INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO SUL *CAMPUS OSÓRIO*

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA UTILIZANDO A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

TAMIRES BON VIEIRA

Osório - RS
2019

Tamires Bon Vieira

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA UTILIZANDO A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – Campus Osório como parte dos requisitos para a conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profª. MScª. Fabiana Gerusa Leindeker da Silva

Osório - RS
2019

Tamires Bon Vieira

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA UTILIZANDO A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – Campus Osório como requisito básico para a conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profª. MScª. Fabiana Gerusa Leindeker da Silva

Banca examinadora:

____
Profª. Msc. Fabiana Gerusa Leindeker da Silva
Instituto Federal do Rio Grande do Sul

____
Profª. Msc. Ana Maria Mrás
Instituto Federal do Rio Grande do Sul

____
Profª. Msc. Eron Magno Aguiar e Silva
Instituto Federal do Rio Grande do Sul

Osório - RS
2019

Agradecimentos

Aos meus familiares, principalmente meu pai Ivo Vieira, que é sempre o primeiro a me apoiar e me incentivar em qualquer decisão.

Aos meus amigos e colegas de curso que estão torcendo por nós formandos da turma 2016/1 e que foram muito importantes durante todo este trajeto.

À minha orientadora, Fabiana por todos os ensinamentos, puxões de orelha e desafios que proporcionou, pois sem ela tudo teria sido completamente diferente e com toda certeza, seria muito difícil.

Muito Obrigada!

RESUMO

Neste trabalho de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática apresenta-se uma proposta de ensino de Análise Combinatória através da resolução de problemas. O objetivo da proposta é ajudar professores que atuam no ensino médio a trabalharem o conteúdo de análise combinatória de forma que os alunos consigam elaborar estratégias de resolução usando o princípio fundamental da contagem, desvencilhando-se das fórmulas de agrupamento (arranjo, permutação e combinação), visto que, é provável que o aluno não recorde das fórmulas e em nenhum vestibular/prova/concurso elas serão disponibilizadas. A metodologia utilizada nas propostas de ensino de análise combinatória está apoiada na teoria de resolução de problemas definida por George Polya (1995) e autores que desenvolveram trabalhos baseados em suas definições. Além disso, sugerimos uma solução para alguns problemas encontrados nas provas do ENEM e da OBMEP envolvendo o conteúdo, utilizando apenas o princípio fundamental da contagem. Para elaborar este trabalho foram realizadas pesquisas bibliográficas sobre a temática resolução de problemas no ensino da matemática e, também, sobre o ensino de análise combinatória no ensino médio.

Palavras chave: Análise Combinatória; Resolução de Problemas; Princípio Fundamental da Contagem; Ensino de Matemática.

ABSTRACT

This work of concludes the Mathematics Degree course is intended to present a teaching proposal of Combinatorial Analysis through problem solving. The purpose of the proposal is to help high school teachers to work on the content of combinatorial analysis the helping students can devise resolution strategies using the fundamental principle of counting, moving away from grouping formulas (arrangement, permutation and combination), for it likely that the student will not remember the formulas and in any college entrance exam / test / contest they will be not made available. The methodology used in the combinatorial analysis teaching proposals is supported by the problem solving theory defined by George Polya (1995) and authors who develop works based on their definitions. In addition, we suggest a solution to some problems encountered in ENEM and OBMEP tests involving content, using only the fundamental principle of counting. To elaborate this work were carried out bibliographical researches on the problem solving in the teaching of mathematics and also on the teaching of combinatorial analysis in high school.

Key words: Combinatorial Analysis; Resolution of Problem; Fundamental Principle of Counting; Math Teaching.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Existem, atualmente, inúmeras teorias e estratégias de ensino e aprendizagem da matemática. Dentre elas, destaca-se integralmente neste trabalho a metodologia de ensino por meio da Resolução de Problemas para uma proposta de ensino de Análise Combinatória, que tem como objetivo apresentar os conhecimentos de contagem através da resolução de problemas e mostrar que é possível trabalhar com problemas de contagem sem uso de fórmulas, apenas utilizando raciocínio combinatório construído a partir do Princípio Fundamental da Contagem. Além disso, objetiva-se auxiliar aqueles professores de matemática que não possuem tanto domínio do tema para que consigam inspirado neste, elaborar suas próprias estratégias de abordar o conteúdo.

Durante o curso de Licenciatura em Matemática foram estudadas diversas tendências para o ensino de matemática, sendo que a resolução de problemas foi a que mais gerou questionamentos, pois fazia assimilação a uma didática completamente diferente e, ao realizar breves estudos, foi possível perceber que esta metodologia é muito mais relevante do que, a princípio, parecia ser. A partir disso surgiu um interesse maior em explorar e desenvolver alguma atividade de ensino baseada nesta metodologia.

Além disso, durante o curso tive participação em um projeto chamado “OBMEP na Escola: uma preparação para as olimpíadas de matemática”, no qual eram realizados encontros semanais que contavam com a participação de alunos do próprio IFRS e também alunos de escolas da região.

Nesses encontros eram resolvidas questões cobradas em provas anteriores da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Pública (OBMEP), sendo utilizada a metodologia de resolução de problemas. Houve muitos momentos em que os conteúdos abordados nas questões ainda não haviam sido estudados pelos alunos e mesmo com esse déficit, a metodologia de ensino desenvolvida mostrou-se eficaz, pois possibilitou o ensino e a aprendizagem dos conteúdos e técnicas de resolução. Durante a minha participação neste projeto apresentei dois trabalhos no formato de comunicação oral, a respeito do tema, em eventos proporcionados pelo IFRS, nos quais surgiram novos questionamentos, ocasionando um interesse ainda maior pela temática.

Baseando-se nas experiências obtidas durante o projeto, percebeu-se a importância de pesquisar e refletir a respeito dessa metodologia de ensino, visto que “o aluno deve ser capaz não só de repetir ou refazer, mas também de resinificar em novas situações, de adaptar, de transferir seus conhecimentos para resolver novos problemas.” (PARRA, et al. 1996, p. 38).

A escolha de apresentar os estudos de Análise Combinatória se deu por conta de minhas experiências no estágio supervisionado ao ensino de matemática, com uma turma de 3º ano do ensino médio, na qual toda prática de estágio foi baseada no ensino deste conteúdo. Como quando fui aluna no ensino médio, foi bastante confuso o uso das fórmulas nos problemas de contagem, resolvi aprofundar meus conhecimentos sobre o conteúdo e percebi que todos os problemas de contagem não necessitam de fórmulas para serem resolvidos, sendo necessário apenas raciocínio lógico e o uso do princípio fundamental da contagem. E isso me motivou a produzir uma proposta para os professores que também se encontram em situações como a que me encontrei.

Portanto, este trabalho compõe-se de uma pesquisa bibliográfica a respeito da temática Resolução de Problemas, que tem por objetivo desmistificar eventuais equívocos e especulações a respeito do tema como: as considerações sobre a diferença de exercício e problema; características de um bom problema, como resolver um problema, a resolução de problemas e o ensino da matemática e os objetivos da resolução de problemas.

Para elaboração deste trabalho também foram realizadas pesquisas a respeito do ensino da análise combinatória e a análise combinatória no ensino médio, no qual é apresentado o conteúdo de análise combinatória a partir do princípio fundamental da contagem e por meio da resolução de problemas. Igualmente, um dos objetivos é apresentar uma proposta diferente para o ensino de análise combinatória, tendo como ferramenta principal o princípio fundamental da contagem. As deduções das fórmulas de agrupamento (arranjo, permutação e combinação) desenvolvidas na apresentação do conteúdo de análise combinatória também fazem parte da proposta de ensino.

Além disso, são apresentados alguns problemas das provas do ENEM e da OBMEP, que envolvem análise combinatória. Visto que essas provas fazem parte da trajetória escolar dos alunos e seus problemas são considerados de nível difícil, foi sugerida uma solução para cada problema por meio do princípio fundamental da contagem.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo tem por objetivo tratar sobre a metodologia de resolução de problemas e sobre a Análise Combinatória e seu ensino no Ensino Médio. No desenvolvimento deste teremos como referencial a teoria de resolução de problemas desenvolvida por George Polya (1995), e alguns trabalhos baseados nesta teoria produzidos por autores, como Dante (1996), Pozo (1998), Smole e Diniz (2001). Também foram utilizados os autores Iezzi (2007), Lima (2016), Dante (2009), para discorrer sobre o tema análise combinatória. Para fundamentar o ensino de Análise Combinatória foi realizada uma pesquisa nos Parâmetros Curriculares Nacionais - Terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental (PCN), Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio (PCNEM), Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio (PCN+) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

2.1 RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS

2.1.1 A Teoria De Resolução De Problemas

Quando se trata do ensino de matemática, logo se pensa em resolver problemas matemáticos. No entanto, muito se confunde problema com exercício. Portanto, para prosseguir, são necessárias algumas considerações em relação a exercício e problema.

2.1.1.1 Considerações sobre os Conceitos de Exercício e Problema

Ao pesquisar a expressão exercício em dicionários de língua portuguesa, encontra-se a seguinte definição: “ato de exercer ou exercitar, uso, prática.” No ensino de Matemática, não é diferente, serve para o aluno exercitar, praticar, repetir um algoritmo já conhecido para aperfeiçoar ou desenvolver uma competência. É quando, o aluno já possui conhecimento sobre o processo de resolução e vai apenas aplicá-lo para resolver o exercício dado, lendo o exercício, retirando as informações fornecidas e exercitando suas habilidades ao utilizar um algoritmo já conhecido.

> "As longas listas de somas, subtrações, multiplicações e divisões que constavam dos "cadernos de problemas" que completamos durante nossa Educação Primária são um claro exemplo do que é um exercício matemático. Mas um exercício não é só a repetição das operações matemáticas mais básicas, seja de forma oral ou de forma escrita, mas também pode ser um outro tipo de tarefa na qual o aluno não precisa tomar nenhuma decisão sobre os procedimentos que deve usar para chegar a solução." (POZO, 1998. p 48)

Um exercício pode, muito facilmente, ser confundido com um problema matemático e até ser proposto como um. Segundo Smole e Diniz (2001, p. 99) esses "problemas"

> "[...] são na verdade simples exercícios de aplicação ou de fixação de técnicas ou regras. Na maioria das vezes, percebe-se neles a ausência de um contexto significativo para o aluno e de uma linguagem condizente com a utilizada em seu dia-a-dia. Tais problemas aparecem sempre depois da apresentação de um conteúdo, e é exatamente este conteúdo que deve ser aplicado na resolução dos problemas."

As características básicas de um exercício ou problema convencional, como Smole e Diniz (2001, p. 89) o denominam, são:

> "texto em forma de frases, diagramas ou parágrafos curtos; os problemas vêm sempre após a apresentação de um determinado conteúdo; todos os dados de que o resolvedor necessita aparecem explicitamente no texto e, em geral, na ordem em que devem ser utilizados nos cálculos; os problemas podem ser resolvidos pela aplicação direta de um ou mais algoritmos; a tarefa básica na resolução é identificar que operações são apropriadas para mostrar a solução e transformar as informações do problema em linguagem matemática; a solução numericamente correta é um ponto fundamental, sempre existe e é única."

Um exercício pode ser ou não contextualizado e, quando bem elaborado pode se tornar um problema não convencional para o aluno, isso depende muito de como e quando o professor irá propor ele em sala de aula. Em muitos casos, os exercícios estão dispostos em uma lista de atividades, na qual os alunos já dispõem das fórmulas e algoritmos para resolvê-los. Trata-se de um treinamento, de algo que se repete por muitas vezes. O próprio nome, exercício, já nos remete à essa definição. Enfim, "não serão as tarefas em si, mas a forma de propô-las aos alunos e os objetivos fixados que definirão uma situação como um problema ou apenas como mais um simples e insignificante exercício." (POZO, 1998. p. 42)

> "É preciso reconhecer que, ao apresentar, por exemplo, vários problemas de adição, logo após o estudo dessa operação, estamos fazendo exercícios de aplicação para fixar a ideia de adição e o algoritmo da adição. Não estamos apresentando problemas-processo, pois o algoritmo a ser usado já é conhecido. Por isso, não há desenvolvimento de estratégias nem pesquisa e exploração. Basta simplesmente aplicar o algoritmo estudado anteriormente" (DANTE, 1996. p 59).

Ainda assim, é possível explorar esses problemas convencionais na perspectiva da metodologia de resolução de problemas. Para isso deve-se manipulá-los de forma a propiciar um processo de investigação.

Para Pozo (1998, p. 16), um problema se distingue de um exercício conforme dispomos e utilizamos mecanismos que levem à solução de forma instantânea ou não. "É possível que uma mesma situação represente um problema para uma pessoa enquanto que para outra esse problema não existe." Um problema pode ser tratado como um exercício devido a vários fatores, seja por falta de interesse pela situação exposta no problema, seja porque o aluno já possui mecanismos suficientes para resolvê-lo e assim não necessita criar uma estratégia de resolução tornando uma simples aplicação de um processo já conhecido. Por outro lado, um exercício pode ser visto como um problema quando o aluno é motivado pelo interesse no contexto abordado na atividade, por não ter um algoritmo pronto para resolvê-lo e assim precisa elaborar um plano de ação para então determinar a solução. Assim, "interpretar a informação contida num gráfico ou isolar uma incógnita numa equação matemática pode representar um problema, um exercício, ou nenhuma das duas coisas, para alunos com diferentes conhecimentos e atitudes".

Considera-se um problema matemático toda atividade que propicie uma investigação onde é possível realizar alguma descoberta, mesmo que não seja possível solucionar completamente a situação proposta. Tais problemas podem ser explorados a partir de atividade planejada, pesquisa de informações, resolução de problemas não convencionais ou até mesmo os convencionais, desde que estes estimulem um processo investigativo.

> "Uma investigação matemática desenvolve-se em torno de um ou mais problemas. Pode mesmo se dizer que o primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema a resolver. [...] Quando trabalhamos num problema, o nosso objetivo é naturalmente resolvê-lo. No entanto, para resolver o problema proposto, podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original. Outras vezes, não conseguindo resolver o problema, o trabalho não deixa de valer a pena pelas descobertas imprevistas que proporciona." (PONTE, 2016, p. 16-17)

Para Dante (1996, p. 43), um problema "é a descrição de uma situação onde se procura algo desconhecido e não se tem previamente nenhum algoritmo que garanta sua solução." Além disso, considera que, na resolução de um problema, o aluno tenha que dispor de criatividade e iniciativa, associada ao conhecimento de algumas estratégias.

