de processamento dos microcomputadores, ferramentas como o método dos elementos finitos (MEF) e outros métodos numéricos têm sido largamente utilizados para análise estrutural. Contudo, para garantir segurança, eficiência e confiabilidade, se fazem necessárias análises criteriosas que se aproximem do real comportamento das estruturas analisadas, nesse sentido, a consideração das não linearidades na análise estrutural é extremamente relevante. (Santana, 2015; Leite e Laval, 2000)

Diversas podem ser as fontes do comportamento não linear de uma estrutura, dentre estas, as principais são: não linearidade física ou material, que ocorre quando o material que compõe a estrutura tem um comportamento elástico não linear, plástico ou viscoso; não linearidade geométrica, causada por grandes deformações ou deslocamentos, fazendo com que as equações de equilíbrio sejam formuladas na configuração deformada da estrutura; não linearidade das condições de contorno, ocorre quando há restrição de deslocamento dos nós, que passam a ter alguma condição de contato a partir de um determinado deslocamento. Os procedimentos para a solução desses problemas não lineares também são inúmeros, onde destacam-se os procedimentos incremental-iterativos com o método de Newton-Raphson, como é o caso do método de controle de carga. (Pereira et al., 2007; Muñoz-Rojas e Duarte Filho, 2001; Leon et al., 2011; Rezaiee-Pajand e Naserian, 2015).

Para obter-se uma estrutura com a menor massa possível, faz-se necessário a solução de um problema de otimização estrutural, este, podendo ser dividido em três abordagens: otimização paramétrica, onde procura-se uma distribuição ótima

da área da seção transversal de cada barra; otimização de forma, nessa abordagem, busca-se pela forma ótima para o modelo da estrutura, tendo como variável de projeto a posição dos nós, gerando uma modificação da malha; otimização topológica, nesta técnica é acrescentado/retirado material em diferentes regiões ao longo da estrutura, assim, formando uma nova topologia. (Esposito, 2012)

Os procedimentos de otimização podem ser classificados em métodos determinísticos e métodos heurísticos. Os métodos determinísticos utilizam métodos matemáticos, como cálculo das derivadas da função para achar seus pontos de mínimos ou máximos, tendo como principais vantagens o baixo custo computacional e a rapidez de convergência, entretanto, esse método torna-se inadequado para funções com diversos pontos de mínimos e máximos, e para funções descontínuas. Já os métodos metaheurísticos são baseados em comportamentos social-evolutivos encontrados na natureza, e, se comparados aos métodos baseados em gradientes, possuem um maior custo computacional e menor velocidade de convergência, porém apresentam vantagens como: facilidade de programação; possibilidade de avaliar funções descontínuas; viabilidade de encontrar um mínimo e máximo global em funções com diversos pontos de mínimos e máximos. (Oliveira, 2008; Medeiros, 2005)

Embora existam diferentes técnicas de otimização, para grandes espaços de busca, e quando as restrições ou a função objetivo são altamente não lineares ou discretas, as técnicas baseadas em gradiente, assim como soluções por métodos analíticos, não são adequadas, uma vez que podem “estacionar” em mínimos locais, conduzindo à soluções sub ótimas, ou no caso de soluções analíticas, estas tomam-se muito difíceis ou até impossíveis. Um método metaheurístico amplamente utilizado para solução de problemas de otimização não lineares e/ou discretos, é o método de otimização por enxame de partícula (*Particles Swarm Optimization*), que consiste, basicamente, em uma técnica onde partículas com posição e velocidade, inicialmente, aleatórias, são dispersas no espaço de busca, e cada partícula do enxame representa uma possível solução para o problema de otimização. A posição e velocidade de cada partícula são atualizadas levando em consideração a melhor posição já encontrada pela partícula, a melhor posição encontrada pelo conjunto (enxame) de partículas e a distância entre a partícula e a melhor posição do enxame. (Esposito, 2012; Oliveira, 2008; Medeiros, 2005)

Nesse contexto, este trabalho tem por objetivo realizar a implementação numérica, em linguagem MATLAB®, de um algoritmo de otimização metaheurístico considerando, na análise estrutural, o comportamento linear e não linear geométrico de treliças planas e espaciais, e utilizando, para a análise não linear geométrica, o método de controle de carga. Pretende-se também desenvolver uma interface gráfica em MATLAB® GUI (*Graphical User Interface*) para facilitar ao usuário a inserção de dados e visualização dos resultados da otimização estrutural.

2. REFERENCIAL TEORICO

A otimização estrutural envolve assuntos de ampla abrangência e complexidade como análise estrutural, método dos elementos finitos e métodos de otimização. Desta forma, este trabalho não abordará esses assuntos em sua totalidade, porém, nos subtópicos a seguir, trará uma breve introdução aos conteúdos necessários para seu desenvolvimento e entendimento.

2.1 Análise Estrutural

Entre os principais tipos de estruturas metálicas, destaca-se a estrutura reticulada, ou treliça, a qual oferece uma solução prática e econômica para diferentes situações, especialmente para projetos que envolvam grandes vãos. A treliça é formada por elementos lineares, normalmente, esbeltos (barras), que são interligados pelas suas extremidades, gerando uma estrutura rígida, onde nesses elementos atuam apenas esforços axiais. A Figura 1 mostra um exemplo de uma treliça plana simples. (Leite e Lavall, 2000)

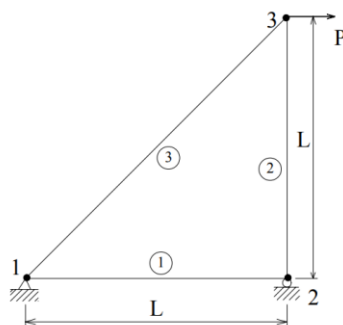


Figura 1. Treliça plana

Fonte: Adaptado de Posada, Stability Analysis of Two-dimensional Truss Structures. 2007.

Onde, os números em negrito são referentes aos nós, os números circulos são referentes às barras, L é a distância entre os nós e P é a carga aplicada.

Um dos objetivos da análise de sistemas do tipo treliça, consiste na determinação dos esforços internos das barras, identificando se estas estão sob tração ou compressão, o que, conforme Hibbeler (2011), pode ser feito de forma analítica pelo método dos nós e método das seções. No entanto, para treliças espaciais com um maior número de barras, esses métodos se tornam complexos e demorados, fazendo com que seja extremamente vantajoso a utilização de métodos numéricos como o método dos elementos finitos.

2.1.1 Método dos Elementos Finitos (MEF)

O MEF é uma poderosa ferramenta de simulação numérica, largamente utilizada para discretização de meios contínuos, aproximando soluções de equações diferenciais por sistemas de equações lineares. O MEF foi inicialmente desenvolvido para análise de problemas da mecânica estrutural linear-elástica, porém a sua larga utilização se dá devido ao fato de ser aplicado também à problemas de mecânica dos sólidos, mecânica dos fluidos, eletromagnetismo, transferência de calor, entre outros, e também devido à analogia física entre a estrutura analisada e a malha de elementos finitos. (Fonseca, 2002; Porcher, 2016)

2.1.1.1 Elemento de Barra (Análise Linear)

O elemento de barra é o elemento mais básico dentre os diversos tipos de elementos finitos, porém útil para análise de estruturas reticuladas. A formulação direta do elemento de barra se dá de forma matricial, através da matriz de rigidez e do vetor de carga. Para exemplificar essa formulação, será considerada uma barra engastada com comprimento l , seção transversal A , composta por material isotrópico, homogêneo e linear, com módulo de elasticidade E , submetida à uma carga axial P , conforme ilustra a Fig. 2. (Fonseca, 2002)

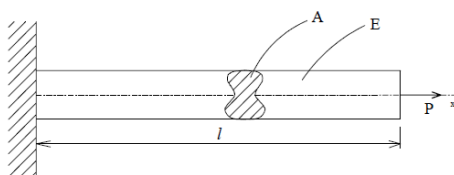


Figura 2. Barra sob tração.

Fonte: Fonseca, Ferramentas de Simulação em Mecânica: Elementos Finitos. 2002.

Na discretização pelo MEF, a barra é fracionada em vários elementos finitos de comprimento L , cada elemento é composto por dois nós, possui seção transversal A e dois graus de liberdade u_{x1} e u_{x2} , conforme pode ser observado na Fig. 3.

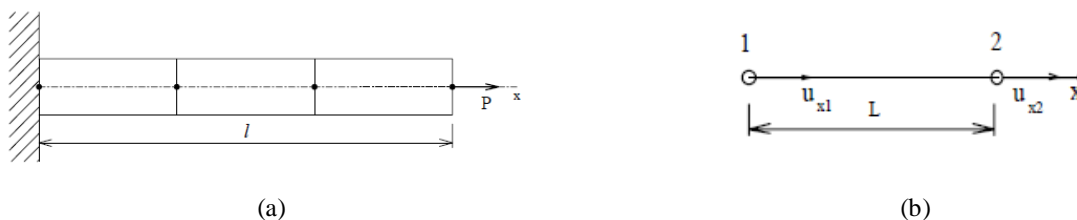


Figura 3. (a) Barra discretizada (b) Elemento de barra.

Fonte: Adaptado de Fonseca, Ferramentas de Simulação em Mecânica: Elementos Finitos. 2002.

Considerando forças P_1 e P_2 aplicadas nos nós no sentido dos graus de liberdade x_1 e x_2 , respectivamente, a equação de equilíbrio de forças na direção x produz:

$$P_1 = -P_2 \tag{1}$$

Para barras com carregamentos axiais, a equação tensão – deformação é governada pela lei de Hooke, onde a tensão normal σ_x , proporcional ao módulo de elasticidade E e à deformação axial ϵ_x , conforme Hibbeler (2010), é dada pela Eq. (2).

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (2)$$

Sabendo que a tensão normal média pode ser descrita como a força aplicada P sobre a área A, e escrevendo a deformação axial em função da diferença dos deslocamentos u_{x2} e u_{x1} sobre o comprimento L, temos:

$$P1 = -\frac{EA}{L}(u_{x2} - u_{x1}) \quad (3)$$

$$P2 = \frac{EA}{L}(u_{x2} - u_{x1}) \quad (4)$$

Escrevendo o sistema de equações na forma matricial, obtêm-se a equação do elemento de barra na sua forma fundamental, observada na Eq. (5).