2.1.1.2 Características de um Bom Problema

Os tipos de problemas são os mais variados. Há aqueles em que a tarefa solicitada está evidente e o aluno, ao aplicar de imediato um conceito, uma fórmula ou um algoritmo, encontra a sua solução. Em outros, a tarefa é apresentada de maneira clara no enunciado, porém exige do aluno um grau maior de interpretação, visto que este deverá adaptar antes de aplicar um conceito ou procedimento já conhecido. Há, ainda, problemas onde os processos para chegar ao resultado não estão nítidos. Nesse tipo de problema o estudante deve identificar os conceitos envolvidos e desenvolver uma estratégia em busca da solução. Problemas desse tipo fazem com que os alunos mobilizem seus conhecimentos e habilidades prévias, analisando modelos existentes e já conhecidos, com o intuito de construir um novo método que gere respostas adequadas. (BNCC, versão final, 2017, p. 535)

A seguir estão enumeradas e comentadas as característica de um bom problema, de acordo com Dante (1996):

1. “Ser desafiador para o aluno.” (DANTE, 1996. p.46)

Em geral, os problemas apresentados aos alunos são do tipo “problema-padrão”, onde não há um estímulo para solucioná-lo. É necessário que o problema desafie o educando e aguce sua curiosidade motivando-o a pensar em uma estratégia de encontrar o resultado.

2. “Ser real para o aluno.” (DANTE, 1996. p 46)

Os problemas devem conter dados reais. É interessante que o contexto do problema faça parte do dia a dia do estudante. Além disso, não faz sentido para o aluno, por exemplo, resolver um problema em que os valores numéricos apresentados não tenham conexão com a realidade. Conforme o PCN+

> “Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido.” (PCN +, 2006, p. 113).

Segundo a Base Nacional Comum Curricular, é importante, tanto na formulação como na resolução de problemas, contemplar contextos diversos. Durante a vida escolar os alunos devem desenvolver habilidades que servirão para resolver problemas que enfrentarão ao longo de suas vidas. Nesse sentido:

> “[...] os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade mais ampla e do mundo do trabalho.” (BNCC, versão final, 2017, p. 535)

Desta forma, entende-se ser importante que ao elaborar ou escolher as situações problemas que serão propostas aos estudantes, o professor considere e escolha aqueles que tenham sentido real para eles.

3. “Ser interessante para o aluno.” (DANTE, 1996, p.46)

Selecionar os problemas adequados à faixa etária dos alunos é imprescindível para se obter êxito no envolvimento deles, pois, por exemplo, problemas que envolvam atividades financeiras são interessantes para adultos, porém, dependendo do contexto, não são do interesse de crianças. Por conseguinte, a motivação, um dos fatores mais importantes para o envolvimento do aluno com a situação problema, só será alcançada se o problema abordar um tema interessante para o mesmo. De acordo com Dante “essa motivação é interior e natural quando os dados e as perguntas do problema fazem parte do dia-a-dia do aluno (esporte, televisão, música popular etc.)”.

4. “Ser o elemento desconhecido de um problema realmente desconhecido.” (DANTE, 1996. p. 47)

É interessante que a incógnita que o problema procura seja algo que realmente não se conhece e que não há como conhecê-la apenas perguntando a alguém. De acordo com Dante, um problema onde se busca encontrar a idade de uma pessoa, não é um problema realmente desconhecido, visto que para descobrir tal idade, basta perguntar a ela, “pois, na realidade, a idade de qualquer pessoa já está determinada” (DANTE, 1996, p. 47).

5. “Não consistir na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações aritméticas.” (DANTE, 1996, p. 47).

O problema não pode ser resolvido de forma direta com o uso de um algoritmo já conhecido e utilizado pelo aluno em outras situações. Um bom problema gera no aluno pensamentos de como modelar a situação de acordo com seu objetivo de encontrar a solução. A partir de muitos processos de pensamento, o aluno verifica as hipóteses que lhe proporcionam criar estratégias de solução.

6. “Ter um nível adequado de dificuldade.” (DANTE, 1996. p. 47)

É muito importante tomar cuidado com o grau de dificuldade do problema a ser abordado. Considere que o problema deve ser desafiador, porém proposto a alunos capazes de resolvê-lo de acordo com o nível de escolaridade. Propor problemas com nível elevado de dificuldade em relação a série em que os alunos se encontram, pode causar nesses “frustrações e desânimos irreversíveis, traumatizando-os não só em relação à resolução de problemas, mas também em relação à Matemática como um todo” (DANTE, 1996. p. 47). Por outro lado, se o nível de dificuldade for abaixo do razoável para determinada série/ano, o problema deixa de ser desafiador e passa a atuar como um mero exercício.

De posse das principais características que devem fazer parte de um bom problema, a próxima etapa será analisar os métodos para a sua resolução.

2.1.1.3 Como Resolver um Problema

Ao resolver um problema, é preciso enfrentar alguns passos para chegar ao resultado desejado. George Polya (1995) defende que o primeiro passo da resolução de um problema é compreendê-lo e que, ao todo, são quatro importantes passos para encontrar a solução de um problema.

1º Passo: Compreendendo o problema

Nesse passo, a sugestão é responder uma série de perguntas para compreender o problema. São exemplos de perguntas que podem ser feitas e respondidas: “O que o problema está procurando, ou seja, qual é a incógnita?”, “Quais são os dados fornecidos pelo problema, hipóteses?”, “Quais as condições e restrições do problema?”, “É possível satisfazer as condições impostas?”, “As informações são suficientes para resolver o problema? Ou são insuficientes? Ou redundantes? Ou contraditórias?”.

Este primeiro passo determinado por George Polya está em conformidade com as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais onde uma das estratégias para enfrentamento de situações-problema é

> “Identificar os dados relevantes em uma dada situação problema para buscar possíveis resoluções; por exemplo, em situações com uma diversidade de dados apresentados por meio de tabelas, gráficos, especificações técnicas, reconhecer as informações relevantes para uma dada questão que se busca resolver.” (PCN +. p 115)

O primeiro passo, para resolver um problema matemático, não consiste em retirar dados numéricos do enunciado, jogá-los em fórmulas ou algoritmos e realizar inúmeros cálculos, trata-se de compreender o problema, entender o que ele está pedindo, qual é a incógnita? Para isso devem-se analisar quais são os dados fornecidos pelo problema e se esses são suficientes e necessários (POLYA, 1995). No entanto, compreender o problema não significa apenas compreender a linguagem, palavras e símbolos pelos quais ele é apresentado, mas, além disso, se colocar em posição e assumir uma postura ativa desse problema apresentando uma disposição para buscar a solução (POZO, 1996).

Além de compreender o problema o aluno deve desejar resolvê-lo e cabe ao professor instigar esse desejo. Para tanto, o problema deve ser muito bem escolhido, não sendo nem muito difícil e nem muito fácil conforme já mencionado nas características de um bom problema, de forma que o aluno sinta-se confiante para resolvê-lo. Além disso, deve se dedicar um certo tempo para a sua apresentação.

2º Passo: Estabelecer um plano de ação

Estabelecer um plano de ação, ou seja, uma ideia para solucionar o problema, é a principal etapa para obter o êxito na sua resolução. Esta ideia pode surgir aos poucos, porém, também pode acontecer de uma ideia brilhante aparecer após um período de muitas dúvidas e algumas ideias ineficazes. O professor deve orientar seus alunos a analisar como os dados do problema estão relacionados, encontrando uma conexão entre as informações fornecidas e a incógnita. Neste momento, é importante que o professor lembre-se das suas experiências, dificuldades e sucessos que encontrou na resolução de problemas.

Se o aluno tem pouco ou nenhum conhecimento sobre o assunto relativo ao problema ficará difícil de ele encontrar uma boa ideia para resolvê-lo, visto que as ideias surgem baseadas em experiências adquiridas ao longo de sua vida acadêmica. Desta forma, o professor poderá provocar seus alunos com algumas perguntas levando-os a considerar problemas auxiliares quando não for possível encontrar uma solução imediata.

Os seguintes questionamentos e sugestões são importantes: “Já viu esse problema antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado de uma forma diferente?”, “Considere a incógnita. Procure lembrar-se de um problema já visto que apresente a mesma incógnita ou uma incógnita semelhante”. Se o aluno encontrou um problema análogo, o professor deve questionar se é válido e possível utilizá-lo para criar uma estratégia. O estudante terá um plano de ação quando, de modo geral, souber quais os cálculos, ou os desenhos, ou tabelas que precisa executar para obter a incógnita.

Em conformidade com o exposto acima, as Orientações Educacionais Complementares, sugerem como estratégia para a resolução de problemas, identificar as informações ou variáveis relevantes e elaborar possíveis estratégias para resolução:

> "Identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema; por exemplo, para obter uma dada distância, saber optar por medi-la diretamente, utilizar uma planta em escala, usar semelhança de figuras, fazer uso de propriedades trigonométricas ou utilizar um sistema de eixos cartesianos e abordar o problema através da geometria analítica." (PCN +, 2006, p. 115)

Para isto, é muito importante que o aluno faça um vínculo com problemas já resolvidos, verificando se já lhe fora proposto um exercício semelhante, que a incógnita seja a mesma ou similar. A partir deste, é possível elaborar um plano de ação ligando os dados fornecidos com a incógnita desejada. Além do mais, o professor deve fazer esse meio de campo, caso perceba que o aluno ainda não tem um plano de ação, continuando com questionamentos e sugestões pertinentes como, por exemplo, conceder discretamente uma "ideia luminosa" (POLYA, 1995. p.7).

3º Passo: Execução do plano de ação

Se o plano de ação já foi elaborado é hora de partir para a execução deste. Para isto precisa-se de muita paciência, pois o plano de ação apenas lhe proporciona um roteiro geral. Durante esse processo, o aluno deve estar atento a cada detalhe evitando deixar algum passo importante para trás no qual possa se esconder um erro. Se o plano de ação pré estabelecido for muito bem elaborado, o professor pode ficar tranquilo, contudo deve instigar seus alunos a revisar sempre cada passo. Se o estudante recebeu o plano de fora e o aceitou por influência do professor, corre o risco de esquecer seu plano, visto que não foi ele próprio que o preparou (POLYA, 1995).

4º Passo: Retrospecto

É comum acontecer, até mesmo com alunos dedicados, que ao chegar ao resultado final do problema, encerra-se aquele pensamento e parte-se para o próximo assunto. No entanto, o último passo definido por Polya aponta que ao fazer isso, o aluno está deixando de lado uma fase importante e instrutiva do trabalho de resolução. Se um retrospecto completo da resolução for reconsiderado, reexaminando o processo pelo qual foi preciso passar para chegar até o resultado final, é possível consolidar seu conhecimento e aperfeiçoamento para resolução de problemas. Um bom professor deve compreender e transmitir a seus alunos que nenhum problema fica completamente esgotado. Para tanto, é necessário que sejam feitos os seguintes questionamentos: é possível verificar o resultado? Usou todos os dados? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível utilizar o método ou resultado na resolução de um problema semelhante? Sobre esse processo de aquisição de conhecimento, Dante discorre:

> “Devemos motivar as crianças a reverem o seu raciocínio, descrevendo-o, a pensarem como poderiam ter resolvido de outra maneira o problema, a testarem a solução encontrada, a generalizarem os resultados e a criarem novos problemas a partir daquele resolvido.” (DANTE, 1996, p. 60)

Nesta última etapa, repassando todo o problema, o aluno irá rever como pensou inicialmente, como direcionou sua estratégia de resolução, como efetuou os cálculos, em suma, todo o caminho percorrido para chegar à solução. Esse processo cuidadoso é um importante exercício de aprendizagem e serve também para localizar e corrigir possíveis equívocos (DANTE, 1996).

É nesse retrospecto que os alunos desenvolvem a competência da comunicação, pois os estudantes precisam apresentar e justificar seus resultados, interpretando os seus e também os resultados dos colegas, interagindo com eles. Neste momento os alunos são instigados a justificar suas conclusões transpondo os símbolos matemáticos e conectivos lógicos para a língua materna, se fazendo entender para os demais colegas, ao realizar apresentação oral de seus resultados ou elaborando relatório ou registro dos passos realizados.

2.1.2 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

A medida que vamos nos englobando no que se chama uma sociedade da informação gradativamente integralizada, é relevante que a Educação se direcione para os desenvolvimentos das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente (PCNEM, 1998).

Educadores matemáticos sugerem que a resolução de problemas deve ser o ponto de partida para as atividades matemáticas, visto que o conhecimento matemático fica significativo quando os alunos são desafiados a criar estratégias para encontrar o resultado. No entanto, os problemas são utilizados, tão somente, como forma de aplicação de conhecimentos e para a prática de algoritmos ou processos de resolução aprendidos anteriormente, ou seja, para a reprodução de procedimentos, conforme relatam os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> A prática mais frequente consiste em ensinar um conceito, procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para a grande maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com os números do enunciado ou aplicar algo que

> aprenderam nas aulas. Desse modo, o que o professor explora na atividade matemática não é mais a atividade, ela mesma, mas seus resultados, definições, técnicas e demonstrações. (PCN, 1998, p. 39).

Como resultado, o saber matemático é, para o aluno, um "interminável discurso simbólico, abstrato e incompreensível". Diante disso, "a concepção de ensino e aprendizagem subjacente é a de que o aluno aprende por reprodução/imitação" (PCN, 1998. p 40).

No ensino de Matemática, os problemas devem ser propostos com a intenção de gerar questionamentos, proporcionando aos alunos mobilizar conhecimentos, analisar as informações, desenvolver estratégias desconhecidas, enfim, inquietar o aluno retirando-o da zona de conforto criada pela repetição de procedimentos pré fixados. Dessa forma, o professor oportuniza o aluno a "ampliar seus conhecimentos acerca dos conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança" (PCN, 1998, p 40).

Além disso, a importância de utilizar a metodologia de resolução de problemas no processo de aprendizagem da matemática pode também ser verificada nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, no qual a resolução de problemas está definida como peça central para o ensino de Matemática, visto que

> "o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas." (PCN +, p 112)

É importante observar que a função do professor deve ser de orientador. Ele deve sugerir o caminho a ser tomado, porém sempre por meio de questionamentos que levem o aluno a compreensão completa sobre o problema. É do estudante o dever de resolver o problema, desta forma ele constrói sua linha de raciocínio e adquire experiência e, passa a confiar que está preparado para solucionar os próximos problemas que surgirem, isto é, desenvolve a capacidade de resolver problemas sozinho, confiando em si mesmo.

Os PCNs definem alguns princípios para a resolução de problemas como eixo organizador no processo de ensino e aprendizagem de Matemática que serão citados e comentados a seguir.

> “A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las.” (PCN, 1998. p 40)

Em outras palavras, este princípio sugere que, antes de o professor abordar as definições e fórmulas relativas a um determinado conteúdo matemático, ele deve apresentar e explorar um problema a partir do qual os alunos sejam capazes de desenvolver um pensamento e uma estratégia de resolução. Deste modo, os conceitos relativos ao conteúdo matemático que o professor pretende ensinar, surgirão naturalmente.

> “O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada.” (PCN, 1998, p. 40)

Conforme visto anteriormente, alguns exercícios podem ser confundidos com problemas. Desta forma o professor deve tomar o cuidado de escolher problemas que não podem ser resolvidos de forma mecânica, sem a necessidade de interpretação e reflexão sobre eles, ou em que o uso de fórmulas é predominante e a solução encontrada de imediato.

> “Aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática.” (PCN, 1998, p. 40)

O estudante deve fazer conexões com problemas já vistos e encontrar relações entre suas soluções, criando novas estratégias com base naquelas que foram utilizadas em problemas anteriores.

> “Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular.” (PCN, 1998, p. 40)

O princípio acima corrobora com o quarto passo da teoria de resolução de problemas desenvolvida por George Polya que tem como objetivo conscientizar o aluno que com o estudo e aprofundamento é possível melhorar uma resolução e aperfeiçoar a compreensão do problema e conceitos envolvidos.

> “A resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.” (PCN, 1998,. p. 40)

Uma das finalidades da metodologia de resolução de problemas é consolidar o conhecimento do aluno e ampliar sua capacidade de resolução permitindo um processo de aprendizagem mais sólido.

Para que o ensino da matemática possa resultar em uma aprendizagem geral e significativa para os alunos os objetivos estabelecidos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais são:

1. “compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
2. aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
3. analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
4. desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
5. utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
6. expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
7. estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
8. reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
9. promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.” (PCNEM, 1998. p. 42)

Ao elaborar um plano de aula qualquer, são estabelecidos os objetivos a serem alcançados naquela aula, adota-se uma metodologia e é traçado um caminho para o desenvolvimento da mesma. Uma atividade de ensino baseada na metodologia de resolução de problemas, tendência em Educação Matemática, quando bem planejada, é capaz de atingir os objetivos enumerados acima, propostos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Luiz Roberto Dante, no primeiro capítulo de seu livro “Didática da Resolução de Problemas de Matemática”, trata dos objetivos da resolução de problemas. A seguir serão elencados e comentados tais objetivos, relacionando-os com os objetivos listados anteriormente pelo PCNEM (1998).

“Fazer o aluno pensar produtivamente” (DANTE, 1996. p. 11) - De acordo com os PCNs o pensar e o fazer mobilizam e desenvolvem quando o estudante está envolvido em solucionar desafios. Alcançando esse objetivo, ao utilizar a metodologia de resolução de problemas, também serão alcançados os objetivos “1”, “3”, “4”, “7” e “8” estabelecidos pelo PCNEM (1998).

“Desenvolver o raciocínio do aluno” (DANTE, 1996. p.11) - Ao propor a metodologia de resolução de problemas matemáticos dentro da sala de aula o professor favorece o desenvolvimento do raciocínio e o poder de interpretação do aluno, auxiliando-o na convivência com o mundo. Este objetivo é equivalente aos objetivos “2”, “4”, “5”, “7” e “8” estabelecidos no PCNEM (1998).

“Ensinar o aluno a enfrentar situações novas” (DANTE, 1996. p. 12) - É essencial preparar o aluno para sua vida futura. Ensinar apenas conceitos e algoritmos que atualmente são relevantes parece não ser o caminho, visto que eles poderão tornar-se antiquados daqui a quinze ou vinte anos. Para preparar adequadamente o aluno, “é fundamental desenvolver nele iniciativa, espírito explorador, criatividade e independência através da resolução de problemas” (DANTE, 1996 p.12). Podemos observar que este atinge os objetivos “1”, “2” e “9” definidos no PCNEM (1998).

“Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática” (DANTE, 1996. p. 13) - Usar os conceitos matemáticos em situações reais, do cotidiano, favorece o desenvolvimento de um pensar crítico no aluno. Não é suficiente realizar inúmeros cálculos mecanicamente e sem um propósito. A Matemática passa a fazer muito mais sentido na vida do aluno quanto este soluciona um problema aplicado, por meio de estratégias e cálculos. Podemos observar que este atinge vários dos objetivos definidos pelos PCNEM (1998).

“Tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras” (DANTE, 1996, p. 13) - Uma aula se torna mais dinâmica e motivadora quando for baseada na resolução de problemas, onde o professor tem o papel de incentivador e orientador e os alunos trabalham ativamente na busca pela solução de um determinado problema. Este objetivo é equivalente aos objetivos “2”, “4” e “9”.

“Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas” (DANTE, 1996, p. 14) - A capacidade de raciocínio, a habilidade de interpretação, o sentimento de autoconfiança e autonomia são desenvolvidos e aprimorados no aluno ao equipá-lo com a competência de criar um plano de ação para resolver um amplo número de situações problema. Podemos observar que este atinge todos os objetivos listados por BRASIL (1998).

“Dar uma boa base matemática às pessoas” (DANTE, 1996, p. 15) - Ao elaborar um plano de aula de Matemática, deve-se ter em mente que um dos objetivos é alfabetizar matematicamente os alunos. Um cidadão que tem uma boa base matemática saberá solucionar problemas que surgem no dia-a-dia, avaliando as possibilidades, criando estratégias de modo inteligente, para então tomar a melhor decisão. Ao incluir a resolução de problemas no currículo de Matemática elementar, estar-se-á colaborando para o desenvolvimento desta capacidade de enfrentar situações-problemas. Este objetivo é relativo aos objetivos “2”, “3”, “4” e “9” definidos pelos PCNEM (1998).

Visto isto, pode-se considerar que a metodologia de resolução de problemas pode ser uma forte aliada para atingir os objetivos estabelecidos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino da matemática e, além disso, para atingir satisfatoriamente as habilidades e competências que devem ser desenvolvidas em Matemática.

Ao ensinar a Matemática de forma contextualizada e relacionando-a com outros conhecimentos, é possível desenvolver no aluno competências e habilidades relativas à compreensão e interpretação de diversas situações, tornando-o capaz de analisar, avaliar, argumentar e tomar suas próprias decisões. Abaixo listam-se algumas das habilidades e competências a serem desenvolvidas em Matemática de acordo com o PCNEM (1998, p. 46):

- “Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
- Distinguir e utilizar raciocínio dedutivos e indutivos.
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
- Distinguir ideias e produzir argumentos convincentes.
- Ler e interpretar textos de Matemática.
- Ler, interpretar e utilizar representações matemática (tabelas, gráficos, expressões etc).
- Transcrever mensagens matemática da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc) e vice-versa.
- Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como linguagem matemática, usando a terminologia correta.
- Produzir textos matemáticos adequados.
- Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.
- Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho.
- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção real.
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.”

Conforme já exposto, a utilização da metodologia de resolução de problemas desenvolve no educando muitas das habilidades e competências elencadas acima. Não se tem o propósito de afirmar que os exercícios e problemas convencionais devem ser deixados de lado, visto que eles cumprem uma importante função no aprendizado de técnicas e propriedades. Apesar disso, as infinitas listas de exercícios de repetição, são insuficientes no preparo de um aluno para que este seja capaz de adquirir experiência e pensamento crítico na aplicação da Matemática em situações reais, ou seja, são insuficientes para formar um cidadão ativo e participante, capaz de tomar decisões rápidas e precisas.

> "A resolução de problemas não é uma atividade isolada para ser desenvolvida separadamente das aulas regulares, mas deve ser parte integrante do currículo e cuidadosamente preparada para ser realizada de modo contínuo e ativo ao longo do ano letivo, usando as habilidades e os conceitos matemáticos que estão sendo desenvolvidos. Não se aprende a resolver problemas de repente. É um processo vagaroso e contínuo, que exige planejamento." (DANTE, 1996, p. 59)

Nesse sentido, a seleção de temas e conteúdos, assim como a forma de abordá-los em sala de aula são decisivos, pois é preciso que se tome muito cuidado com a maneira que se organiza as atividades e a forma como elas serão abordadas. Caso o professor peque em insistir em programas extensos, abordando conteúdos sem sentido e desmembrados, no qual o aluno apenas reproduz a sua transmissão, as competências certamente não serão desenvolvidas.

A resolução de problemas é uma importante metodologia de ensino e pode ser muito bem utilizada nos processos de contagem ao ensinar Análise Combinatória. Existe uma gama de tipos de problemas que podem ser abordados no ensino desta parte da Matemática e com estes o estudante poderá desenvolver a experimentação, a organização de dados, a capacidade de raciocínio, argumentação e comunicação.

2.2 A ANÁLISE COMBINATÓRIA

2.2.1 O Ensino De Análise Combinatória

O ensino de matemática no ensino médio propõe que as habilidades e competências desenvolvidas no ensino fundamental sejam exploradas para o desenvolvimento de novas competências e habilidades. Nesse sentido, os conhecimentos específicos devem encorajar "processos mais elaborados de reflexão e de abstração", que permitam os alunos formular e “resolver problemas nos diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos” (BNCC, versão final, 2017, p. 529).

Segundo a Lei nº 9.394/96, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional e que em sua seção IV refere-se a etapa final da educação básica, o ensino médio tem como finalidade: firmar e aprofundar os conhecimentos já adquiridos até o momento, para que o aluno possa prosseguir em seus estudos futuros; preparar o estudante para o mundo do trabalho e para cidadania; limar o educando como pessoa humana, proporcionando sua formação ética e o desenvolvimento de autonomia intelectual e do pensamento crítico.

É necessário que os estudantes do Ensino Médio desenvolvam habilidades e competências relativas a processos investigativos, onde trabalhem com sua capacidade de representar, argumentar, comunicar e elaborem estratégias para solucionar problemas construindo modelos matemáticos eficazes na solução de outros problemas.

Nesse sentido, ensinar a contagem, permite “o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório.” (PCN+, p. 126) No ensino deste conteúdo o aluno pode ser colocado como protagonista nos problemas abordados, tomando decisões, organizando o pensamento e criando estratégias para decidir a forma mais adequada de contar os possíveis casos de uma determinada situação.

É um desafio, enfrentado pelos professores do Ensino Médio, o ensino de Análise Combinatória. É possível que essa dificuldade esteja relacionada à forma que o docente aborda este conteúdo, definindo os diferentes agrupamentos mais utilizados em problemas de contagem, entregando já no início os nomes, arranjo, permutação e combinação, e suas fórmulas.

Ao fazer isso, o professor leva o aluno a pensar que todo e qualquer problema de Análise Combinatória poderá e deverá ser resolvido com uso das fórmulas de agrupamento que foram definidas em aula, e, a única tarefa que lhe resta para resolver um problema de contagem, será descobrir qual o tipo de agrupamento que o problema está abordando e aplicar a fórmula correspondente.

No entanto, a Análise Combinatória oferece uma valiosa oportunidade para que o professor utilize a metodologia de resolução de problemas. Além disso, os PCN+ sugerem que a contagem “não deve ser aprendida como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação.” (PCN +, p. 126)

Ao resolver um problema de Análise Combinatória, o aluno deve ser instigado a tomar algumas atitudes e criar estratégias. O professor deve estimular o aluno a se colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e verificar quais decisões devem ser tomadas (LIMA, 2016, p. 86). Com isso, o aluno deixa de ser passivo e passa a ser protagonista na resolução do problema, e ainda torna mais claro as decisões que deverão ser tomadas durante a resolução.

O professor deve orientar o aluno a “dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples” (LIMA, 2016, p. 86), sempre que possível. Por exemplo, ao formar uma senha numérica de quatro dígitos, utilizando os dez algarismos, deve-se dividir as decisões em: decisão um: escolher o primeiro dígito; decisão dois: escolher o segundo dígito; decisão três escolher o terceiro dígito; quarta decisão: escolher o quarto dígito.

Outro fator importante ao resolver problemas de análise combinatória é que não se pode deixar de lado as decisões consideradas difíceis. Segundo Lima (2016, p. 87), “pequenas dificuldade adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar”.

Os conteúdos e habilidades propostos pelos PCN+ para o estudo de contagem são:

> “Conteúdo: princípio multiplicativo; problemas de contagem.
> Habilidades: Decidir sobre a forma mais adequada de organizar os números e informações com objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos; Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem; Identificar dados e relações envolvidas numa situação problema que envolva raciocínio combinatória, utilizando os processos de contagem.” (PCN+, p. 127)

Uma das habilidades definidas pela BNCC é “Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos, ordenados ou não, de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.” A utilização do diagrama de árvore é uma boa estratégia para encontrar a solução de problemas de análise combinatória iniciais, para deduzir o Princípio Multiplicativo.

As fórmulas dos agrupamentos devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido por meio do Princípio Fundamental da Contagem utilizado na resolução de problemas. É importante deixar claro que as fórmulas têm a função de simplificar cálculos quando a quantidade de elementos a serem contados é muito grande, mas não substituem os processos de pensamento para determinar a melhor estratégia de resolução.

2.2.2 A Análise Combinatória No Ensino Médio

A análise combinatória é a parte da matemática que se designa a estudar os métodos e técnicas que permitem resolver problemas que envolvem contagem (IEZZI.2007, p. 370).

2.2.2.1 Princípio Fundamental da Contagem

Para tratar do Princípio Fundamental da Contagem (PFC), serão considerados dois problemas clássicos que aparecem nos livros didáticos.

Problema 1: O cardápio do restaurante de uma cidade do interior oferece as seguintes opções:

Tabela 1: Cardápio do restaurante referente ao problema 1.