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P1 \\ P2 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

A Eq. (5) pode ser representada matricialmente em termos da matriz de rigidez do elemento $[K^e]$ multiplicada pelo vetor de deslocamentos nodais do elemento $\{u^e\}$ e igualando ao vetor de cargas do elemento $\{P^e\}$, tal como reescrita na Eq. (6).

$$[K^e] \{u^e\} = \{P^e\} \quad (6)$$

Voltando ao exemplo da Fig. 3a, onde a barra fora dividida em três elementos iguais, após obter as equações para o elemento de barra, é necessário superpor os três elementos, obtendo a equação global de elementos finitos para a barra analisada, observada na Eq. (7).

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \\ u_{x3} \\ u_{x4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Podendo ser escrita como:

$$[K^G] \{u^G\} = \{P^G\} \quad (8)$$

A equação obtida ainda não pode ser resolvida, pois a matriz $[K^G]$ é singular, ou seja, possui determinante igual a zero e não pode ser invertida. Fisicamente, a razão para tal é o fato de não se ter imposto uma vinculação ao modelo, ou seja, é como se a barra estivesse livre no espaço, portanto, é necessário impor condições de contorno sobre o sistema de equações para possibilitar a solução do mesmo. (Fonseca, 2002)

Uma das formas de impor as condições de contorno é fazendo o pivoteamento dos elementos referentes aos graus de liberdade com restrição de movimento e zerando os demais elementos de sua linha e coluna. Sendo assim, como o deslocamento do grau de liberdade $x1$, no exemplo supracitado, está restringido, ao aplicar a condição de contorno, a Eq. (7) torna-se:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \\ u_{x3} \\ u_{x4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Assim, pode-se encontrar os deslocamentos nodais, conforme Eq. 10 e, por conseguinte, a partir das relações com a lei de Hooke, as deformações e tensões de cada elemento.

$$\{u^G\} = [K^G]^{-1} \{P^G\} \quad (10)$$

As equações demonstradas servem como base para compreensão do MEF, porém elas estão formuladas no sistema de coordenada local da barra, na direção de sua linha central. Entretanto, tratando-se das treliças espaciais, objeto de estudo deste trabalho, faz-se necessária a transformação das coordenadas locais para coordenadas globais através da matriz de rotação em termos dos cossenos diretores, conforme Eq. (11). (Faria, 2014)

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} Cx^2 & CxCy & CxCz & -Cx^2 & -CxCy & -CxCz \\ & Cy^2 & CyCz & -Cx^2 & -CxCy & -CxCz \\ & & Cz^2 & -Cx^2 & -CxCy & -CxCz \\ & & & Cx^2 & CxCy & CxCz \\ & & & & Cy^2 & CyCz \\ & & & & & Cz^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{z1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{z1} \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ P_{z2} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Onde, Cx , Cy , e Cz são os cossenos diretores que podem ser obtidos pelas Eq. (12), (13) e (14), consecutivamente.

$$Cx = \frac{(X_2 - X_1)}{L} \quad (12)$$

$$Cy = \frac{(Y_2 - Y_1)}{L} \quad (13)$$

$$Cz = \frac{(Z_2 - Z_1)}{L} \quad (14)$$

Nas Eq. (12), (13) e (14), X_1 , X_2 , Y_1 , Y_2 , Z_1 e Z_2 são as coordenadas dos nós do elemento no sistema global de coordenadas. A superposição dos elementos na matriz de rigidez global $[K^G]$ e a imposição de condições de contorno se dão da mesma forma qual foi feita para coordenadas locais.

2.1.1.2 Análise Não Linear Geométrica

Na análise linear, descrita anteriormente, as equações de equilíbrio são baseadas na geometria inicial da estrutura, porém, sob considerações de mudanças finitas em sua geometria, tais equações não são válidas, sendo necessário reformulá-las a cada alteração da geometria. Dessa forma, a relação entre a carga e o deslocamento que anteriormente era linear, torna-se não linear, caracterizando assim, o comportamento não linear geométrico da trajetória de equilíbrio. A não linearidade geométrica é formulada quanto as características de sua aplicação, podendo ser: pequenas deformações, mas grandes deslocamentos ou grandes deformações. (Lacerda, 2014; Leon et al., 2011)

No caso de pequenas deformações, mas grandes deslocamentos, a estrutura sofre pequenas deformações, mas os deslocamentos ou rotações não são pequenos, este tipo de não linearidade é o que, geralmente, ocorre em arcos, molas, placas e barras de treliças. Já, para o segundo caso, consideram-se grandes deformações quando estas são acima de 5%, normalmente, essas deformações acabam por gerar também a não linearidade física, este tipo de não linearidade pode ocorrer na formação de metais e em materiais altamente elásticos, como a borracha. (Lacerda, 2014; Posada, 2007)

Do mesmo modo que gráficos relacionando tensão – deformação são utilizados para análise de materiais, gráficos que relacionam carga – deslocamento são frequentemente utilizados para analisar o comportamento de um sistema estrutural. Se os pontos sob as curvas apresentadas na Fig. 4 representarem uma configuração de equilíbrio estático a curva é denominada caminho de equilíbrio, conforme observado na Fig. 4.

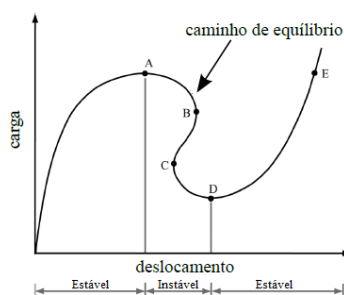


Figura 4. Gráficos carga – deslocamento: caminho de equilíbrio e pontos críticos.

Fonte: Adaptado de Posada, Stability Analysis of Two-dimensional Truss Structures. 2007.

A Figura 4 apresenta os principais pontos críticos em um caminho de equilíbrio, os pontos A e D são correspondentes aos limites de carregamento, que ocorrem quando a tangente do caminho de equilíbrio é horizontal, os pontos B e C verificam-se quando a tangente do caminho de equilíbrio é vertical e correspondem aos limites de deslocamento, o ponto E é o salto de deslocamento que ocorre quando a estrutura atinge seu primeiro ponto de limite e recebe um pequeno acréscimo na carga aplicada, gerando um salto do ponto A para o ponto E, esse fenômeno é conhecido como *snap-through*. (Leon et al., 2011; Lacerda, 2014)

Para análises de problemas não lineares, em casos de pequenas deformações e grandes deslocamentos, de acordo com Lacerda (2014), é utilizada a deformação de Green-Lagrange (ϵ_G), que relaciona o quadrado do comprimento inicial (L_o) com o quadrado do comprimento deformado (L_f), essa relação é descrita pela Eq. (15).

$$\epsilon_G = \frac{1}{2} \left(\frac{L_f^2 - L_o^2}{L_o^2} \right) \tag{15}$$

Reescrevendo a Eq. (15) para um elemento de barra espacial, no sistema global de coordenadas X, Y, Z, com referência às suas coordenadas nodais X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1 e Z_2 e aos seus deslocamentos nodais, $u_{x1}, u_{x2}, u_{y1}, u_{y2}, u_{z1}$ e u_{z2} , chega-se à Eq. (16).

$$\epsilon_G = \frac{(X_2 - X_1)(u_{x2} - u_{x1}) + (Y_2 - Y_1)(u_{y2} - u_{y1}) + (Z_2 - Z_1)(u_{z2} - u_{z1})}{L_o^2} + \frac{(u_{x2} - u_{x1})^2 + (u_{y2} - u_{y1})^2 + (u_{z2} - u_{z1})^2}{2L_o^2} \tag{16}$$

Nota-se que a Eq. (16) está dividida em duas parcelas, a primeira refere-se ao comportamento linear entre deslocamento e deformação, e a segunda parcela traz a influência não linear do deslocamento para a deformação.

Conforme Leon et al. (2011), existem diversos métodos para solução de problemas não lineares, entre os principais estão os métodos de controle de carga, controle de deslocamento, controle do comprimento de arco, controle de deslocamento generalizado e controle de trabalho. No presente estudo, optou-se pela utilização do método do controle de carga, o qual apresenta algumas limitações como não conseguir captar os pontos sob o caminho de equilíbrio onde a tangente de rigidez é nula ou negativa, ou seja, tal método não obtém o caminho de equilíbrio de equilíbrio quando este é instável, gerando assim o salto de deslocamento comentado previamente.

Porém, o método de controle de carga é facilmente implementado e atende satisfatoriamente aos problemas abordados neste trabalho. Além disso, ainda conforme os autores, é um método frequentemente explorado na literatura para a análise de treliças.

O método de controle de carga utiliza um procedimento incremental-iterativo, baseado no método de Newton-Raphson, no qual a carga total aplicada à estrutura é fracionada em pequenos incrementos de carga, os quais são aplicados de forma incremental e iterativa, produzindo assim, os correspondentes deslocamentos incrementais. A Figura 5 apresenta as etapas do método de Newton-Raphson para um passo de carga até sua convergência, que ocorre quando a trajetória de equilíbrio intercepta a linha de carga.

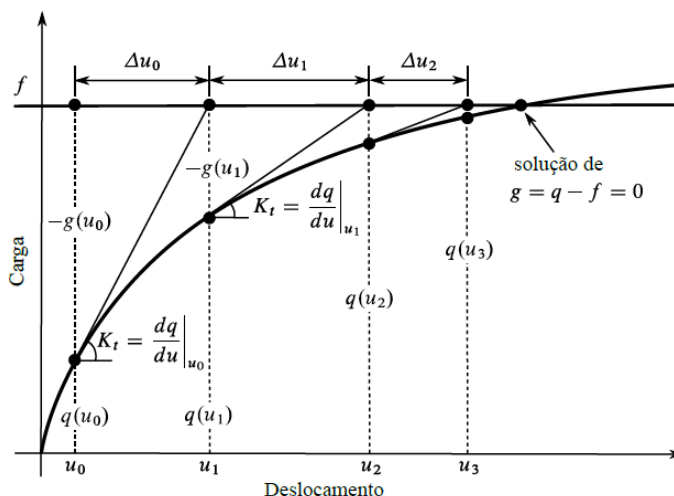


Figura 5. Equação de equilíbrio pelo método de Newton-Raphson.