Saladas	Pratos quentes	Sobremesas
• Alface • Brócolis • Cenoura	• Risoto • Lasanha • Feijoada • Sopa	• Torta • Pudim

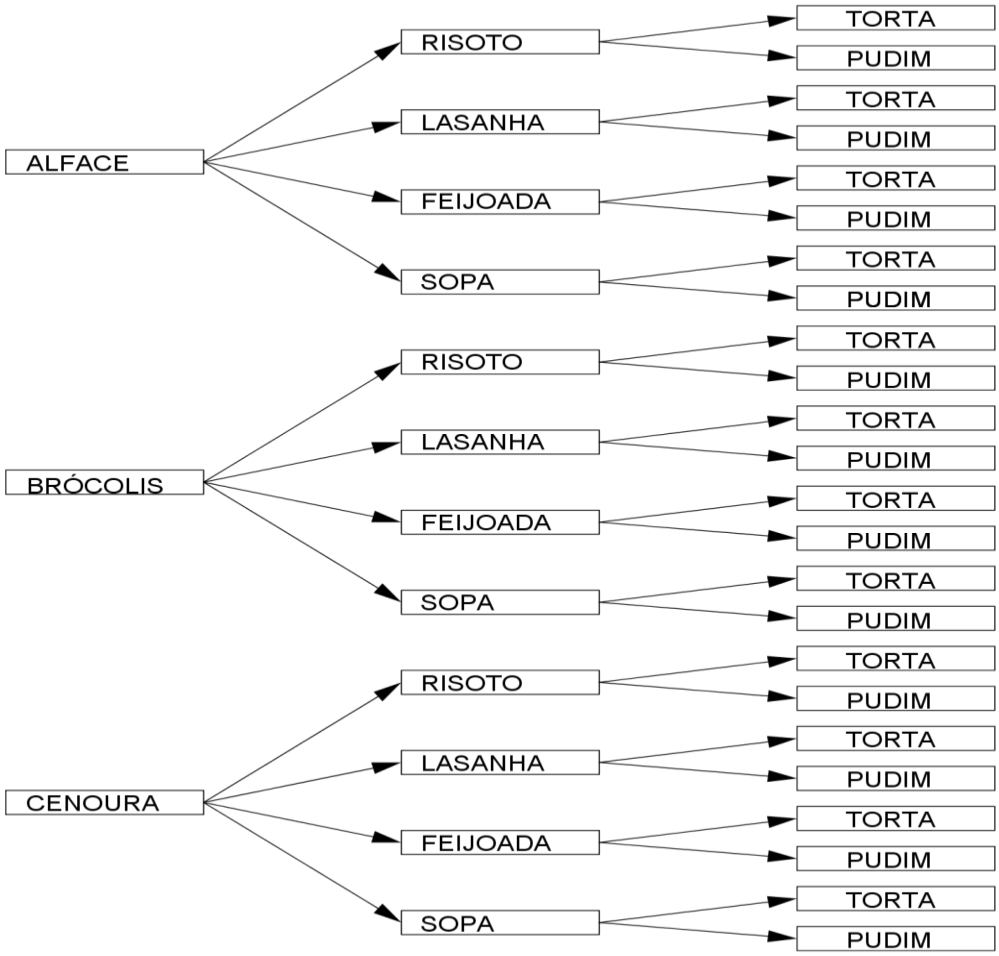
Fonte: Criado pelo próprio autor.

De quantas maneiras uma pessoa pode fazer sua refeição com uma salada, um prato quente e uma sobremesa?

Para realizar essa contagem, podem-se descrever todos os casos utilizando um diagrama de árvore (Figura 1).

Considerando A: Alface, B: Brócolis, C: Cenoura, R: Risoto, L: Lasanha, F: Feijoada, S: Sopa, T: Torta, P: Pudim, constrói-se o diagrama de árvore, tendo na primeira coluna as opções de salada, na segunda coluna às opções de pratos quentes e na terceira coluna as possíveis sobremesas:

Figura 1: Diagrama de árvores das possíveis decisões a serem tomadas no problema 1.



Fonte: Criado pelo próprio autor.

Seguindo cada uma das flechas do diagrama, obtêm-se todas as refeições possíveis: ART, ARP, ALT, ALP, AFT, AFP, AST, ASP, BRT, BRP, BLT, BLP, BFT, BFP, BST, BSP, CRT, CRP, CLT, CLP, CFT, CFP, CST, CSP.

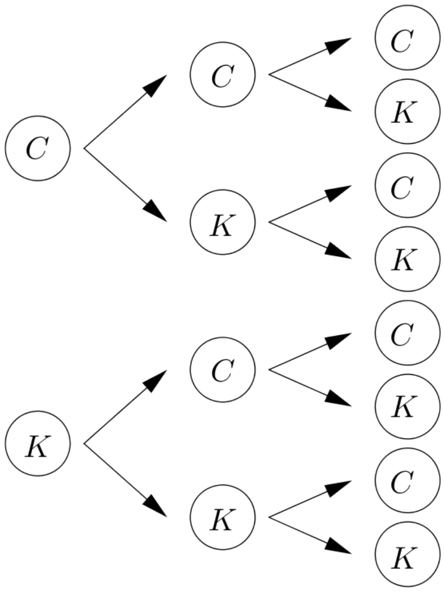
Observe que há três maneiras diferentes para escolher uma salada, quatro modos para escolher um prato quente e dois modos de escolher a sobremesa. Portanto o número total de possibilidades é $3 \cdot 4 \cdot 2$. Ou seja, são 24 maneiras distintas de fazer uma refeição onde configure uma opção de salada, um prato quente e uma sobremesa.

Problema 2: Uma moeda não viciada é lançada 3 vezes sucessivamente. Quantas são as possíveis sequências obtidas nesses lançamentos? E quais são essas sequências?

Para resolver esse caso considere as possibilidades em cada lançamento, a saber, cara ou coroa. De antemão já se pode realizar a contagem, no entanto, para descrever todos os casos o diagrama de árvore facilitará a contagem e organização do pensamento.

Considerando C para cara e K para coroa, tem-se o seguinte diagrama (Figura 2) onde a primeira coluna são as possibilidades para o primeiro lançamento, a segunda coluna as possibilidades de cair cara ou coroa no segundo lançamento e a terceira coluna as possibilidades do terceiro lançamento:

Figura 2: Diagrama de árvore de todas as possíveis sequências de lançamento.



Fonte: Criado pelo próprio autor.

Utilizando o diagrama, fica simples descrever todas as sequências possíveis:

CCC, CCK, CKC, CKK, KCC, KCK, KKC e KKK.

Para o primeiro lançamento tem-se 2 possibilidades, para o segundo 2 possibilidades e para o terceiro lançamento, também 2 possibilidades. Portanto, o total de possíveis sequências nos três lançamentos pode ser calculado $2 \cdot 2 \cdot 2$, ou seja, são 8 sequências de resultados distintos para os três lançamentos.

Há dois princípios de contagem que são base para resolver problemas de análise combinatória: o princípio da adição e o princípio da multiplicação. O primeiro diz que se o objetivo é contar um conjunto de objetos, pode-se dividir essa tarefa em duas partes, contar as partes separadamente, e somar os resultados. Já o segundo princípio, também chamado Princípio Fundamental da Contagem, PFC, de acordo com Lima (2006, p. 103) diz que "se há x modos de tomar uma decisão D_1e, tomada a decisão D_2há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1e D_2 é $x \cdot y$".

Os dois problemas apresentados anteriormente, serão resolvidos utilizando o princípio fundamental da contagem.

Problema 1: O cardápio do restaurante de uma cidade do interior oferece as opções conforme a tabela 1.

Tabela 1: Cardápio do restaurante referente ao problema 1.

Saladas	Pratos quentes	Sobremesas
• Alface • Brócolis • Cenoura	• Risoto • Lasanha • Feijoada • Sopa	• Torta • Pudim

Fonte: Criado pelo próprio autor.

De quantas maneiras uma pessoa pode fazer sua refeição com 1 salada, 1 prato quente e 1 sobremesa?

Ao montar sua refeição uma pessoa deve realizar três decisões:

Primeira decisão: D_1 - Escolher um tipo de salada e há três formas distintas de ser tomada.

Segunda decisão: D_2 - Escolher um tipo de prato quente e há quatro formas distintas de ser tomada.

Terceira decisão: D_3 - Escolher um tipo de sobremesa e há duas formas distintas de ser tomada.

Pelo princípio fundamental da contagem é possível tomar, sucessivamente, as decisõesD_1,D_2 e D_3 de $3 \cdot 4 \cdot 2$ formas distintas.

Problema 2: Uma moeda não viciada é lançada 3 vezes sucessivamente. Quantas são as possíveis sequências obtidas nesses lançamentos? E quais são essas sequências?

Em três lançamentos sucessivos uma moeda irá “tomar” três decisões:

Primeira decisão: D_1 - escolher qual face ficará voltada para cima e há duas maneiras de tomar essa decisão, sendo elas, cara ou coroa.

Segunda decisão: D_2 - escolher qual face ficará voltada para cima e há duas maneiras de tomar essa decisão, sendo elas, cara ou coroa.

Terceira decisão: D_3 - escolher qual face ficará voltada para cima e há duas maneiras de tomar essa decisão, sendo elas, cara ou coroa.

Pelo princípio fundamental da contagem essa moeda pode “tomar”, sucessivamente, as decisões D_1, D_2 e D_3 de $2 \cdot 2 \cdot 2$ formas distintas.

As possíveis sequências de lançamento da moeda são CCC, CCK, CKC, CKK, KCC, KCK, KKC e KKK. Estas podem ser obtidas através do diagrama de árvore.

Em todos os casos de agrupamentos apresentados a seguir, será utilizado o PFC, tanto na resolução dos problemas quanto na dedução das fórmulas, visto que “é a principal técnica para a resolução de problemas de contagem”. (IEZZI, 2007, p. 376)

2.2.2.2 Permutação

Do dicionário, temos a seguinte definição para permutação: ato ou efeito de permutar; permuta; reciprocidade; troca. (LUFT, 2000. p 515)

Na matemática, permutação também é tratada como troca ou permuta de elementos.

Definição de Permutação: A permutação de "m" elementos é cada uma das ordens de sucessão nas quais se podem dispor esses elementos.

Para tornar claro o conceito de permutação, vamos analisar o seguinte problema: Quantos anagramas com a palavra LAÇO podem ser formados?

Sabe-se que um anagrama é toda “palavra formada pela transposição das letras de outra palavra: roma/amor” (LUFT, 2000 p. 63). Logo, determinar a quantidade de anagramas que podem ser formados a partir de certa palavra é o mesmo que quantificar todas as formas de permutar as letras da palavra. Portanto usando o princípio fundamental da contagem, deve-se determinar quais são as decisões a serem tomadas e a seguir de quantos modos pode-se tomar cada uma das decisões.

Primeira decisão: D_1 - escolher a letra que ocupará a primeira posição do anagrama. Há 4 modos para se tomar essa decisão.

Segunda decisão: D_2 - escolher a letra que ocupará a segunda posição do anagrama. Uma das quatro letras já foi utilizada, portanto restam três modos de tomar essa decisão.

Terceira decisão: D_3 - escolher a letra que ocupará a terceira posição do anagrama. Agora restam duas letras que podem ser usadas, portanto, pode-se tomar esta decisão de duas maneiras diferentes.

Quarta decisão: D_4 - escolher a letra que ocupará a quarta e última posição do anagrama. Resta apenas uma letra, portanto há apenas uma maneira de tomar a quarta decisão.

Desta forma, pelo princípio fundamental da contagem, há 4 modos para D_1 , tomada a decisão D_1 , há 3 modos para a decisão D_2, tomada as duas decisões, D_1 e D_2, há 2 modos para a decisão D_3, tomadas as decisões D_1, D_2 e D_3, há um modo para a decisão D_4, desta forma, o número de maneiras de tomar sucessivamente as decisões D_1, D_2, D_3 e D_4 é $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, ou seja, são 24 anagramas formados a partir da palavra LAÇO.

Definição de fatorial: Chama-se fatorial de um número natural, ou $n!$, o produto dos n primeiros inteiros positivos.

Para encontrar uma fórmula de contar quantas são as permutações possíveis para uma quantidade genérica de elementos vamos responder a seguinte pergunta: De quantas maneiras pode-se permutar *n* elementos distintos?

Para permutar *n* elementos deve-se calcular o produto das possibilidades para cada uma das n posições. Para ocupar a primeira posição, tem-se *n* modos diferentes, para a segunda posição, tem-se $n - 1$ modos, pois um dos n elementos já fora utilizado na primeira posição, para a terceira tem-se $n - 2$, visto que dois elementos já estão ocupando a primeira e a segunda posição. Seguindo esse raciocínio, até que reste apenas 1 posição e, portanto, uma possibilidade para ocupar o último lugar. Logo, pode-se afirmar que a permutação de *n* elementos distintos é dada por: $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

> "A escolha do objeto que ocupará o primeiro lugar pode ser feita de *n* modos,; a escolha do objeto que ocupará o segundo lugar pode ser feita de $n - 1$ modos; a escolha do objeto que ocupará o terceiro lugar pode ser feita de $n - 2$ modos etc. A escolha do objeto que ocupará o último lugar pode ser feita de 1 modo. [...] Portanto, o número de permutações simples de *n* objetos distintos é $P_n = n!$." (LIMA, 2006, p. 115)

Conforme foi visto, a permutação é a contagem de todas as possíveis ordens de uma quantidade dada de elementos. Porém, existem problemas em que a quantidade de elementos a ser ordenada é menor do que a quantidade de elementos dada. Neste caso deve-se primeiramente escolher os elementos a ordenar para então ordená-los. A este tipo de agrupamento dá-se o nome de arranjo.

2.2.2.3 Permutação com elementos repetidos

Para este estudo, considere o seguinte problema: Quantos anagramas distintos podemos formar a partir da palavra AULA?

Já é conhecida a forma de proceder quando se quer formar anagramas. A primeira letra é escolhida entre quatro, a segunda letra é escolhida entre três, a terceira é escolhida entre duas e para a última letra resta apenas uma para escolher. Pelo PFC tem-se $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Observe o diagrama abaixo (Figura 3 – a, b, c, d):

Figura 3: Diagrama de árvore das decisões tomadas para formar os anagramas da palavra AULA.

Figura 3-a: Diagrama de árvore os anagramas da palavra AULA iniciados por “**A**”.

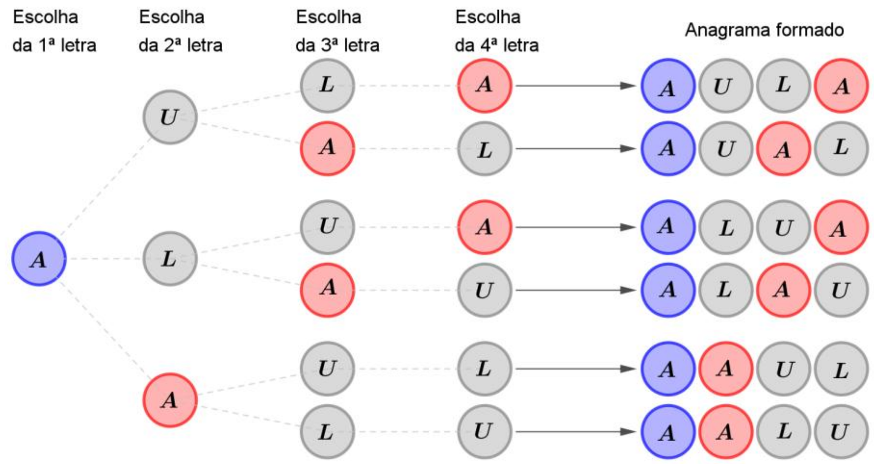


Figura 3-b: Diagrama de árvore os anagramas da palavra AULA iniciados por “**U**”.