Fonte: Lacerda, Análise não Linear de Treliças pelo Método dos Elementos Finitos Posicional, 2014.

Onde, g é a equação de equilíbrio, q é o vetor de forças internas, dado pela Eq. (17), f é o vetor de forças externas e Kt é a matriz de rigidez, ou tangente de rigidez.

$$q = \begin{Bmatrix} -EA\varepsilon_G \left(\frac{(X_2 - X_1) + (u_{x2} - u_{x1})}{L_o} \right) \\ -EA\varepsilon_G \left(\frac{(Y_2 - Y_1) + (u_{y2} - u_{y1})}{L_o} \right) \\ -EA\varepsilon_G \left(\frac{(Z_2 - Z_1) + (u_{z2} - u_{z1})}{L_o} \right) \\ EA\varepsilon_G \left(\frac{(X_2 - X_1) + (u_{x2} - u_{x1})}{L_o} \right) \\ EA\varepsilon_G \left(\frac{(Y_2 - Y_1) + (u_{y2} - u_{y1})}{L_o} \right) \\ EA\varepsilon_G \left(\frac{(Z_2 - Z_1) + (u_{z2} - u_{z1})}{L_o} \right) \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Para simplificar o equacionamento de Kt , os vetores $b1$, $b2$, e a matriz S são definidos pelas Eq. (18), (19) e (20), respectivamente. (Lacerda, 2014; Esposito, 2016)

$$b1 = \frac{1}{2L_o} \begin{Bmatrix} (X_1 - X_2) \\ (Y_1 - Y_2) \\ (Z_1 - Z_2) \\ -(X_1 - X_2) \\ -(Y_1 - Y_2) \\ -(Z_1 - Z_2) \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$b2 = \frac{1}{2L_o} \begin{Bmatrix} (u_{x1} - u_{x2}) \\ (u_{y1} - u_{y2}) \\ (u_{z1} - u_{z2}) \\ -(u_{x1} - u_{x2}) \\ -(u_{y1} - u_{y2}) \\ -(u_{z1} - u_{z2}) \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$S = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Isto posto, Kt é dada pela Eq. (21)

$$Kt = EL_o Abb^T + \frac{4AE\varepsilon_G S}{L_o} \quad (21)$$

Onde

$$b = b1 + b2 \quad (22)$$

Assim como na análise linear, é necessário superpor a rigidez de cada elemento $[Kt]$ na matriz de rigidez global $[Kt^G]$, bem como o vetor de forças internas de cada elemento $\{q\}$ em um vetor de forças internas global $\{q^G\}$ e impor as condições de contorno.

Conforme observado na Fig. 5, o método de Newton-Raphson fornece a solução para apenas um ponto no caminho de equilíbrio, logo, para se obter toda a curva do caminho de equilíbrio, é necessário combinar as iterações do método com um procedimento incremental com vários níveis de carga.

2.2 Otimização Estrutural

O principal objetivo da otimização estrutural é auxiliar na obtenção de estruturas mais eficientes, com melhor desempenho e menor custo. Como já comentado no tópico introdutório deste trabalho, a otimização estrutural pode ser dividida em três categorias: otimização paramétrica ou dimensional, otimização de forma e otimização topológica. A Figura 6, ilustra essas três diferentes formas de otimização estrutural.

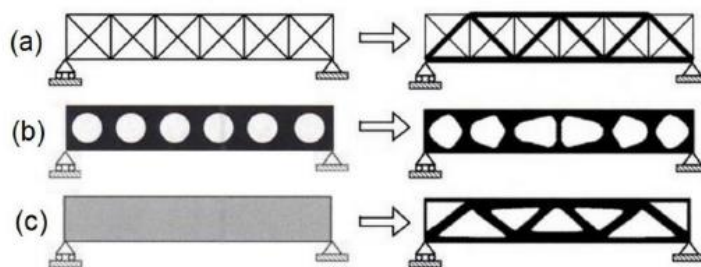


Figura 6. (a) Otimização paramétrica (b) Otimização de forma (c) Otimização topológica.
Fonte: Bendsoe e Sigmund, *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. 2003.

Neste trabalho será utilizado a otimização paramétrica, na qual, a estrutura pode ser analisada por meio dos métodos de elementos finitos descritos nos tópicos anteriores.

Comumente, em problemas de otimização estrutural, a função objetivo (função que se deseja achar o mínimo) é a massa da estrutura, que deve obedecer à alguns limites, como por exemplo, ao diminuir a área da seção transversal de uma barra, não pode ser excedida a tensão máxima suportada pelo material, essas limitações são o que definem as restrições de projeto.

A formulação típica de um problema de otimização estrutural é dada pela Eq. (23)

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar ou Maximizar:} && \text{Função Objetivo } f(x) \\
 & \text{Variáveis de Projeto: } x = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \\
 & \text{Sujeito a restrições: } g_i(x) \leq 0, && i = 1, \dots, n_g \\
 & && h_j(x) = 0, && j = 1, \dots, n_h \\
 & && A_k^{inf} \leq A_k \leq A_k^{sup} && k = 1, \dots, n_A
 \end{aligned} \tag{23}$$

Onde: x é o vetor de variáveis de projeto; g_i é a função que contém restrições de desigualdade, como, por exemplo, tensões e deslocamentos devem ser inferiores a um limite admissível; h_j representa restrições de igualdade (equação de equilíbrio); A_k representa os valores assumidos pelas variáveis de projeto (áreas), que devem estar dentro de um intervalo estabelecido pelas restrições laterais A_k^{inf} e A_k^{sup} . (Pereira et al., 2007; Esposito, 2012; Sedaghati, 2005)

Inúmeros são os métodos utilizados para solucionar problemas de otimização, e estes podem ser divididos em métodos determinísticos e métodos estocásticos (heurísticos e metaheurísticos). Os métodos determinísticos são métodos que apresentam comportamento previsível, ou seja, para uma determinada entrada o algoritmo terá sempre a mesma resposta. E, na maioria das vezes, as possíveis soluções exigem o uso de pelo menos a primeira derivada da função objetivo em relação às variáveis de projeto, necessitando que as funções sejam contínuas e diferenciáveis. (Silva, 2011)

Normalmente, os métodos determinísticos apresentam baixo custo computacional e uma rápida convergência, se feita uma boa estimativa inicial, porém, ao serem aplicados em problemas de engenharia pode encontrar dificuldades devido à diferenciação de modelos matemáticos complexos, e à presença de funções com mínimos locais e/ou funções discretas. Alguns métodos determinísticos utilizados atualmente são os métodos SIMPLEX, Powell Modificado, Polak-Ribiere e Busca Unidirecional. (Bonatto, 2017; Gomes, 2010)

Já, os métodos heurísticos, os quais fazem analogias à comportamentos encontrados na natureza como evolução das espécies e comportamentos social de animais, são métodos mais praticáveis para análise de problemas de engenharia que envolvam modelos complexos ou discretos, devido ao fato de não trabalharem com derivadas e não dependerem de uma estimativa inicial. Porém, esses métodos, se comparados com os métodos determinísticos, possuem um maior custo computacional e demoram mais para convergir. Dentre os principais métodos heurísticos, encontram-se os métodos de Recozimento Simulado (*Simulated Annealing*), Algoritmos Genéticos (*Genetic Algorithm*), Enxame de Partículas (*Particles Swarm Optimization*) e Colônia de Formigas (*Ant Colony*). (Esposito, 2012; Gomes, 2010, Cagnina et al., 2008)

Dentre os diversos métodos heurísticos existentes para solução de problemas de otimização, neste trabalho, para realizar a otimização estrutural, optou-se por utilizar o método de Otimização por Enxame de Partículas, por ser um método bastante difundido na literatura, assim facilitando a comparação dos resultados obtidos. Na seguinte seção, é realizada uma breve descrição do método PSO.

2.2.1 Particles Swarm Optimization (PSO)

O método de otimização PSO foi desenvolvido por Kennedy e Eberhart (1995), tal método implementa uma metáfora do comportamento social de interação entre pássaros (partículas) de uma revoada (enxame) na procura de alimento em uma determinada região, onde a região de busca é análoga à função objetivo e o local da comida corresponde à solução ótima. (Medeiros, 2005; Gomes, 2011; Eberhart e Shi, 2001)

No PSO, cada partícula corresponde a um ponto no espaço de busca e representa uma possível solução para o problema de otimização, essas partículas possuem uma função (*fitness*) responsável por avaliar a adequação de cada partícula para a solução. Também é intrínseco a essas partículas valores de velocidades que definem a direção do movimento da partícula pelo espaço de busca, essa velocidade é modificada levando em consideração a melhor posição de cada partícula (*local best*) e a melhor posição do grupo/enxame (*global best*), assim, ao longo do tempo, todo o grupo tende a se aproximar e chegar na solução ótima. (Esposito, 2012; Oliveira, 2008; Medeiros, 2005)

O enxame de partículas é iniciado randomicamente dentro do espaço de busca, onde cada partícula possui, inicialmente, uma posição e velocidade aleatória. A atualização dos vetores de velocidade e de posição ao longo das iterações (t), conforme Esposito (2012), são descritas pelas Eq. (24) e (25), consecutivamente. Uma representação vetorial dessa atualização é ilustrada na Fig. 7.

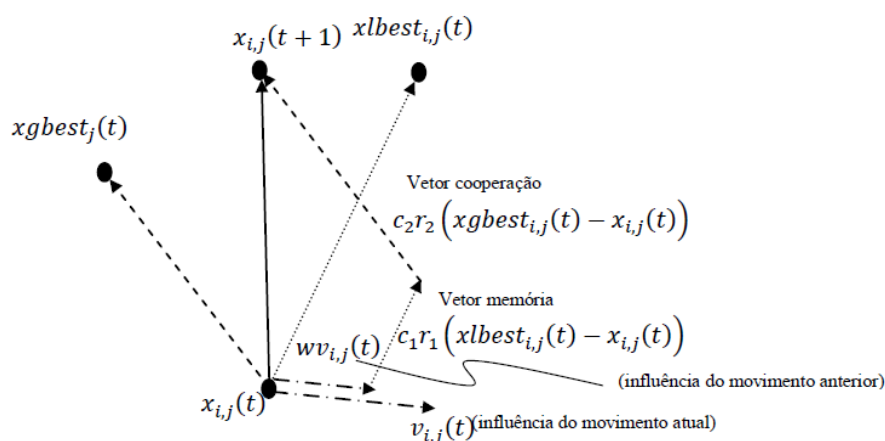


Figura 7. Representação vetorial da atualização da posição e velocidade da partícula.