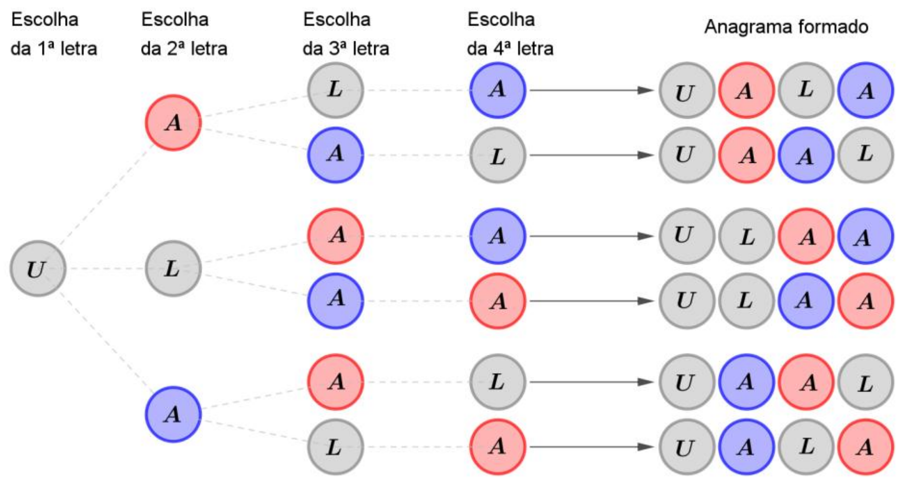


Figura 3-c: Diagrama de árvore os anagramas da palavra AULA iniciados por “**L**”.

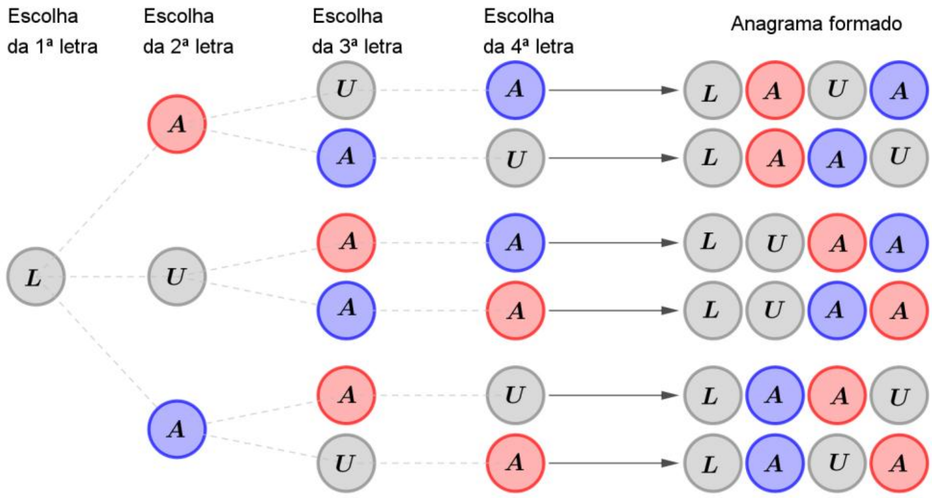
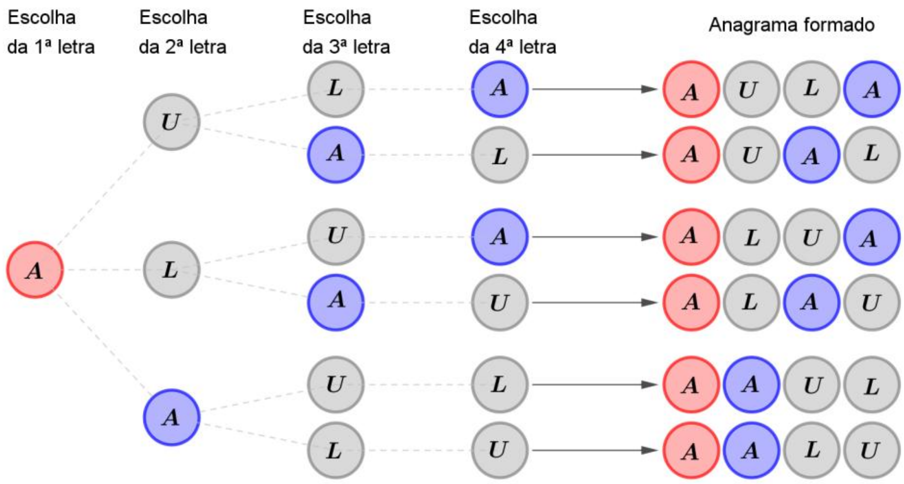


Figura 3-d: Diagrama de árvore os anagramas da palavra AULA iniciados por “**A**”.



Fonte: Criado pelo próprio autor.

Note que foram formados anagramas idênticos, isto ocorre porque existe uma letra (elemento) que se repete. Neste caso, se quer saber quantos anagramas distintos é possível formar. Logo, se faz necessário descontar aqueles anagramas que foram repetidos.

Posicionando primeiro as letras que não se repetem: para posicionar a primeira letra têm-se quatro espaços, para a segunda têm-se três espaços e restam dois espaços para posicionar as letras que se repetem.

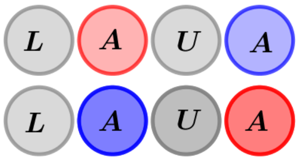
Exemplo:

L _ U _

Nesses dois lugares que faltam é preciso colocar a letra A, mas independente de qual A for colocado nesses lugares o anagrama continua o mesmo. Então é necessário contar de quantas maneiras é possível colocar as duas letras A nesses espaços para aí sim descobrir por qual número é preciso dividir a contagem inicial.

Para o primeiro espaço restante, a primeira letra é escolhida entre duas letras “A”, e, para o segundo e último espaço, resta apenas uma letra A. Usando o PFC obtém-se $2 \cdot 1 = 2!$, ou seja, para cada vez que posicionar as duas letras A nos anagramas, existem duas formas de proceder, porém as duas são iguais (figura 4).

Figura 4: Permuta da letra “A” que configura duas repetições e não altera o anagrama.



Fonte: Criado pelo próprio autor.

Logo, basta dividir a contagem inicial por 2! para obter a quantidade correta de anagramas da palavra AULA. Então o número de anagramas da palavra AULA é $\frac{4!}{2!} = 12$

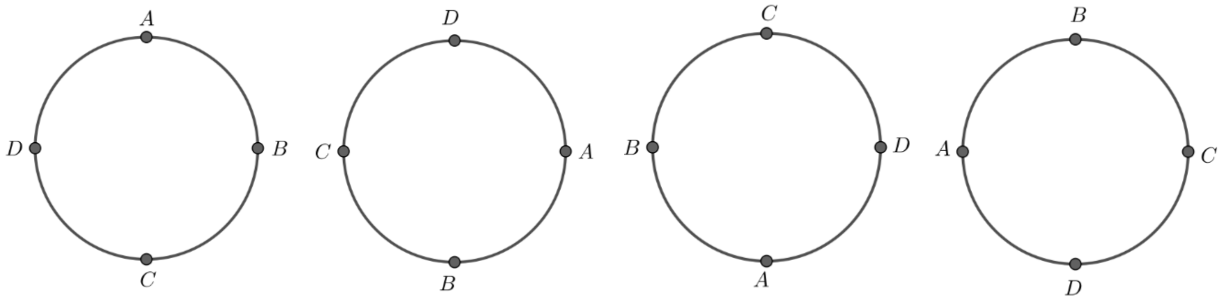
O mesmo raciocínio combinatório pode ser usado ao formar anagramas com palavras que tenham mais de uma letra repetida, por exemplo: BATATA e PÁSSARO.

2.2.2.4 Permutação Circular

Considere o seguinte problema: De quantos modos podemos dispor quatro pessoas em torno de uma mesa circular?

A maneira de ordenar elementos já é conhecida. Portanto, $\boldsymbol{P_4 = 4}!$ determina todas as maneiras diferentes que as quatro pessoas podem se sentar na mesa. Considerando A, B, C e D para denominar as quatro pessoas que irão sentar-se à mesa, obtém-se 24 sequências ordenadas, algumas delas são: ABCD, DABC, CDAB e BCDA. (Figura 5)

Figura 5: Sequências ABCD, DABC, CDAB e BCDA



Fonte: Criado pelo próprio autor.

Observe que essas sequências são iguais, pois não alteram a posição relativa dessas pessoas entre si em volta da mesa. Cada disposição dessas pessoas junto à mesa está sendo contabilizadas quatro vezes quando realizado o produto $\mathbf{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4}!$. Portanto, $\frac{\mathbf{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\mathbf{4}} = \mathbf{3}! = \mathbf{6}$ determina a quantidade de maneiras que podemos dispor quatro pessoas em volta de uma mesa circular.

No geral, o número de maneiras de dispor $\boldsymbol{n}$ elementos de forma que as disposições que possam coincidir por rotação sejam consideradas iguais, ou seja, o número de permutações circulares de $\boldsymbol{n}$ elementos, denotado por $\boldsymbol{PC_n}$, é

$$\boldsymbol{PC_n} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{n-1})!}{\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{n-1})!$$

2.2.2.5 Arranjo

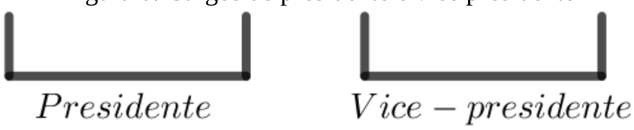
Considere a definição de Luft (2000. p. 81) para a palavra arranjo: “Ação ou efeito de arranjar. Boa disposição; ordem”. Ele define a palavra arranjar como: Pôr em ordem; arrumar. Na matemática, um arranjo é um tipo de agrupamento suficientemente caracterizado no princípio fundamental da contagem. Para Iezzi (2007, p. 376) “dado um conjunto com *n* elementos distintos, chama-se arranjo dos n elementos, tomados k a k, qualquer sequência ordenada de *k* elementos distintos escolhidos entre os *n* existentes”.

Um arranjo de n elementos distintos tomados k a k, onde $n \geq k$, é, portanto, escolher k elementos, entre os n elementos dados e contar todas as possíveis sequências desses k elementos.

Considere o seguinte problema: Para ocupar o cargo de presidente e vice-presidente do grêmio estudantil de uma escola, candidataram-se quatro pessoas. De quantas formas distintas pode ser feita essa escolha?

Utilizando o PFC para resolver esse problema, têm-se duas decisões a tomar: a escolha do presidente e a escolha do vice-presidente, conforme a figura 6. Têm-se quatro maneiras distintas para escolher o presidente. Após escolher o presidente restam três maneiras para tomarmos a segunda decisão de escolher o vice-presidente. Logo, o número de formas distintas de tomar sucessivamente as decisões “escolha do presidente” e “escolha do vice-presidente” é $4 \cdot 3 = 12$. Observe que neste caso, estão sendo formados arranjos de 4 pessoas tomadas 2 a 2.

Figura 6: Cargos de presidente e vice presidente



Fonte: Criado pelo próprio autor.

Na sequência, pretendem-se determinar uma fórmula para calcular um arranjo de n elementos distintos tomados, ou escolhidos, k a k, de modo genérico onde $n \geq k$.

Usando o PFC: O primeiro elemento pode ser escolhido de n formas possíveis; o segundo elemento pode ser escolhido de $n-1$ formas, pois já foi escolhido um elemento na escolha anterior e não pode repetir elementos; o terceiro elemento a ser escolhido deve ser escolhido entre os $n-2$ que restaram, pois não pode haver elementos repetidos. Procede-se dessa forma até a escolha do $k-ésimo$ elemento, na qual, a partir das $k-1$ escolhas anteriores, restam apenas $n-(k-1) = n-k+1$opções.

Logo, pelo PFC, a quantidade de arranjos dos n elementos tomados k a k, que denotaremos por $A_{n,k}$, será:

$$A_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

É possível conseguir uma expressão equivalente à apresentada acima, multiplicando e dividindo tal expressão por $(n-k)! = (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot (n-k-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Portanto:

$$A_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot \frac{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot (n-k-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot (n-k-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Notemos que o numerador da expressão acima é *n!*

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot (n-k-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

E o denominador é $(n-k)!$.

Assim, obtém-se a seguinte expressão, simplificada, para$A_{n,k}$, com $k \leq n$.

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Resolvendo o problema anterior utilizando a fórmula encontrada, tem-se um arranjo de 4 elementos tomados 2 a 2, portanto:

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12,$$

onde o resultado encontrado é igual ao anterior, como esperado.

2.2.2.6 Combinação

Considere o seguinte problema: Em uma instituição de ensino há cinco coordenadores, João, Paulo, Ana, Maria e Lúcia. Será formada uma comissão composta por três destes coordenadores que será responsável por organizar as boas vindas aos calouros. De quantas formas poderá ser formada essa comissão? Usando o PFC, a primeira pessoa pode ser escolhida de cinco maneiras distintas, a segunda será escolhida entre as 4 pessoas restantes e a terceira pessoa será escolhida entre as 3 que ainda restam.

Observe que um dos resultados possíveis é escolher primeiro Ana, segundo Paulo e por último Maria, outro resultado possível é escolher em primeiro Maria, segundo Ana e por último Paulo. Note que independente da ordem em que essas pessoas foram escolhidas, serão as mesmas pessoas a fazerem parte da comissão. Portanto, deve-se contar apenas uma vez cada grupo de 3 pessoas diferentes.

Neste caso, é preciso contar de quantas formas cada grupo de três pessoas diferentes pode ser escolhido. Pode-se escolher Ana, Paulo e Maria de 6 formas diferentes, confirmado usando o PFC, escolhendo o primeiro entre 3 pessoas, o segundo entre 2 e o último entre 1.

A forma como escolhemos essas três pessoas, não interfere no grupo de pessoas que irá ser sorteado, ou seja, no grupo que fará parte da comissão. Logo, para cada grupo de três pessoas diferentes, foram contabilizadas seis formas diferentes de escolhê-las. Para descontar esse fator multiplicativo é necessário realizar uma divisão.

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{60}{6} = 10$$

Para realizar a escolha da comissão, pode-se sortear três pessoas, entre as cinco pessoas que estão concorrendo, de dez formas distintas. Note que foi realizado um arranjo de cinco pessoas tomadas três a três, ou seja, uma sequência ordenada da escolha de três pessoas entre as cinco concorrentes. Logo em seguida, o resultado foi dividido pela permutação de três pessoas (elementos), visto que a ordem do sorteio não interfere. Cada uma dessas possibilidades corresponde a uma combinação de cinco pessoas tomadas três a três (sorteadas três pessoas entre cinco).