Fonte: Esposito, Programação Paralela e Sequencial Aplicada à Otimização de Estruturas Metálicas com o Algoritmo PSO. 2012.

$$v_{i,j}(t+1) = wv_{i,j}(t) + c_1 r_1 (x_{lbest_{i,j}}(t) - x_{i,j}(t)) + c_2 r_2 (x_{gbest_j}(t) - x_{i,j}(t)) \quad (24)$$

$$x_{i,j}(t+1) = x_{i,j}(t) + v_{i,j}(t+1) \quad (25)$$

Onde: $v_{i,j}(t+1)$ é a velocidade atualizada da partícula i correspondente a variável de projeto j ; w é a inércia da partícula, e indica a proporção da velocidade atual $v_{i,j}(t)$ a ser mantida; c_1 corresponde a constante de aceleração cognitiva individual, referente à $x_{lbest_{i,j}}(t)$; c_2 equivale a constante de aceleração social e refere-se à $x_{gbest_j}(t)$; r_1 e r_2 são números aleatórios em um intervalo entre 0 e 1; $x_{lbest_{i,j}}(t)$ refere-se à melhor posição já encontrada pela partícula; e $x_{gbest_j}(t)$ é a melhor posição já encontrada pelo grupo.

3. MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 Implementação dos Algoritmos de MEF

Com base nas formulações descritas nos tópicos 2.1.1.1 e 2.1.1.2, utilizando o *software* MATLAB® realizou-se a implementação de dois modelos numéricos para análise de treliças espaciais, um para análise linear (AL) e outro para

análise não linear geométrica (ANLG). Para tal, a Fig. 8 sintetiza algumas das etapas que descrevem a implementação dos códigos.

<ol style="list-style-type: none"> 1. Entrada de dados; 2. Cálculo do comprimento e cossenos diretores de cada elemento; 3. Cálculo da matriz de rigidez de cada elemento; 4. Superposição das matrizes de rigidez dos elementos na matriz de rigidez global; 5. Aplicação de condições de contorno; 6. Solução: deslocamentos, deformações, tensões e forças atuantes de cada elemento. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Entrada de dados; 2. Incremento de carga; 3. Método Newton-Raphson; 4. Cálculo dos vetores de comprimento, deslocamento e esforços internos de cada elemento; 5. Cálculo da matriz de rigidez de cada elemento; 6. Superposição das matrizes de rigidez dos elementos na matriz de rigidez global; 7. Aplicação de condições de contorno; 8. Equilíbrio? (Sim: passo 10 Não: passo 9); 9. Cálculo do acréscimo de deslocamentos e retorno ao passo 4; 10. Toda carga aplicada? (Sim: passo 11 Não: passo 2); 11. Solução: deslocamentos, deformações, tensões e forças atuantes de cada elemento.
(a)	(b)

Figura 8. (a) Etapas do modelo de AL (b) Etapas do modelo de ANLG.

Para o modelo de análise linear, conforme mostra a Fig. 8a, após a entrada de dados, são realizados os cálculos referentes à geometria inicial da estrutura e, assim, a matriz de rigidez de cada elemento é obtida. Então, é realizada a superposição das matrizes de rigidez dos elementos na matriz de rigidez global, bem como a aplicação das condições de contorno. Por fim, através da Eq. (10), obtêm-se os deslocamentos e, por conseguinte, tensões atuantes em cada elemento.

Já, para o modelo de análise não linear geométrica (Fig. 8b), a cada fração da carga aplicada (incremento de carga), são realizados, dentro do método de Newton-Raphson, os cálculos de geometria da estrutura, esforços internos de cada elemento e rigidez de cada elemento. Ainda no método de Newton-Raphson, os esforços e rigidez de cada elemento são superpostos nos esforços globais e rigidez global, aplicam-se as condições de contorno e verifica-se se a diferença entre a fração de carga aplicada e os esforços internos está dentro da tolerância estipulada. Em caso negativo, a partir dessa diferença e da tangente de rigidez, calcula-se um incremento de deslocamento e são repetidos todos os passos realizados dentro do método de Newton-Raphson, do contrário, verifica-se a carga foi aplicada em sua totalidade, se a fração de carga corresponder a carga total, os deslocamentos e tensões são obtidos, se não corresponder, um novo incremento de carga é aplicado e realiza-se a repetição de todos os passos anteriores.

Ambos os modelos, possuem elementos em comum para os dados de entrada, que consistem em número de nós, coordenadas dos nós, forças externas, restrições de movimento, ligações dos elementos, área e módulo de elasticidade de cada elemento. A Figura 9 ilustra um exemplo de como é feita inserção de dados, em linguagem MATLAB®, de forma manual para uma treliça plana de duas barras.

```

nos = 3; % Número de nós.
coord = [0 0 0; 1000 1000 0; 2000 0 0]; % Coordenada [Xnó1 Ynó1 Znó1; Xnó2 Ynó2 Znó2; Xnó3 Ynó3 Znó3]
F = [0 0 0 0 -1e6 0 0 0 0]; % Força em N para cada grau de liberdade
restr = [1 1 1 0 0 1 1 1 1]; % Restrições para cada grau de liberdade (1 para restringido e 0 para não restringido)
conect = [1 2; 2 3]; % Ligação dos elementos [1º nó El.1 2º nó El. 1; 1º nó El.2 2º nó El. 2]
A = [20 20]; % Área de cada elemento
E = [2.1e5 2.1e5]; % Módulo de elasticidade em MPa de cada elemento.

```

Figura 9. Entrada manual de dados, em MATLAB, para os modelos de AL e ANLG.

Além dos elementos mostrados na Fig. 9, para o modelo de ANLG, ainda são necessários os valores de número de incrementos de carga, tolerância de convergência e quantidade máxima de iterações para o método de Newton-Raphson. Observa-se que para estruturas com maior número de elementos, a inserção de dados de forma manual se torna pouco atrativa e dificultosa, podendo gerar erros de análise devido à entrada de dados incorreta.

Realizadas as implementações, para validação dos modelos implementados e comparação entre as análises linear e não linear geométrica, foram analisados alguns exemplos de estruturas presentes na literatura, os resultados dessas análises serão abordados posteriormente no capítulo 4.

3.2 Implementação do Algoritmo PSO

Por ser um método bastante difundido na literatura, o PSO possui diversas variações e adaptações, no presente trabalho foi utilizado o algoritmo de PSO assíncrono, por este ter se mostrado superior ao algoritmo padrão (síncrono) devido a

possibilidade de evolução dinâmica das partículas. Para melhor entender as diferenças entre o PSO síncrono e assíncrono, os pseudocódigos para a implementação de ambas as variações podem ser vistos na Fig. 10.

Inicialização do algoritmo; Inserção das constantes do algoritmo; Criação randômica de posição e velocidade das partículas; Inicialização da otimização; Para i=1, iterações; Para j=1, partículas; Avaliar $f(x^i_j)$; Fim Testar convergência; Atualizar posição e velocidade; Fim Apresentação dos resultados;	Inicialização do algoritmo; Inserção das constantes do algoritmo; Criação randômica de posição e velocidade das partículas; Inicialização da otimização; Para i=1, iterações; Para j=1, partículas; Avaliar $f(x^i_j)$; Testar convergência; Atualizar posição e velocidade; Fim Apresentação dos resultados;
(a)	(b)

Figura 10. (a) Pseudocódigo PSO síncrono (b) Pseudocódigo PSO assíncrono.

Nota-se que para o modelo de PSO síncrono, as posições e velocidades das partículas só são atualizadas após todas as partículas realizarem a avaliação da função objetivo, já para o modelo assíncrono, cada partícula a analisar a função objetivo gera uma atualização de posição e velocidade, e essas informações são disponibilizadas para as partículas ainda não atualizadas naquela iteração, assim, como comentado anteriormente, o modelo de PSO assíncrono possibilita uma evolução dinâmica das posições e velocidades.

3.2.1 Acoplando o Algoritmo de Análise Estrutural ao Otimizador PSO

Realizada a validação dos algoritmos responsáveis pelas análises linear e não linear geométrica, a etapa seguinte consistiu em acoplar os algoritmos de análise estrutural ao otimizador PSO. Para tal, o fluxograma exposto na Fig. 11 apresenta a estrutura lógica da implementação do algoritmo de otimização estrutural. Tal como apresentado na Fig. 11, cada i-ésima partícula representa uma estrutura candidata à solução, onde a mesma será avaliada pela análise estrutural (MEF). Nesta etapa, conforme formulação do problema de otimização (Eq. (23)), são verificadas as restrições, as quais, para os problemas estruturais abordados neste estudo, podem estar relacionadas à tensão de escoamento do material, flambagem das barras e deslocamentos dos nós.

Uma das alternativas para lidar com as restrições violadas, consiste em penalizar a função objetivo do problema de otimização, ou seja, a cada restrição violada, um fator de penalização (FP) é atribuído à função objetivo com intuito de inflá-la, desta forma, quanto maior for a violação de alguma restrição ou quanto maior for o número de restrições violadas, mais penalizada será a função objetivo. O fator de penalização foi acrescentado ao algoritmo de elementos finitos, que retorna ao PSO o valor de massa (M) devidamente penalizado, da forma descrita pelo fluxograma da Fig. 11.