No geral, quando existe um conjunto A com *n* elementos, chama-se combinação dos *n* elementos de A tomados k a k, com $n \geq k$, qualquer subconjunto de A formado por *k* elementos. (IEZZI, 2007. p. 381).

É possível obter uma fórmula para determinar o número de combinações de *n* elementos tomados *k* a *k*, com $n \geq k$? Indicaremos esta combinação por $C_{n,k}$.

Será utilizado o PFC para contar a quantidade de sequências ordenadas, ou seja, arranjos, formados por *k* elementos distintos, escolhidos entre os n elementos dados.

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(k-1)] = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = A_{n,k}$$

Agora será usado o PFC para contar o número de sequências ordenadas que podem ser formadas com *k* elementos escolhidos. O número de permutações possíveis para *k* elementos distintos é:

$$k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = P_k = k!$$

Dessas *k!* sequências ordenadas apenas uma nos interessa para contagem da combinação de *n* elementos tomados *k* a *k*, portanto é necessário realizar a divisão do arranjo de *n* elementos tomados *k* a *k* pelas permutações de *k* elementos, ou seja por *k!*.

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{k!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Voltando ao problema inicial e, resolvendo-o por meio da fórmula encontrada, tem-se uma combinação de 5 elementos tomados 3 a 3. Logo,

$$C_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{60}{6} = 10$$

3 PROPOSTAS DE ATIVIDADES NO ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Nos capítulos anteriores, ficou claro que o ensino de Análise Combinatória e o desenvolvimento das habilidades e técnicas de contagem podem ser desenvolvidos utilizando o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) aliado a metodologia de resolução de problemas.

Como propostas de ensino, objetivo principal deste trabalho, serão abordadas situações problemas de contagem, seguidas de sugestões de diálogos que o professor pode utilizar para, discretamente, orientar seus alunos ao êxito na resolução dos problemas propostos, utilizando, como ferramenta principal o PFC.

Para um primeiro contato com o PFC, sugerem-se as seguintes propostas:

Proposta 1:

Um quiosque na beira mar de Atlântida Sul lançou a seguinte promoção durante uma temporada de verão: “Combinado de sanduíche natural e suco a R$ 12,00.” Nesse combinado, constam quatro opções de sanduíche (frango, presunto, vegetariano e queijo) e três opções de suco (laranja, uva e abacaxi). De quantas formas distintas uma pessoa pode escolher o seu combinado?

O professor deve deixar que o aluno faça seus testes e coloque suas habilidades em prática antes de qualquer intervenção. Podendo ainda tornar o problema interessante concretizando-o, por exemplo, fazendo o aluno se envolver com o problema, colocando-o no papel de protagonista: *“Você está na praia e vai comprar um combinado, quais são as decisões que deves tomar?”*

Quando as ideias forem surgindo para encontrar a solução, o professor deve prosseguir com as perguntas sempre relacionadas às sugestões dadas pelos alunos. Por exemplo: Se o aluno sugerir realizar o produto entre a quantidade de opções para o sanduíche e a quantidade de opções para o suco, ou seja, $4 \cdot 3 = 12$. O professor deve questionar: *“É possível garantir que esta é a solução correta?”* Neste momento é normal que o aluno encontre todos os casos possíveis por testagem. Ainda assim, é possível que o aluno não consiga listar todos os tipos de combinado. Neste caso, o professor deve mediar questionando: *“Qual foi a estratégia que você utilizou para listar todos os combos? Como organizou seu pensamento?” “Esta organização garante que você tenha encontrado todos os possíveis combinados?”.*

Com isso, caso haja falhas na solução sugerida pelo aluno, pretende-se que ele perceba que houve essa falha em seu método de contagem e que este precisa ser revisado organizando sua estratégia de contagem. No caso de o aluno ter contado e enumerado corretamente todos os possíveis combos, ainda assim são importantes os questionamentos para que o estudante entenda e organize o seu raciocínio e ainda desenvolva sua capacidade de comunicação e argumentação.

Após todos os estudantes listarem os doze possíveis combinados o professor lança a pergunta: "Podemos sempre resolver este tipo de problema realizando o produto entre as opções pré-determinados, isto é, podemos realizar uma generalização para resolver este tipo de problema?".

Ao resolver este problema para toda a classe, sugere-se que o professor realize as seguintes perguntas:

- *Quantos são os sabores do sanduíche?* (4 sabores: frango, presunto, vegetariano e queijo)
- *Quantos sabores de sanduíche podemos escolher na compra do combo?* (apenas um sabor de sanduíche)
- *Quantas são as opções de suco?* (3 opções: laranja, uva e abacaxi)
- *Na compra do combo, quantos sabores de suco podemos escolher?* (apenas um sabor de suco)

Neste momento é interessante que o professor escreva na lousa os dados do problema, conforme as respostas obtidas.

Opções de Sanduíches: frango, presunto, vegetariano e queijo.

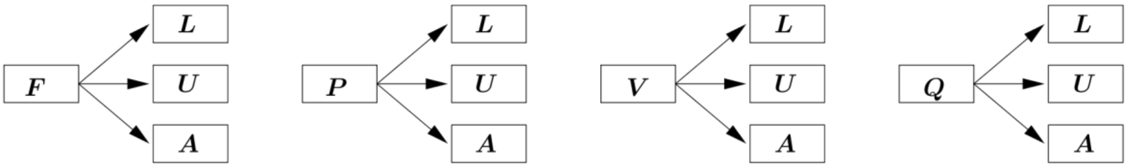
Opções de Sucos: laranja, uva e abacaxi.

Monte seu Combinado: um sanduíche + um suco.

Neste momento, podem-se apresentar alguns exemplos de combos. Até mesmo os alunos já terão escolhido o seu sanduíche e suco favoritos, então é hora de anotar alguns deles na lousa.

- *Quantos são os possíveis combos que posso montar se eu escolher o sanduíche de frango?* (são três: sanduíche de frango + suco de laranja, sanduíche de frango + suco de uva ou sanduíche de frango + suco de abacaxi.)
- *E se eu escolher o sanduíche de presunto?* (também serão três possíveis combos: sanduíche de presunto + suco de laranja, sanduíche de presunto + suco de uva ou sanduíche de presunto + suco de abacaxi.)
- *Isso quer dizer que para cada sabor do sanduíche escolhido, serão três maneiras diferentes de escolher o meu combo? Por quê?* (Sim, pois para cada sabor do sanduíche, há três opções para escolher o sabor do suco). (Figura 7).

Figura 7: diagrama de árvore com todos os possíveis combinados de sanduíche + suco.



Fonte: Criado pelo próprio autor.

Ao fazer o diagrama de árvore fica perceptível que todos os possíveis combinados são listados e, portanto, são doze formas distintas de uma pessoa escolher o seu combinado.

É possível observar que esta quantidade é obtida por meio do produto entre a quantidade de opções de sanduíches e a quantidade de opções de suco, isto é, o produto $4 \cdot 3$, determina a quantidade de formas distintas de escolher o combinado de sanduíche + suco.

- *Se você está na praia comprando o combo, quantas e quais são as decisões que você deve tomar?* (serão duas decisões: escolher o sabor do sanduíche e escolher o sabor do suco)

- *Quantos são os modos de tomar a decisão* D_1 *"escolha do sanduíche"?* (4)

- *Quantos são os modos de tomar a decisão* D_2 *"escolha do suco"? (*3)

Então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é $4 \cdot 3$.

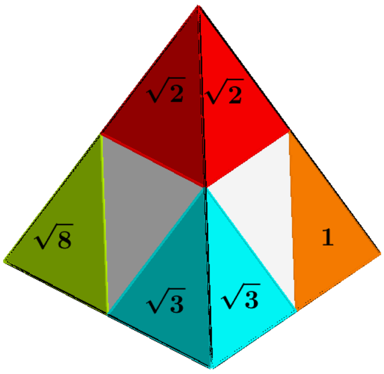
Neste momento é interessante que o professor apresente o princípio fundamental da contagem abordado no capítulo anterior deste trabalho.

Observe que foram utilizados, implicitamente, os passos definidos por Polya, no processo de resolução do problema.

Proposta 2:

São fornecidos para cada aluno um dado em forma de tetraedro regular com os números $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{8}$ e 1 gravados em suas pontas (Figura 8) e uma tabela para anotações, conforme a tabela 2 e figura 6. Cada aluno deverá realizar, para cada rodada, dois lançamentos sucessivos, e, anotar na tabela, no local destinado ao primeiro e segundo lançamento, os números obtidos na ponta do dado.

Figura 8: Dado em forma de tetraedro regular.



Fonte: Criado no *software GeoGebra* pelo próprio autor.

Caso esta atividade seja inviável de ser realizada na prática, o professor pode instigar os alunos a se colocarem no lugar da pessoa que está realizando o lançamento dos dados e preencher a tabela (Tabela 2) com possíveis resultados.

Tabela 2: Tabela de anotações.

Rodada	**1º Lançamento**	**2º Lançamento**
1ª		
2ª		
3ª		
4ª		

Fonte: Criado pelo próprio autor.

Após os estudantes realizarem alguns lançamentos devem ser direcionadas às seguintes instruções:

- *Escreva três possíveis resultados diferentes de possíveis sequências.* Como nenhum aluno pensa igual ao outro, haverá respostas diferentes.

- *Há possibilidade de ocorrer uma sequência diferente das que você escreveu?* (sim). Caso o aluno responda que não, a próxima instrução o ajudará a pensar diferente.

- *Confira com o colega ao lado se os resultados que ele escreveu são iguais aos seus.* Aqui o aluno perceberá que, embora o resultado do colega seja diferente, também está correto e, que não existem apenas três possíveis resultados de sequência.

- *Quando se lança a primeira vez o dado, de quantas formas o resultado deste lançamento pode ocorrer?* (4).

- *Quando o dado é lançado pela segunda vez, de quantas formas pode ocorrer o resultado deste lançamento?* (4).

- *Pelo princípio fundamental da contagem, quantas são as possíveis sequências obtidas em dois lançamentos sucessivos de um dado em forma de um tetraedro regular?* ($4 \cdot 4 = 16$ sequências).

Abaixo se apresentam todas as possíveis sequências:

$$(\sqrt{2},\sqrt{2}),\ (\sqrt{2},\sqrt{3}),\ (\sqrt{2},\sqrt{8}),\ (\sqrt{2},1),$$
$$(\sqrt{3},\sqrt{3}),\ (\sqrt{3},\sqrt{2}),\ (\sqrt{3},\sqrt{8}),\ (\sqrt{3},1),$$
$$(\sqrt{8},\sqrt{8}),\ (\sqrt{8},\sqrt{2}),\ (\sqrt{8},\sqrt{3}),\ (\sqrt{8},1),$$
$$(1,1),\ (1,\sqrt{2}),\ (1,\sqrt{3}),\ (1,\sqrt{8}).$$

Este problema também pode ser explorado quando o professor estiver trabalhando probabilidade, reformulando-o da seguinte forma: Um dado em forma de tetraedro regular, com os números $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{8}$ e 1 gravados em suas pontas conforme a figura 6 é lançado duas vezes sucessivamente e os números constantes na ponta voltada para cima são anotados em uma tabela. Qual a probabilidade de que o produto dos números obtidos na sequência dos dois lançamentos, seja um número irracional? Além disso, é possível trabalhar a probabilidade de cada ponta do dado ser sorteada e elaborar eventos diferentes para o cálculo de probabilidade.

Para dar sequência ao estudo de Análise Combinatória sugere-se uma situação que envolve permutação e, posteriormente, arranjo de elementos.

Proposta 3:

Uma família com cinco pessoas está viajando e pretende tirar uma foto de recordação, onde todos aparecem lado a lado. Cada disposição dessas pessoas na foto é considerada uma foto diferente. Quantas fotos distintas podem ser registradas?

Ao propor essa situação problema, podemos sugerir que os alunos sejam os fotógrafos que vão fotografar a família. Além disso, o professor pode fazer grupos de três ou quatro alunos para resolverem a questão usando as seguintes cartinhas (Figura 9), cada uma contendo um membro da família. As imagens foram criadas no aplicativo *Zmoji*, que permite criar avatares:

Figura 9: Membros da família.

Fonte: Criado pelo próprio autor

- *Considerando que cada personagem acima é um membro da família e que você é o fotógrafo que deve realizar a sessão de fotos. Que atitude você irá tomar primeiro? (*decidir qual personagem ocupa o primeiro lugar da foto e assim sucessivamente até que todos os lugares sejam preenchidos).

É natural que os alunos manipulem as cartinhas até que entendam o que está acontecendo em cada disposição de lugares dos membros da família.

- *Todos os membros da família devem aparecer nas fotos?* (sim)

- *Qual é a primeira decisão? Quantas são as maneiras distintas de tomar a primeira decisão?* (Escolher qual membro da família ocupará a primeira posição na foto; cinco).

- *Qual é a segunda decisão? Quantas são as maneiras distintas de tomar a segunda decisão e por quê?* (Determinar qual membro da família ocupará a segunda posição na foto; quatro, porque um dos membros da família já está colocado na primeira posição - sobram 4 cartinhas).

O professor deve seguir com os questionamentos até que todos os alunos tenham entendido o processo. Por fim, a pergunta:

- *Quantas são as maneiras distintas de tomar a última decisão, isto é, posicionar o último membro da família na 5ª posição da fotografia?* (uma).

- *Pode-se usar o PFC para resolver o problema: para ocupar o primeiro lugar na foto o fotógrafo pode escolher entre cinco pessoas (elementos), para ocupar o segundo lugar pode escolher entre quatro pessoas, pois a mesma pessoa não pode ocupar mais de um lugar ao mesmo tempo, e assim sucessivamente até o quinto e último lugar que restará apenas uma pessoa. Portanto,* $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, *ou seja, 5! determina a quantidade de poses distintas que essa família de cinco pessoas pode registrar.*

É interessante distribuir, inicialmente, a quantidade de pessoas que o problema sugere, isto é, 5 cartinhas cada uma contendo um membro da família. Após serem contabilizadas todas as poses possíveis para as fotos, ir aumentando o número de pessoas para que os alunos refaçam as fotos com essas novas pessoas. Além disso, sugere-se dar aos grupos de alunos quantidades diferentes de cartinhas para que não busquem a resposta com o grupo vizinho e que cada grupo determine sua estratégia para depois apresentá-la aos demais.

É relevante sugerir, depois que os grupos resolverem todas as situações propostas, variações do problema. Por exemplo, dois dos membros da família devem permanecer sempre juntos na fotografia. Pode-se ainda considerar as duas situações: quando as pessoas ficam juntas e na mesma ordem e quando as pessoas ficam apenas juntas, independente da ordem.

- A família resolveu tirar novas fotos, só que agora duas pessoas da família devem permanecer sempre juntas. As novas fotos terão as mesmas poses tiradas anteriormente? (Algumas, porém devem-se excluir aquelas em que as duas pessoas estão separadas, pois o problema pede que não haja pessoas entre elas).

Quando se considera que duas pessoas (elementos) permanecem juntas e na mesma ordem pode-se considerar que estas são uma única pessoa e realizar a permutação de $n - 1$ elementos. Quando se considera que duas pessoas permanecem apenas juntas, independente da ordem, pode-se considerar que estas são uma única pessoa e realizar a permutação de $n - 1$ elementos e posteriormente multiplicar o resultado por 2!, pois se leva em consideração que as pessoas que permanecem juntas podem permutar entre elas, ocupando uma o lugar da outra. Logo, para cada disposição do restante da família, as duas pessoas que permanecem juntas podem se dispor de duas formas diferentes. Essa multiplicação que deve ser feita é pela permutação do número de pessoas que permanecem juntas, independente da ordem.

A partir dessa situação, podemos dar início ao estudo de arranjo, basta propor a atividade da seguinte forma:

Proposta 4:

Uma família com seis pessoas (Figura 10) pretende tirar uma foto de recordação de uma viagem, onde são fotografadas apenas três pessoas por vez. Cada disposição dessas pessoas na foto é considerada uma foto diferente. Quantas fotos distintas podem ser registradas?

Figura 10: Membros da família.

Fonte: Criado pelo próprio autor.

Através do PFC pode-se determinar a quantidade de fotos que podem ser registradas de três pessoas por vez: para ocupar primeiro lugar têm-se seis pessoas, para ocupar o segundo lugar tem-se cinco pessoas e para o terceiro lugar têm-se quatro pessoas, pois a mesma pessoa não pode ocupar dois lugares ao mesmo tempo.

Aumentando o número de pessoas o raciocínio combinatório continua o mesmo.

Ao prosseguir com a proposta de ensino de Análise Combinatória, sugerem-se as seguintes situações para o aluno refletir e realizar a contagem quando a ordem em que é realizada a escolha dos elementos não é relevante, ou seja, quando a ordem dos elementos não muda a situação em questão.

Proposta 5:

Em um sorteio, que tem como prêmio uma viagem com tudo pago para Canela, dez pessoas estão participando. Se serão sorteados somente 3 pessoas para realizar a viagem, de quantas formas distintas esse sorteio pode ser realizado?

Nessa situação também podem ser utilizadas as cartinhas da situação anterior, para que a situação fique menos abstrata. Além disso, o professor pode realizar o sorteio entre os alunos da turma mesmo, se preferir. O importante é que após os sorteios algumas perguntas sejam realizadas, tais como:

- *Dentre as dez pessoas (das figuras ou alunos da turma), pretende-se sortear três pessoas para realizar uma viagem, de quantas formas isso pode ser feito?* (Nesse momento é natural que os alunos respondam que o produto $10 \cdot 9 \cdot 8$ determina todas as formas que esse sorteio pode ser realizado).

- *Um dos possíveis resultados para o sorteio é o primeiro sorteado ser João, o segundo Paulo e o terceiro sorteado ser Ana. Outro possível resultado é sortear primeiro Ana, segundo João e por último Paulo. Existe alguma diferença nos grupos que farão a viagem nos dois sorteios descritos acima?* (Não, apenas a ordem em que foram sorteados).

- *A ordem que essas três pessoas foram escolhidos faz diferença, ou seja, muda o grupo que foi sorteado?* (Não, o grupo continua o mesmo independente da ordem que as pessoas foram sorteadas.).

- *Quantas são as formas distintas de sortear Ana, Paulo e João para realizar a viagem?* ($3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas distintas de sortear Ana, Paulo e João).

- *O que podemos fazer para contabilizarmos apenas um sorteio dessas três pessoas? (*Neste caso, o produto $10 \cdot 9 \cdot 8$ deve ser dividido por 6. Caso os alunos não ainda não saibam como proceder, a próxima pergunta irá auxiliá-los).

- *Para cada grupo diferente de três pessoas, quando é realizado o produto 10x9x8, são contabilizadas todas as 6 formas desse mesmo grupo ser sorteado. Ou seja, cada grupo distinto de três pessoas está sendo contabilizada 6 vezes quando é realizado o produto 10x9x8, e para descontar esse fator multiplicativo 6 é preciso proceder de que maneira?* (Dividindo o produto $10 \cdot 9 \cdot 8$ por 6).

Utilizando o PFC a primeira pessoa é sorteada entre dez, a segunda entre nove a terceira entre oito. Mas, $10 \cdot 9 \cdot 8$ não determina a quantidade de formas distintas de sortear essas pessoas, pois fazendo apenas esse produto estamos considerando que a ordem em que as três pessoas foram sorteadas interfere no sorteio, porém não interfere. Existem $3 \cdot 2 \cdot 1$ formas distintas de sortear o mesmo grupo de pessoas diferentes. Portanto, para cada grupo diferente de três pessoas, quando fazemos $10 \cdot 9 \cdot 8$ estamos contando as 6 formas distintas de sortear esse grupo. Para descontar esse fator multiplicativo deve-se realizar a operação inversa, que é a divisão por esse mesmo fator, que neste caso é $3 \cdot 2 \cdot 1$, ou seja, 6.

Depois de pensar sobre essa determinada quantidade de pessoas é importante mudar a quantidade e realizar novas contagens, por exemplo: De quantas formas podemos escolher 2 entre as 4 pessoas para realizar uma viagem? De quantas formas podemos escolher 4 entre as 4 pessoas para realizar uma viagem?

É importante ressaltar que os alunos devem sempre se perguntar ao resolver um problema de contagem, se a ordem interfere ou não, pois faz toda diferença contar sequências ordenadas é diferente de contar conjuntos onde a ordem não interfere.

Proposta 6:

Esta situação corresponde a uma atividade de ensino, na qual será realizado um experimento aleatório que gerará um problema que precisa ser resolvido.

Para realizar esta atividade são necessários uma urna com 25 bolas numeradas de 1 à 25 e a tabelas de jogos abaixo:

Tabela 3: Tabela de jogos.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Bolas sorteadas:_____________

Fonte: Criado pelo próprio autor.

Os alunos deverão marcar na tabela cinco números para montar seu "jogo". Depois disso, cinco bolas deverão ser sorteadas sem reposição da urna.

Após os sorteios das bolas, algumas perguntas devem ser realizadas para que os alunos reflitam:

- *Ao fazer o seu jogo, que decisão você tomou primeiro?* (escolher um número entre os 25).
- *Os números que você marcou no seu "jogo" podem ser sorteados em qualquer ordem?* Com essa pergunta, os alunos deverão se dar conta que a ordem em que as bolas foram sorteadas não interfere no "jogo" sorteado.
- *A ordem que você usou para marcar os números do seu jogo precisa ser a mesma ordem que as bolas devem ser sorteadas?* (Não, pois a ordem em que os números foram escolhidos ou sorteados não interfere no jogo.).

- *Pode-se dizer que a quantidade de jogos possíveis é determinada pelo produto* $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21$*?* (Não, pois fazendo isso está sendo considerado que a ordem do sorteio é relevante e já se sabe que a ordem de sorteio não interfere no jogo sorteado.).

- *O que é preciso fazer para que seja contabilizado apenas jogos distintos?* O mesmo raciocínio combinatório que se desenvolveu na situação anterior é praticado para responder a essa pergunta. Como a ordem não é relevante, não tem sentido contabilizar todas as sequências ordenadas que apareçam os mesmo números, pois não irá interferir no jogo que foi sorteado. Portanto, é preciso descontar esse fator multiplicativo que contabiliza todas essas sequências ordenadas realizando uma divisão pela permutação dos elementos dessas sequências.

- *De quantas formas os números que você escolheu poderiam ter sido escolhidos?* ($5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$).

- *Pode concluir que para cada jogo de cinco números diferentes, quando se realiza o produto* $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21$, *está sendo contabilizado 120 vezes o mesmo jogo?* (Sim).

- *O que é preciso ser feito para descontar todos esses casos que o jogo se repete?* (dividir o resultado do produto $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21$ por 120, assim, cada jogo distinto será contado apenas uma vez).

Essa atividade pode ser proposta nos estudos de probabilidade, visto que, por se tratar de um experimento aleatório, podem ser realizados cálculos da probabilidade de tal bola ou jogo ser sorteado fazendo uma conexão com os jogos de loteria que fazem parte do cotidiano do brasileiro.

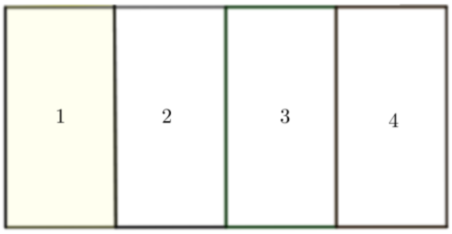
Proposta 7:

Para trabalhar com permutação de elementos repetidos propõem-se a seguinte atividade.

Apresentar o problema: Raul desenhou uma bandeira listrada, conforme a Figura 11, e usará as cores verde, amarela e marrom para pintá-la. Ele pretende pintar todas as listras e utilizar todas as cores que possui, mas percebe que em sua bandeira há quatro listras e ele possui apenas três cores diferentes. Raul decide, então, usar em duas das listras da bandeira a cor verde, pois esta é sua cor preferida, não importando se as listras são adjacentes ou não.

Disponibilizar os materiais aos alunos: Imagem da bandeira e lápis de cor nas cores verde, amarela e marrom.

Figura 11: Bandeira desenhada por Raul.



Fonte: Criado pelo próprio autor.

Realizar as seguintes perguntas e instruções:

- *Como Raul irá usar todas as cores, ele começa pela cor marrom para pintar uma das listras. A primeira decisão que ele tem a tomar é escolher qual listra pintará com a cor marrom. Quantas são as opções para essa primeira decisão?* (4).
- *Escolha por Raul e pinte uma listra de marrom.*
- *Com a cor amarela, Raul irá tomar a segunda decisão, que é escolher qual listra pintará com a cor amarela. Quantas são as opções para essa segunda decisão?* (3).
- *Escolha por Raul e pinte uma listra de amarelo.*
- *Quantas listras restaram para Raul pintar?* (2).
- *Quantas cores restaram?* (1).
- *A terceira decisão consiste em Raul escolher as duas listras para pintar com sua cor preferida. De quantas maneiras ele pode tomar esta decisão? Por quê?* (apenas uma, pois restam apenas duas listras e essas duas listras serão pintadas na cor verde).
- *Escolha por Raul e pinte as duas listras de verde.*
- *Pelo princípio fundamental da contagem de quantas maneiras Raul pode tomar a primeira, segunda e terceira decisão sucessivamente?* ($4 \cdot 3 \cdot 1 \ = \ 12$ maneiras).

Essa maneira de resolver o problema é mais simples, pois ao deixar a cor que repete para ser usada por último faz com que só exista uma maneira de pintar as duas listras restantes. Mas o aluno pode querer pintar a bandeira começando pela cor que repete. Portanto, é interessante encaminhar a atividade a essa outra interpretação.

- *Raul não gostou como você escolheu pintar a bandeira. Ele acha melhor começar agora pintando com sua cor preferida. Portanto, a primeira decisão* (D_1) *a ser tomada por Raul é escolher uma das listras para pintar com a cor verde. De quantas maneiras ele pode tomar essa decisão?* (4).
- *Escolha por Raul e pinte uma listra de verde.*
- *Ainda com a cor verde, Raul deve tomar a segunda decisão* (D_2) *que é escolher uma das listras para pintar. De quantas maneiras ele pode tomar essa segunda decisão?* (3).

- *Escolha por Raul e pinte uma listra de verde.*

- *Com a cor amarela, Raul deve tomar a terceira decisão* (D_3) *que é escolher uma listra para pintar. Quantas são as maneiras que ele pode tomar essa decisão?* (2).

- *Escolha por Raul e pinte uma listra de amarela.*

- *Com a cor marrom, Raul deve tomar a quarta e última decisão* (D_4) *que é escolher uma listra para pintar. Quantas são as maneiras que ele pode tomar essa decisão?* (1).

- *Pelo princípio fundamental da contagem quantas são as maneiras distintas de tomar a primeira, segunda, terceira e quarta decisão sucessivamente?* $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24)$.

- *Observe que se na primeira decisão* (D_1) *Raul escolheu a listra 2 e na segunda decisão* (D_2) *escolheu a listra 3 é o mesmo que escolher na primeira decisão a listra 3 e na segunda decisão a listra 2.* Conforme as Figuras 12 – a, b.

Figura 12: Uma das maneiras de colorir a bandeira

Figura 12- a: D_1 – listra 2 pintada de verde e D_2- listra 3 pintada de verde.

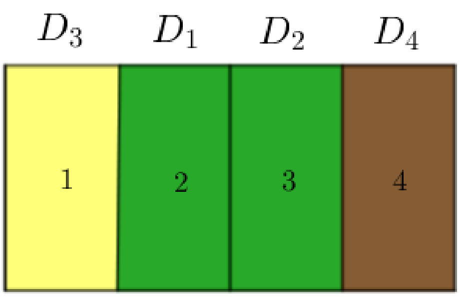
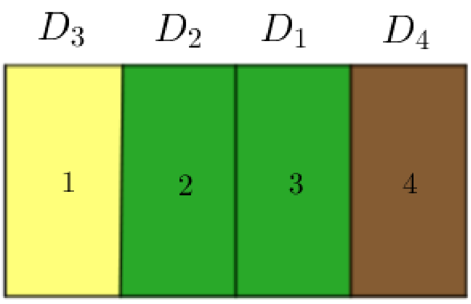


Figura 12- b: D_1 – listra 3 pintada de verde e D_2- listra 2 pintada de verde.



Fonte: Criado pelo próprio autor.

- *Essas bandeiras são iguais?* (sim).

- *Se para cada bandeira diferente existe outra bandeira pintada igual, o que é preciso fazer para achar quantas bandeiras distintas podem ser obtidas com as decisões tomadas? Por quê?* (dividir o produto $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ por 2!, pois se cada bandeira diferente existe outra exatamente igual é preciso dividir por 2 para descontar essa repetição de bandeiras iguais).

Observe que é importante não começar pela cor que irá repetir, pois fica mais fácil do aluno enxergar que, restando apenas a cor que irá repetir, e duas listras a serem pintadas, ele terá apenas uma forma de pintar as listras.

Após serem resolvidos diversos problemas de contagem utilizando o PFC, sugere-se que sejam deduzidas as fórmulas de agrupamentos já apresentadas neste trabalho no capítulo [2] observando que apenas as fórmulas por si só não são suficientes para resolver um problema de contagem e que devem ser desenvolvidas algumas estratégias de resolução.