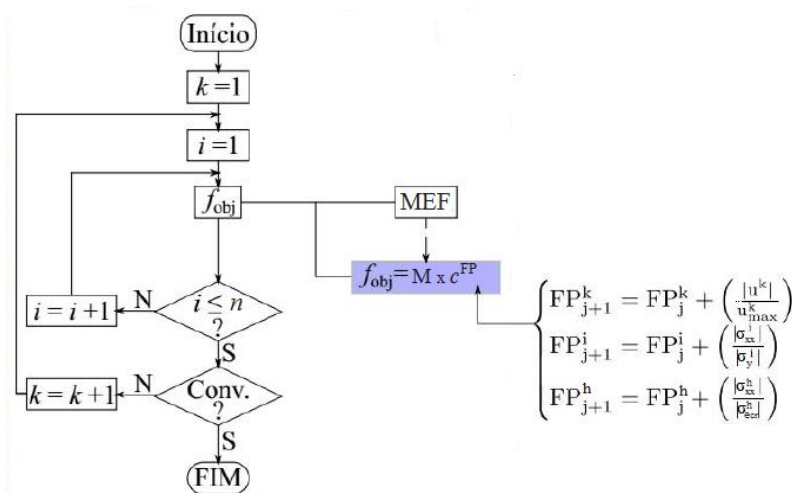


Figura 11. Estrutura lógica de implementação do algoritmo de otimização estrutural.

Onde, para cada iteração (k) do PSO, as partículas (i) representam uma estrutura candidata à solução ótima, e, cada uma das partículas é avaliada pela análise estrutural (MEF) verificando se a estrutura violou alguma restrição de projeto e aplicando as penalizações correspondentes. Assim, cada partícula recebe como valor de função objetivo a massa (M) da estrutura (Eq. (26)) multiplicada pela constante de penalização (c) elevada ao fator de penalização (FP).

$$M = \sum_a^b A_a L_a \rho \quad (26)$$

Onde, M é a massa da estrutura, A é a área de seção transversal da barra, L corresponde ao comprimento da barra, ρ consiste na densidade do material da estrutura, $a = 1, 2, \dots, b$, e b é a quantidade de barras da estrutura.

Nota-se que os valores da constante c devem ser maiores que 1, assim evitando que a solução ótima seja referente a variáveis de projeto que violem alguma restrição. Quando nenhuma restrição é violada, o fator de penalização FP permanece zerado, tornando nula a influência da constante c sobre a função objetivo.

Os resultados de alguns exemplos de otimização estrutural encontrados na literatura foram comparados com os resultados obtidos pelo algoritmo desenvolvido, para assim poder validá-lo. E, estes serão abordados no capítulo 4.

3.3 Desenvolvimento da Interface Gráfica MATLAB/GUI®

Posterior às validações dos algoritmos implementados, realizou-se o desenvolvimento de uma interface gráfica, com intuito de facilitar a inserção de dados referentes à estrutura a ser analisada e aos valores controlados pelo usuário nos métodos de MEF e PSO. A Figura 12 apresenta a interface desenvolvida.

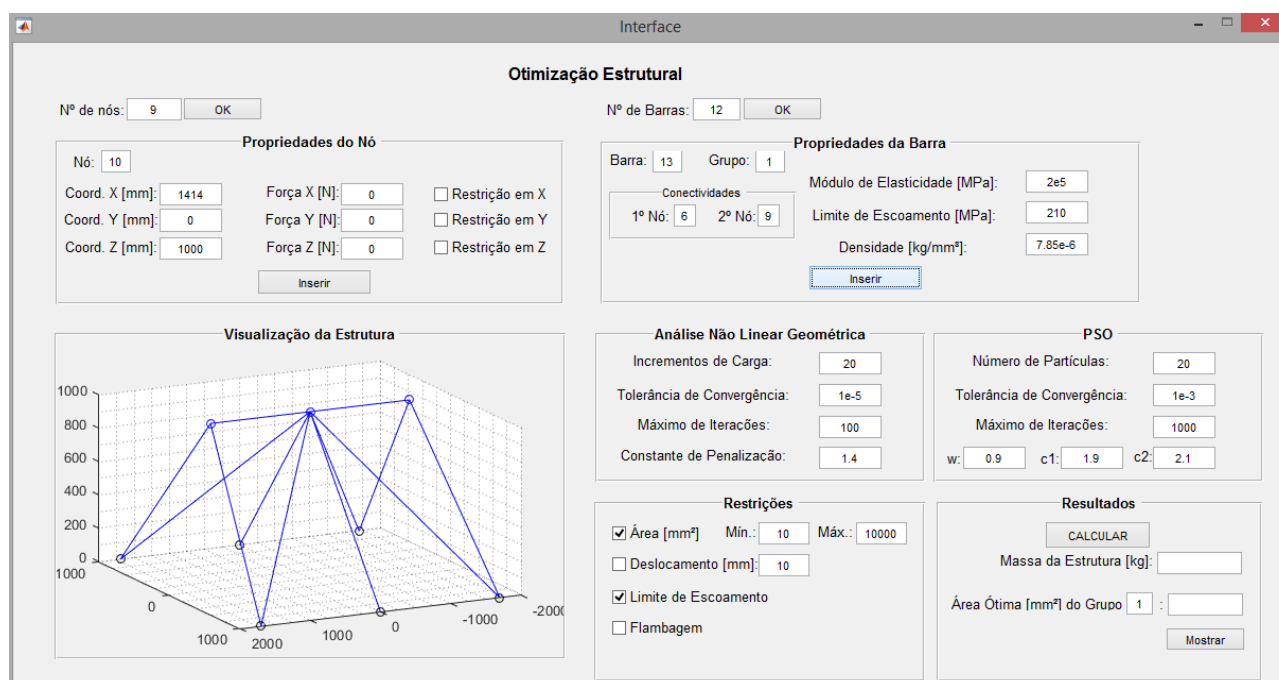


Figura 12. Interface gráfica desenvolvida para otimização estrutural.

O procedimento de utilização de interface se dá na seguinte sequência:

1. Definição do número de nós da estrutura a ser realizada;
2. Inserção das coordenadas, forças atuantes e restrições de movimento de cada nó;
3. Definição da quantidade de barras da estrutura;
4. Inserção das conectividades (nó inicial e final) de cada barra, atribuição de valores referentes ao material que a constitui, e identificação do grupo de barras a qual ela pertence;
5. Alteração, se necessário, das constantes de ANLG e PSO;
6. Seleção das restrições impostas ao problema;
7. Cálculo e visualização dos resultados.

As constantes referentes aos métodos de ANLG e PSO, por necessitarem de conhecimento de cada método para defini-las, já inicializam com valores pré-estabelecidos com valores que apresentaram bons resultados e são comumente utilizados na literatura para análise estrutural, porém podem ser alterados, caso se julgue necessário.

Para a análise das restrições de flambagem, como ilustrado na Fig. 11, este trabalho utilizou a tensão crítica de Euler para flambagem, que, segundo Hibbeler (2010) é descrita pela Eq. (27).

$$\sigma_{e_{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2} \tag{27}$$

Onde, $\sigma_{e_{cr}}$ é a tensão crítica de Euler e I é o menor momento de inércia da seção transversal da barra.

Para facilitar essa análise, inicialmente, foram considerados perfis comerciais tubulares de seção circular (Schedule 40), como o objetivo não era transformar o algoritmo para análise discreta, com auxílio do *software* Excel[®], foi feita uma relação, por interpolação exponencial, entre a área da seção transversal e o momento de inércia, como observado no gráfico da Fig.13.

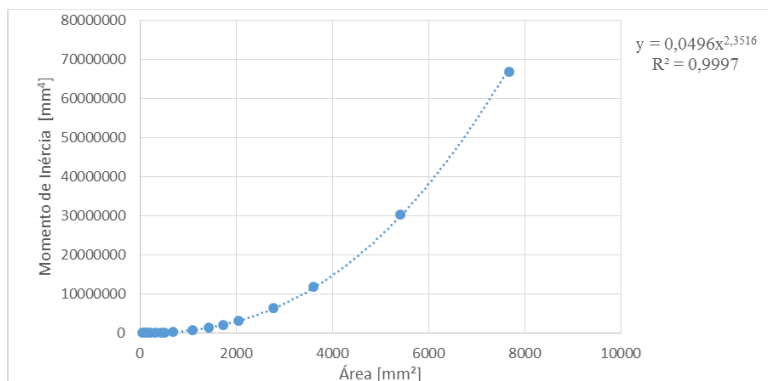


Figura 13. Relação entre área e momento de inércia de tubos comerciais Schedule 40.

Os valores utilizados para gerar o gráfico da Fig. 13, foram retirados de um catálogo da empresa Vallourec.

4. RESULTADOS

Para uma melhor organização, os resultados foram divididos em três subtópicos, estes fazendo referência à validação dos algoritmos de elementos finitos, aplicação do algoritmo de otimização estrutural e resultados na interface gráfica.

4.1 Validação dos Algoritmos de Elementos Finitos

A primeira validação do algoritmo e comparação entre AL e ANLG, foi realizada através da análise de uma treliça simples de duas barras iguais, presente em Posada (2007). Na Figura 14 pode-se observar a treliça analisada e os deslocamentos encontrados.

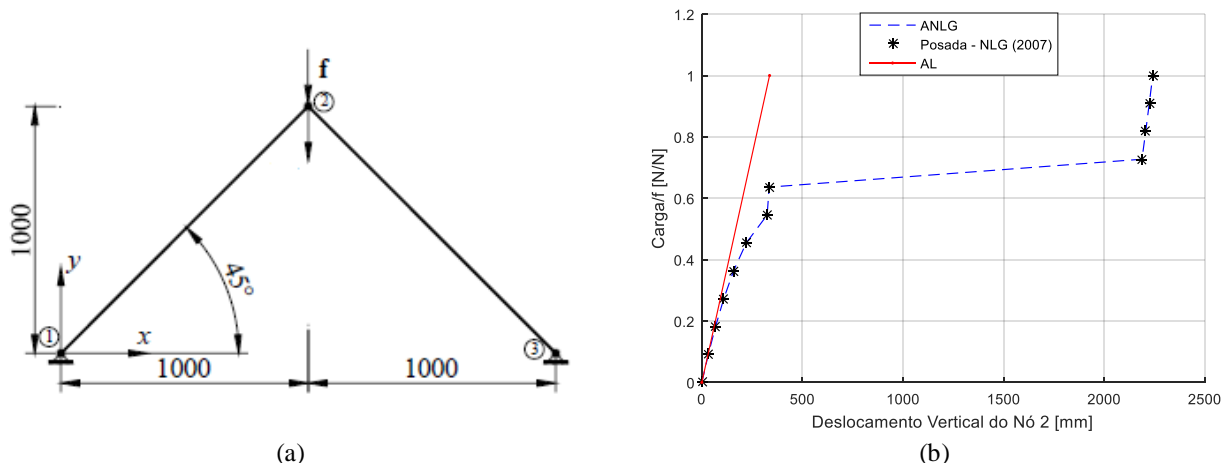


Figura 14. (a) Treliça de duas barras iguais (b) Curvas de equilíbrio.

Se aplicados ao exemplo de Lacerda (2014) valores reais de problemas de engenharia, as tensões de escoamento seriam violadas muito antes do primeiro ponto crítico do caminho de equilíbrio, contudo, vale mostrar como se deram as análises desse exemplo pelos algoritmos desenvolvidos neste trabalho. Na Figura 17, observa-se os resultados obtidos por ANLG e AL.

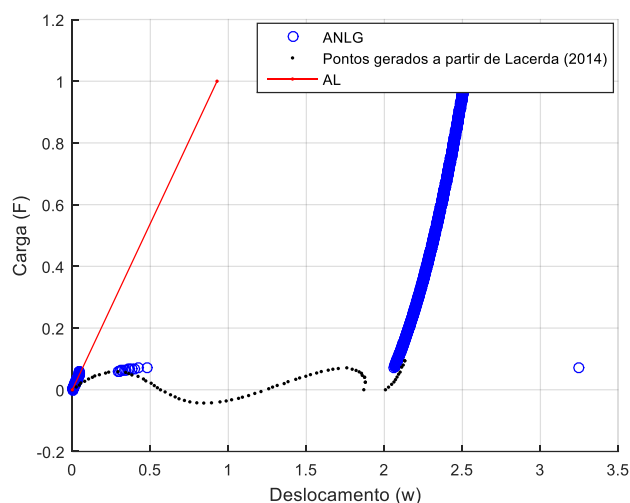


Figura 17. Deslocamentos obtidos por ANLG e AL

Para o método ANLG foram realizados 1000 incrementos de carga, com uma tolerância de convergência de 10^{-5} e máximo de 100 iterações. Observa-se que a solução pelo método de controle de carga possui divergências devido ao elevado grau de instabilidade no caminho de equilíbrio, ou seja, para o referido problema, a trajetória de equilíbrio, conforme Fig. 16b, apresenta vários pontos críticos, nos quais a derivada da tangente de rigidez é nula. Para estes pontos, o método de controle de carga não consegue ultrapassá-los e prosseguir com a análise estrutural para identificar os demais pontos sob a curva de equilíbrio da estrutura. Como consequência, o algoritmo se torna instável, resultando numa solução completamente errada, como pode ser observado no gráfico apresentado na Fig. 17.

A alternativa encontrada para lidar com o problema apresentado no parágrafo anterior, representa uma das contribuições deste trabalho. Para tal, o algoritmo não linear geométrico foi adaptado para lidar com este problema, o qual consiste nas seguintes alterações: conforme observado na sequência lógica do ANLG, Fig. 8b, ao final de cada passo de carga, é verificada a convergência do algoritmo e, caso não atendida, uma nova iteração incremental será executada. Optou-se por realizar uma verificação do estado de tensão nos elementos após cada passo de carga com o propósito de identificar quais elementos violaram alguma restrição (por exemplo: tensão de escoamento ou flambagem), os quais não estariam mais respondendo aos esforços tal como em seu estado original. Sendo assim, para os elementos que sofreram algum tipo de falha, estes são retirados do sistema utilizando um artifício matemático, ou seja, para a barra que tenha violado alguma restrição ao final do passo de carga, recebe uma rigidez nula dentro da matriz de rigidez tangente global da estrutura ($[K_t^G]$) e, posteriormente, realiza-se uma verificação da estabilidade da estrutura. O propósito desta verificação da estabilidade consiste em identificar se a ausência da barra que tenha violado a restrição torna a estrutura instável. Em caso positivo, o algoritmo é finalizado no corrente passo de carga, do contrário, um novo incremento de carga é aplicado à estrutura e a análise prossegue.

Além de fornecer um maior grau de confiança nos resultados obtidos pelo algoritmo, o critério de instabilidade desenvolvido possibilitará uma redução no custo computacional durante a otimização, visto que a condição de finalização da análise estrutural ficará condicionada à instabilidade da estrutura, e não mais ao carregamento aplicado, cuja convergência é atingida apenas quando todo o carregamento for aplicado durante o processo incremental e iterativo.

4.2 Aplicação do Algoritmo de Otimização Estrutural

Inicialmente, foi realizado a otimização da treliça de duas barras da Fig. 14a, pois a mesma possui apenas duas variáveis de projeto (barras) e assim possibilita a visualização e comparação das funções objetivo obtidas pelos algoritmos de AL e ANLG. Para cada algoritmo, foram realizados dois testes, o primeiro apenas com restrições de escoamento, e o segundo com restrições de escoamento e flambagem. As funções objetivo obtidas por AL e ANLG podem ser visualizadas na Fig. 18 e 19, respectivamente.

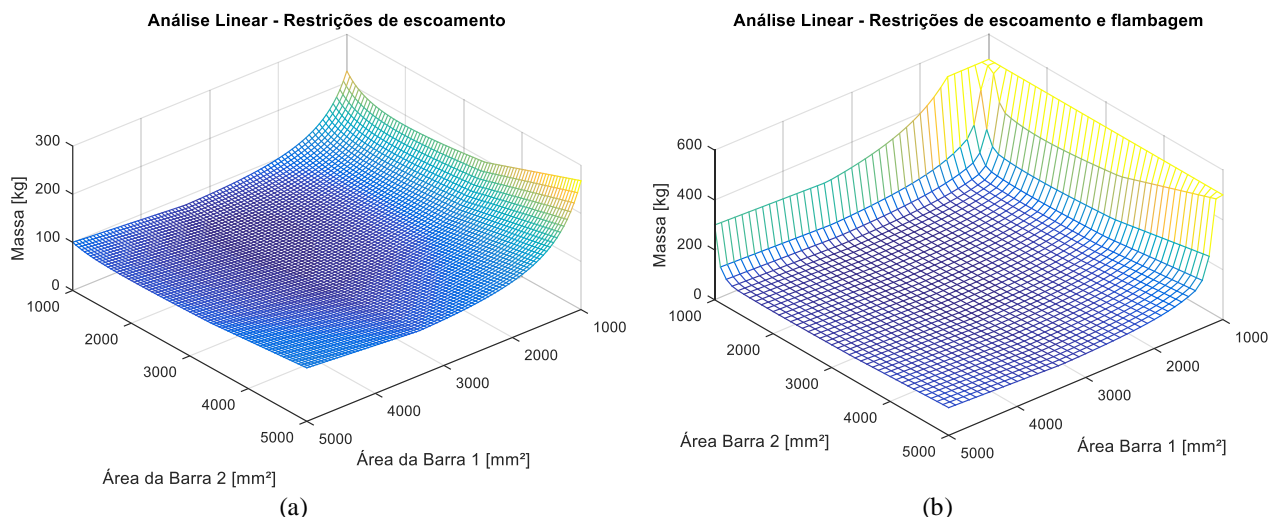


Figura 18. (a) Função objetivo da AL com restrições de escoamento (b) Função objetivo da AL com restrições de escoamento e flambagem.

Os gráficos apresentados na Fig. 18, mostram que a função objetivo do problema, segundo uma análise estrutural linear, apresenta uma superfície contínua e suave, mesmo sob a violação das restrições de tensão e flambagem, demonstrando que os algoritmos de otimização conseguem encontrar facilmente o mínimo desta função. Vale destacar que este caso é típico de problemas envolvendo análise estrutural linear, nos quais, como pôde-se observar, são melhor indicados para os métodos de otimização determinísticos, pois chegam rapidamente à solução do problema.

Ao comparar a função objetivo obtida considerando apenas as restrições de escoamento (Fig 18a) com a obtida considerando também as restrições de flambagem (Fig 18b), nota-se que, ao considerar os efeitos de flambagem, a função foi muito mais penalizada, principalmente nos limites inferiores de área.

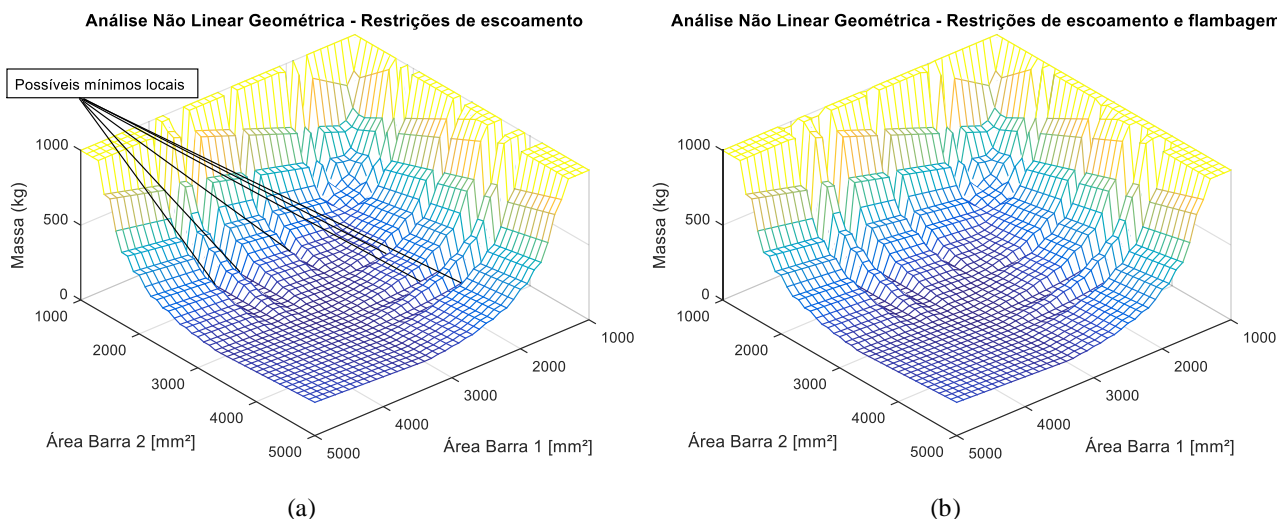


Figura 19. (a) Função objetivo da ANLG com restrições de escoamento (b) Função objetivo da ANLG com restrições de escoamento e flambagem.

Já, na Fig. 19, observa-se o quão irregular pode ser a função objetivo para análise não linear de estruturas espaciais, visto que para uma estrutura plana simples de duas barras a função objetivo já se mostra altamente irregular. Essas irregularidades podem vir a gerar diversos pontos de mínimo local, representando sérios problemas aos métodos de otimização determinísticos, os quais podem ficar "presos" nestes locais, não conseguindo encontrar o mínimo global. Entretanto, os métodos heurísticos, apesar de demorarem mais para chegar à solução do problema, conseguem lidar facilmente com este tipo de função, visto que, por não dependerem do gradiente da função, podem encontrar a solução ótima sem ficarem presos nos mínimos locais.

Observa-se, ainda na Fig. 19, que as funções objetivo foram muito mais penalizadas se comparadas às funções obtidas pela AL, isso é creditado ao aumento das tensões atuantes que ocorre devido ao salto de deslocamento observado na Fig 14b.

O segundo caso de otimização analisado, consistiu num problema frequentemente explorado na literatura para os casos de otimização estrutural, trata-se da treliça plana de dez barras, conforme ilustrada na Fig. 20.

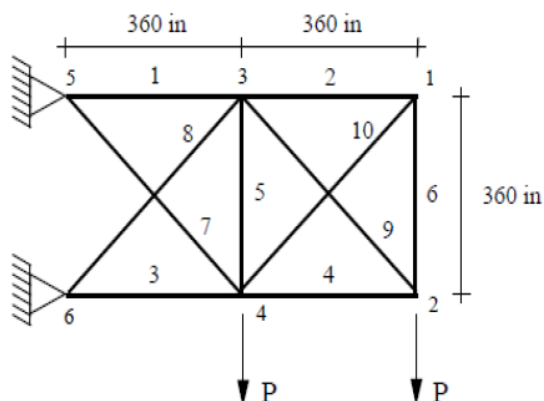


Figura 20. Treliça plana de 10 barras.

Fonte: Martins e Greco, Otimização Paramétrica de Estruturas treliçadas, em comportamento pós-critico, via Algoritmos Genéticos. 2013.

Os resultados obtidos na otimização do problema ilustrado, para AL foram comparados com os resultados trazidos por Sedaghati (2005), e para ANLG os resultados foram comparados com os resultados de Martins e Greco (2013), tais resultados podem ser observados na Tab. 1. Para essas análises os valores referentes à estrutura são, módulo de elasticidade $E = 68,9$ GPa, densidade $\rho = 2770$ kg/m³, tensão admissível (escoamento) $\sigma_y = 172,37$ MPa, força aplicada $P = 444,82$ kN (100 kips), deslocamento máximo permitido = 50,8 mm (2 in) e área mínima = 64,516 mm² (0,1 in²). Já para o algoritmo PSO, as constantes atribuídas foram $w = 0,7$; $c_1 = 2,05$; $c_2 = 1,95$; quantidade de partículas $n = 20$; máximo de iterações = 300 e tolerância para convergência = 10^{-6} .

Tabela 1. Comparação das áreas ótimas obtidas por AL, ANLG e valores da literatura.

Barra	Sedaghati (2005) A[in ²]	Martins e Greco (2013) A[in ²]	AL A[in ²]	ANLG A[in ²]
1	30,52	32,72	31,1	30,73
2	0,1	0,74	0,1	0,1
3	23,2	32,29	23,45	23,7
4	15,22	16,85	15,13	14,7
5	0,1	1,35	0,1	0,1
6	0,55	2,22	0,52	0,1
7	7,46	6,62	7,49	8,18
8	21,04	20,89	21,27	21
9	21,53	22,84	20,77	20,89
10	0,1	0,13	0,1	0,1
Massa [lb]	5060,85	5672,1	5066,5	5079,45

Para comparação com a literatura, os resultados das áreas foram expressos in² e a massa em lb. Pode-se observar que os resultados obtidos tanto por AL quanto por ANLG estão bem próximos dos resultados de Sedaghati (2005), encontra-se divergências com os resultados de Martins e Greco (2013), o que era esperado, pois os resultados trazidos pelos autores no trabalho referenciado, haviam sido comparados com análises lineares e encontrado divergências, as quais os autores creditaram à análise não linear e as constantes do algoritmo de otimização utilizadas. Portanto, a proximidade dos resultados entre os autores referenciados com o algoritmo de otimização estrutural implementado neste trabalho, asseguram que a referida implementação numérica está passível de ser aplicada à casos mais complexos, tais como os apresentados a seguir.

O caso de estudo apresentado agora, consiste na otimização da treliça espacial de 12 barras, apresentada na seção 4.1, Fig. 16. A referida estrutura, conforme observado anteriormente, apresenta um comportamento altamente não linear geométrico, portanto, pretende-se agora, investigar seus efeitos no resultado da otimização com o algoritmo PSO. Além disso, deve-se salientar que a análise estrutural, utilizando o método de controle de carga, só será possível de ser aplicado para este problema, graças ao critério de instabilidade desenvolvido neste trabalho. Foram realizadas duas otimizações, uma considerando apenas restrições de escoamento (Tab. 2a) e a outra considerando restrições de escoamento e flambagem (Tab. 2b). Considerou-se módulo de elasticidade $E = 200$ GPa, resistência ao escoamento $\sigma_y = 210$ MPa, densidade $\rho = 7850$ kg/m³ e força $F = 150$ kN. As constantes utilizadas foram: incrementos de carga = 20; tolerância de convergência para Newton-Raphson = 10^{-6} ; máximo de iterações para Newton-Raphson = 100; constante de penalização $c = 4$; número de partículas $n = 18$; tolerância de convergência do PSO = 10^{-6} ; máximo de iterações do PSO = 300; $w = 0,5$; $c_1 = c_2 = 2,03$ e área mínima = 40 mm². Para facilitar o entendimento dos resultados trazidos na Tab.2, a Fig. 21 traz a numeração atribuída à cada uma das doze barras.

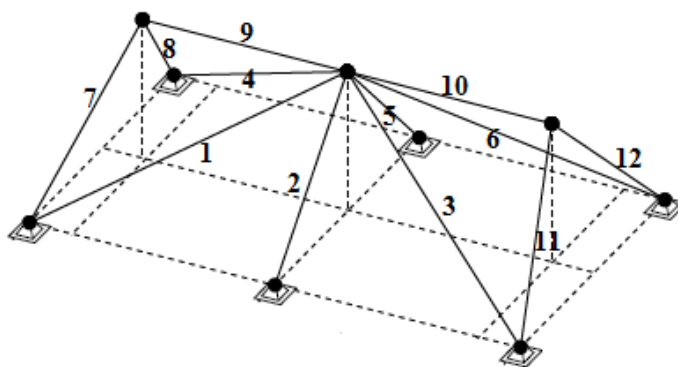


Figura 21. Numeração da treliça de 12 barras.

Tabela 2. Valores de área e tensões obtidos na otimização com (a) restrições de escoamento (b) restrições de escoamento e flambagem.

Barra	A [mm ²]	σ_{xx} [MPa]	$ \sigma_{xx}/\sigma_y $	$ \sigma_{xx}/\sigma_{e,cr} $	Barra	A [mm ²]	σ_{xx} [MPa]	$ \sigma_{xx}/\sigma_y $	$ \sigma_{xx}/\sigma_{e,cr} $
1	40,00	-86,05	0,41	29,31	1	273,55	-39,47	0,19	1,00
2	315,73	-210,00	1,00	1,80	2	590,64	-96,31	0,46	0,35
3	40,00	-86,09	0,41	29,32	3	273,55	-39,47	0,19	1,00
4	40,00	86,09	0,41	29,32	4	273,55	39,47	0,19	1,00
5	315,72	210,00	1,00	1,80	5	590,64	96,31	0,46	0,35
6	40,03	86,05	0,41	29,28	6	273,55	39,47	0,19	1,00
7	515,09	-210,00	1,00	0,96	7	515,09	-210,00	1,00	0,96
8	515,09	210,00	1,00	0,96	8	515,09	210,00	1,00	0,96
9	40,00	1,7E-11	8,3E-14	2,4E-12	9	40,00	3,4E-11	1,6E-13	4,7E-12
10	40,00	1,7E-11	8,2E-14	2,4E-12	10	40,00	3,4E-11	1,6E-13	4,7E-12
11	515,09	-210,00	1,00	0,96	11	515,09	-210,00	1,00	0,96
12	515,09	210,00	1,00	0,96	12	515,09	210,00	1,00	0,96
Massa [kg]	33,999				Massa [kg]	56,303			

(a)

(b)

Apesar de as restrições de flambagem não terem sido consideradas na primeira otimização, a quinta coluna da Tab. 2a, demonstra o grau de violação da restrição de flambagem (onde $\sigma_{xx}/\sigma_{e,cr} > 1$) caso a estrutura fosse projetada com as referidas áreas geradas pelo otimizador. Esse ponto destaca um aspecto estrutural relevante, demonstrando que a restrição de flambagem é o fator limitante do projeto, tal que, na sua ausência, a solução da otimização será uma estrutura mais leve, em comparação com a massa apresentada na Tab. 2b, porém, susceptível à falha por flambagem. Nota-se que ambas as análises possuem padrões para os valores de área, e isto pode ser devido ao fato da estrutura ser simétrica. Verificou-se que apenas para as barras 1 a 6 os valores de área divergiram devido as restrições de flambagem, pois, como observado na Tab. 2a, estas foram as únicas a violarem as restrições de flambagem. Embora as tensões nas barras 9 e 10 sejam quase nulas, estas são fundamentais para manter a estabilidade e rigidez da estrutura, visto que, se desconsideradas, as barras 7,8,11 e 12 não estariam vinculadas às demais barras da estrutura.

4.3 Resultados na Interface Gráfica

O principal objetivo da interface desenvolvida é auxiliar na entrada de dados e visualização dos resultados. Como comentado na seção 3.1, realizar a entrada de dados de forma manual para estrutura com maior número de elementos, pode ser trabalhoso e proporcionar erros devido a inserção incorreta de valores. A interface desenvolvida possibilita realizar a entrada de dados de forma simples e, para os valores referentes à geometria da estrutura, visualizar em tempo real os valores inseridos. Na Figura 12 observa-se a interface com a plotagem dos nós e das barras da estrutura. Observa-se que na interface desenvolvida, está presente apenas a análise não linear geométrica, visto que, conforme os resultados apresentados nas seções 4.1 e 4.2, a análise linear pode ter resultados não tão confiáveis.

5. CONCLUSÕES

Algoritmos para análise linear e não linear geométrica de treliças espaciais foram programados em MATLAB® e estes, a fim de verificar a acurácia dos resultados, foram aplicados com êxito em problemas simples presentes na literatura. A comparação entre as análises linear e não linear geométrica mostrou importância de se incluir os efeitos das não linearidades na análise estrutural, uma vez que a análise linear, ao considerar apenas a tangente de rigidez inicial para calcular os deslocamentos, pode retornar valores de tensões inferiores aos que a estrutura está sujeita de fato.

Foi analisado um problema-exemplo cujas condições ultrapassam as limitações do método utilizado para implementar os algoritmos de análise não linear geométrica. Com base na literatura, buscou-se formas de contornar tais problemas, para assim conseguir obter resultados confiáveis. Isto foi conseguido acrescentando o critério de instabilidade ao algoritmo. Assim, puderam ser analisadas estruturas que inicialmente não apresentavam resultados confiáveis pelo método de controle de carga.

Realizou-se o acoplamento dos algoritmos de análise estrutural ao algoritmo de otimização e, justificando a utilização de métodos heurísticos na otimização estrutural, foram ilustradas as funções objetivo para a treliça plana de duas barras, a qual, pela análise não linear geométrica, apresentou flutuações que caracterizam a formação de mínimos locais. Validando a implementação numérica desenvolvida, os resultados obtidos para os problemas abordados neste trabalho, mostraram-se muito próximos aos valores encontrados pelos autores referenciados.

Uma interface que possibilita, tanto a entrada de dados referentes à estrutura a ser otimizada, quanto a visualização dos valores de áreas ótimas, foi desenvolvida em MATLAB® GUI. Além de facilitar a entrada de dados, dispensando a necessidade de o usuário conhecer a linguagem de programação, a interface possibilita o acompanhamento da estrutura ao longo da inserção de seus nós e barras.

Por fim, um problema de otimização com restrições de escoamento e flambagem foi comparado ao mesmo problema com apenas restrições de escoamento, onde pode-se notar a importância da consideração dos efeitos de flambagem ao realizar o dimensionamento de estruturas esbeltas para assim obter uma maior segurança e confiabilidade associada ao projeto estrutural. As análises referentes à flambagem foram feitas para destacar a relevância de sua consideração no dimensionamento e otimização estrutural, visto que se considerou apenas barras de seções tubo-circular teóricas.

Assim, fica como sugestão para trabalhos futuros a criação de uma biblioteca de perfis estruturais comerciais. E, para se garantir uma confiabilidade ainda maior à análise estrutural por MEF, sugere-se a consideração das não linearidades físicas e o estudo e comparação de outros métodos de solução de problemas não lineares.

6. REFERÊNCIAS

- Bendsoe, M. P., Sigmund, O., 2003, “Topology Optimization: Theory, Methods and Applications”. Berlin ; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milan; Paris; Tokyo.
- Bonatto, I.L., 2017, “Otimização de Estruturas Treliçadas Através do Algoritmo SGA Considerando Restrições de Frequências Naturais”, monografia de graduação, UFRGS.
- Cagnina, C., Esquivel, S.C., Coello, C.A.C., 2008, “Solving Engineering Optimization Problems with the Simple Constrained Particle Swarm Optimizer”, Informatica, Vol. 32, pp. 319-326.
- Eberhart, R.C., Shi, Y., 2001, “Particle Swarm Optimization: Developments, Applications and Resources”, Congress on Evolutionary Computation.
- Esposito, A., 2012, “Programação Paralela e Sequencial Aplicada à Otimização de Estruturas Metálicas com o Algoritmo PSO”, dissertação de mestrado, UFRGS.
- Esposito, A., 2016, “Otimização do Risco de Estruturas Redundantes Considerando os Efeitos das Não Linearidades e Múltiplos Modos de Falha”, tese de doutorado, UFRGS.
- Faria, L.S., 2014, “Metaheurística da Evolução Diferencial para Otimização Estrutural no Projeto de Torres de Linhas de Transmissão de Energia Elétrica”, monografia de graduação, UFRGS.
- Fonseca, J., 2002, “Ferramentas de Simulação em Mecânica: Elementos Finitos”, disponível em <http://www.joinville.udesc.br/portal/professores/medeiros/materiais/finitos3.pdf>, acesso em 07 de agosto de 2017.
- Gomes, H.M., 2011, “Truss optimization with dynamic constraints using a particle swarm algorithm”, Expert Systems with Applications, Vol. 38, pp. 957–968.

- Gomes, W.J.S., 2010, “Estudo do Efeito de Incertezas na Otimização Estrutural”, dissertação de mestrado, EESC/USP.
- Hibbeler, R.C., 2010, “Resistência dos Materiais”, Ed. Pearson, São Paulo.
- Hibbeler, R.C., 2011, “Estática: mecânica para engenharia”, Ed. Pearson, São Paulo.
- Kennedy, J., Eberhart, R.C., 1995, “Particles Swarm Optimization”, IEEE International Conference on Neural Networks.
- Lacerda, E.G.M., 2014, “Análise Não Linear de Treliças pelo Método dos Elementos Finitos Posicional”, dissertação de mestrado, UFRN.
- Leite, F. N., Lavall, A.C.C., 2000, “Uma Formulação Teórica Consistente para Análise Não Linear de Estruturas Treliçadas Espaciais”, dissertação de mestrado, UFMG.
- Leon, S. E., Paulino, G.H. Pereira, A., Menezes, I.F.M., Lages, E.N., 2011, “A Unified Library of Nonlinear Solution Schemes”, ASME. Vol. 64, DOI: 10.1115/1.4006992.
- Martins, T. V.; Greco, M. Otimização Paramétrica de Estruturas treliçadas, em comportamento pós-critico, via Algoritmos Genéticos. Mostra PROPEEs UFMG. 2013.
- Medeiros, J.A.C.C., 2005, “Enxame de Partículas como Ferramenta de Otimização em Problemas Complexos de Engenharia Nuclear”, tese de doutorado, UFRJ.
- Muñoz-Rojas, P.A., Duarte Filho, L.A., 2001, “Análise Não-Linear Geométrica e Material de Treliças Espaciais - Programa ATENAS® -”, UFRGS.
- Oliveira, L.C., 2008, “Otimização Estrutural Utilizando o Algoritmo Evolucionário do Enxame de Partículas”, dissertação de mestrado, UFPE.
- Pereira, A., Marthá, L.F., Vaz, L.E., 2007, “Otimização baseada em confiabilidade: aplicação a treliças espaciais”, tese de doutorado, PUC-Rio.
- Porcher, F., 2016, “Otimização Estrutural Paramétrica com Restrições por Critério de Falha de Tensão Admissível e Colapso Através de Algoritmos Genéticos”, monografia de graduação, UFRGS.
- Posada, L.M., 2007, “Stability Analysis of Two-dimensional Truss Structures”, tese de mestrado, Universidade de Estugarda, Alemanha.
- Rezaiee-Pajand, M., Naserian, R., 2015, “Using residual areas for geometrically nonlinear structural analysis”, Ocean Engineering Vol. 105 p. 327–335.
- Santana, M. V. B., 2015, “Desenvolvimento de Sistema Computacional via MATLAB/GUI (Graphical User Interface) para Análise Geometricamente Não Linear de Estruturas”, dissertação de mestrado, UFOP.
- Sedaghati, R., 2005, “Benchmark case studies in structural design optimization using the force method”, International Journal of Solids and Structures, Vol. 42, pp. 5848–5871
- Silva, M. M. da, 2011, “Otimização de estruturas reticuladas incluindo não-linearidade geométrica”, dissertação de mestrado, UFJF.
- Vallourec, Tubos Estruturais: Seção Circular, Quadrada e Retangular. Disponível em <http://www.vallourec.com/COUNTRIES/BRAZIL/PT/Products-and-services/automotive-industrial-tubes/Documents/Catalogo%20Estruturais.pdf>. Acesso em 22 de outubro de 2017.

TRUSS OPTIMIZATION INCLUDING THE EFFECTS OF GEOMETRIC NONLINEARITY IN STRUCTURAL ANALYSIS

Rodrigo Pereira, rodrigoopereira@gmail.com¹

Adelano Esposito, adelano.esposito@farroupilha.ifrs.edu.br¹

Federal Institute of Education, Science and Technology of Rio Grande do Sul, São Vicente Avenue 785 – Farroupilha Campus, Farroupilha – RS. Zipcode 95180-000. Brazil.

Abstract: *The crescent competitive edge in the industrial sector has led the industries to look for more efficient manufacture methods and reduction of their wastes. In the case of metallic structures, the cost reduction is usually associated with the structure weight reduction, which is obtained with the use of slender structural element. Thus, in order to ensure safety to these systems, consideration of buckling occurrences and non-linear behavior of the structure become decisive factors for a project that is appropriate to the real conditions of use. In this context, this work had as objective the numerical implementation of a metaheuristic optimization algorithm that account, in the structural analysis, the linear and non - linear geometric behavior of plane and spatial trusses. In view of this purpose, a brief review of structural analysis, finite elements method, optimization problems and methods for solving them was presented. Then, the numerical models for structural analysis were implemented, as well as the coupling between these models and a particles swarm optimization algorithm. Finally, a graphical interface for data entry and visualization of the results of structural optimization was developed. For validation of the implemented models, benchmark cases were analyzed. The results obtained by the implemented algorithms was accordant with literature results, thus, it was observed that the implemented algorithms are operating correctly. It was noted the importance of considering the buckling criteria in the analysis and design of truss structures, because if a single bar is subjected to buckling, it can affect the behavior of all other bars of the structure.*

Keywords: *truss optimization, structural analysis, geometrical nonlinearity, finite elements method, PSO.*