4 PROBLEMAS ENVOLVENDO ANÁLISE COMBINATÓRIA EM PROVAS DO ENEM E DA OBMEP

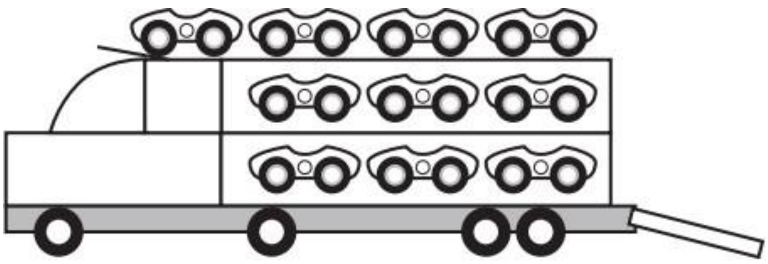
Neste capítulo serão abordados alguns problemas encontrados em provas do Exame Nacional do Ensino Médio e da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas envolvendo análise combinatória e para cada problema elencado será apresentada uma solução utilizando o princípio fundamental da contagem.

A prova do ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio tem como objetivo avaliar o desempenho escolar do aluno que está concluindo o ensino médio e, além disso, dar possibilidade para este aluno ingressar no ensino superior, seja em instituições publicas através do Sistema de Seleção Unificada (Sisu), ou privadas através do Programa de Universidade para Todos (ProUni) e programas de financiamentos.

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP é um projeto nacional que vem sendo realizado em escolas publicas e privadas com alunos do 4º ano do ensino fundamental até o 3º ano do ensino médio. Um dos objetivos desse projeto é "identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas". (IMPA, 2005)

PROBLEMA 01 (ENEM – 2017)

Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor.

O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis.

Mudança de posição dos carrinhos no caminhão cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

a) $C_{6,4}$

b) $C_{9,3}$

c) $C_{10,4}$

d) 6^4

e) 4^6

(Disponível em http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos acesso em 09/01/2020)

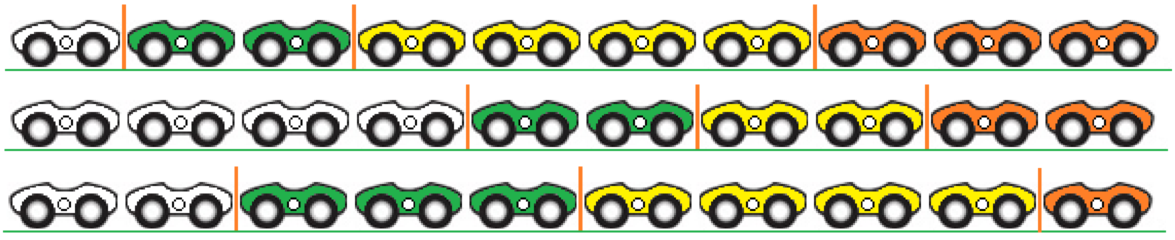
Uma solução:

Suponha que você é o funcionário responsável por escolher quantos carrinhos serão pintados de branco, de verde, de amarelo e de laranja. Para realizar essa tarefa você faz uma fileira com todos os dez carrinhos (Figura 13-a) e dispõe três separadores entre eles de modo que os carrinhos que estão antes do primeiro separador serão pintados de branco, os carrinhos entre o primeiro e o segundo separador serão pintados de verde, os carrinhos entre o segundo e o terceiro separador serão pintados de amarelo e, por fim, os carrinhos após o terceiro separador serão pintados de laranja. Na Figura 13-b são apresentadas algumas possibilidades de pintura dos carrinhos.

Figura 13: Disposição dos carrinhos em fila e algumas das possíveis formas de pintá-los.

Figura 13-a: Fileira de carrinhos.

Figura 13-b: Três possíveis pinturas dos carrinhos gerando três modelos de brinquedo.



Fonte: Criado pelo próprio autor utilizando o modelo de carrinho do enunciado do problema.

Para determinar de quantas maneiras você pode separar os carrinhos dessa forma e assim obter todos os possíveis modelos para o brinquedo, a primeira decisão que deves tomar é escolher onde irá colocar o primeiro separador. Visto que deve ser pintado pelo menos um carrinho de cada cor, os separadores só podem ser colocados entre os carrinhos, ou seja, há nove maneiras de você tomar a primeira decisão. Escolhido o local do primeiro separador (Figura 14-a), a próxima decisão que deves tomar é escolher onde colocará o segundo separador. Neste momento há oito maneiras distintas para posicioná-lo. Escolhida a posição do segundo separador (Figura 14-b), a terceira decisão consiste em escolher onde posicionar o terceiro e último separador. Há sete formas diferentes para tomar esta última decisão. Após posicionar o terceiro separador (Figura 14-c) tem-se uma maneira de pintar os dez carrinhos. Pelo PFC, o número de formas que você pode tomar a primeira, a segunda e a terceira decisão, sucessivamente, é $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

Figura 14: Disposição dos separadores entre os carrinhos em fila.

Figura 14-a: Primeira decisão: posicionamento do primeiro separador.

Figura 14-b: Segunda decisão: posicionamento do segundo separador.

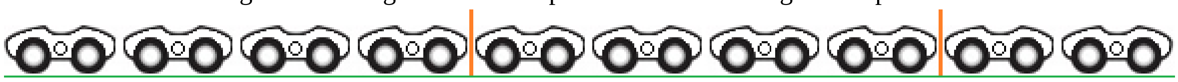


Figura 14-c: Terceira decisão: posicionamento do terceiro separador.

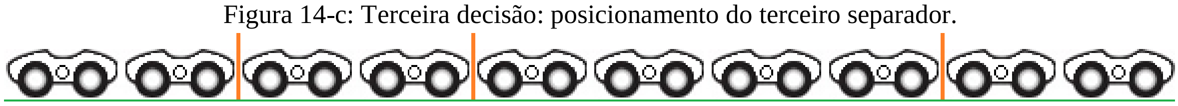


Figura 14-d: Troca de ordem dos separadores não altera a quantidade de carrinhos pintados de cada cor.

Fonte: Criado pelo próprio autor utilizando o modelo de carrinho do enunciado do problema.

Observe que, independente da ordem em que os separadores foram dispostos, o modelo de brinquedo será o mesmo, ou seja, a quantidade de carrinhos pintados de cada uma das cores não seria alterada. Por exemplo, se o primeiro separador fosse colocado na posição do segundo e o segundo, por sua vez, na posição do terceiro e este na posição do primeiro, não iria interferir na quantidade de carrinhos pintados de cada cor, isto é, continuaríamos com dois carrinhos brancos, dois verdes, quatro amarelos e dois carrinhos na cor laranja (Figura 14-d).

Pelo PFC, você pode permutar as decisões que tomou de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas possíveis e estas permutações não interferem na quantidade de carrinhos pintados de cada cor. Portanto, $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!}$ expressa a quantidade de modelos do brinquedo caminhões-cegonha que podem ser produzidos. Note que essa expressão indica uma combinação de 9 elementos tomados 3 a 3, isto é, escolher as três posições para os separadores dentre os nove espaços disponíveis.

Resposta B

PROBLEMA 02 (ENEM – 2018)

O Salão do Automóvel de São Paulo é um evento no qual vários fabricantes expõem seus modelos mais recentes de veículos, mostrando, principalmente, suas inovações em design e tecnologia. Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 4 fev. 2015 (adaptado)

Uma montadora pretende participar desse evento com dois estandes, um na entrada e outro na região central do salão, expondo, em cada um deles, um carro compacto e uma caminhonete. Para compor os estandes, foram disponibilizados pela montadora quatro carros compactos, de modelos distintos, e seis caminhonetes de diferentes cores para serem escolhidos aqueles que serão expostos. A posição dos carros dentro de cada estande é irrelevante.

Uma expressão que fornece a quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos é:

a) A_{10}^{4}

b) C_{10}^{4}

c) $C_4^2 \times C_6^2 \times 2 \times 2$

d) $A_4^2 \times A_6^2 \times 2 \times 2$

e) $C_4^2 \times C_6^2$

(Disponível em http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos acesso em 09/01/2020)

Uma solução:

Para resolver esse problema, primeiramente vamos analisar os dados fornecidos: temos quatro opções de carros compactos de diferentes modelos e seis caminhonetes de diferentes cores (Figura 15). Além disso, podemos criar o esquema descrito na Figura 16 para montar uma estratégia para encontrar a solução.

Figura 15: Opções de carro compacto e de caminhonetes e Estandes de entrada e central.

Fonte: Criado pelo próprio autor.

Figura 16: Opções de carro compacto e de caminhonetes e Estandes de entrada e central.

Espaço destinado ao Carro Compacto	**Espaço destinado para a Caminhonete**

Estande de Entrada

Espaço destinado ao Carro Compacto	**Espaço destinado para a Caminhonete**

Estande Central

Fonte: Criado pelo próprio autor.

Colocando-se no lugar do funcionário responsável por determinar qual carro e caminhonete ficará em cada estande da feira, a partir do esquema acima, a primeira decisão a ser tomada é escolher o carro compacto que será colocado no estande da entrada. O problema informa que há quatro carros compactos disponíveis, portanto a primeira decisão pode ser tomada de 4 maneiras distintas. Ainda no estande da entrada, você pode escolher a camionete, que ficará junto com o carro, de seis maneiras diferentes. Já para o estande central, o carro compacto pode ser escolhido de três formas diferentes, pois um dos carros já foi escolhido para ocupar o estande de entrada. E a última decisão a ser tomada é a escolha da caminhonete a ser colocada no estande central, esta pode ser escolhida de cinco formas diferentes, pois uma das caminhonetes já foi utilizada para ocupar o estande da entrada. Pelo PFC, essas quatro escolhas podem ser realizadas de $4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 = 360$ formas diferentes.

Analisando todas as alternativas, a opção “e”, a qual é determinada pela expressão $C_4^2 \times C_6^2 \times 2 \times 2$ é a alternativa correta, pois ao realizar os cálculos, esta é a alternativa que apresenta o mesmo valor encontrado:

$$C_4^2 \times C_6^2 \times 2 \times 2 = \frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2!} \cdot 2 \cdot 2 = 360,$$

ou seja, encontramos a expressão $4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 = 360$.

Resposta E.

PROBLEMA 3 (OBMEP - 2016, 1ª Fase – Nível 3)

Bruno tem 5 figurinhas idênticas com a bandeira da Alemanha, 6 com a bandeira do Brasil e 4 com a Colômbia. Ele quer fazer um pacote com pelo menos 3 dessas figurinhas. De quantas maneiras ele pode fazer esse pacote?

a) 110

b) 120

c) 200

d) 201

e) 210

(Disponível em http://www.obmep.org.br/provas.htm acesso em 09/01/2020)

Uma solução:

Para realizar o cálculo que irá definir a quantidade de pacotes que podem ser feitos com as figurinhas disponíveis é preciso decidir quantas figurinhas de cada país será colocado nesse pacote.

As formas de escolher quantas figurinhas da Alemanha será colocado no pacote podem ser: 0, 1, 2, 3, 4 e 5, totalizando seis formas. As formas de escolher a quantidade de figurinhas do Brasil que será colocado no pacote são: 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, totalizando sete formas. Ao escolher a quantidade de figurinhas da Colombia para colocar no pacote pode-se proceder de cinco formas, sendo elas: 0, 1, 2, 3 e 4. Pelo PFC, o número de formas de escolher a quantidade de figurinhas da Alemanha, Brasil e Colombia para colocar no pacote, sucessivamente, é $6 \cdot 7 \cdot 5 = 210$.

Note que ao realizar o produto $6 \cdot 7 \cdot 5$ estão sendo contabilizados até os pacotes com 0, 1 e 2 figurinhas. O problema pede para fazer pacotes com pelo menos três figurinhas, ou seja, pacotes com 0, 1 e 2 figurinhas não configura a resposta do problema. Existe apenas um pacote que contém zero figurinhas. Existem três pacotes que contém uma figurinha, sendo eles: um pacote com uma figurinha da Alemanha, um pacote com figurinha do Brasil e um pacote com uma figurinha da Colombia. Existem seis pacotes com duas figurinhas, sendo eles: um pacote com duas figurinhas da Alemanha; um pacote com duas figurinhas do Brasil; um pacote com duas figurinhas da Colombia; um pacote com uma figurinha da Alemanha e uma do Brasil; um pacote com uma figurinha da Alemanha e uma da Colombia; e, por fim, um pacote com uma figurinha do Brasil e uma figurinha da Colombia. A quantidade de pacotes com 0, 1 ou 2 figurinhas é $1 + 3 + 6 = 10$.

Logo, a quantidade de pacotes que podem ser formados com pelo menos três figurinhas é $210 - 10 = 200$.

Resposta C.

PROBLEMA 4 (OBMEP – 2015, 1ª Fase – Nível 2)

Em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pôde receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diogo e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois deles foram premiados. De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?

a) 20

b) 30

c) 60

d) 90

e) 120

(Disponível em http://www.obmep.org.br/provas.htm acesso em 09/01/2020)

Uma Solução:

Para realizar esta contagem é preciso saber quantas duplas de ganhadores de medalha podem ser formadas com Aldo, Beto, Carlos, Diogo e Elvis e depois calcular de quantas maneiras cada dupla pode receber a premiação.

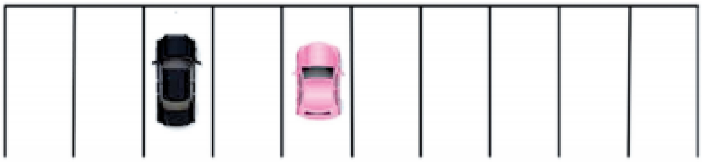
Para formar a dupla a primeira pessoa pode ser escolhida entre cinco e a segunda entre quatro pessoas, pois cada pessoa pode ganhar apenas um prêmio. A ordem em que essas duas pessoas foram escolhidas não é relevante. Portanto, pelo PFC são $\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$ maneiras diferentes de determinar a dupla de ganhadores. Cada participante da dupla pode ganhar o prêmio de três formas diferentes, sendo elas: ouro, prata e bronze. Pelo PFC, a premiação pode ser realizada de $3 \cdot 3 = 9$ formas diferentes para cada dupla.

Sendo dez o total de duplas possíveis para receber a premiação e nove a quantidade de formas que cada dupla pode receber as medalhas, $10 \cdot 9 = 90$ define a quantidade de formas diferentes que pode ter acontecido a premiação.

Resposta D.

PROBLEMA 5 (OBMEP – 2018, 1ª Fase – Nível 3)

Um estacionamento tem 10 vagas, uma ao lado da outra, inicialmente todas livres. Um carro preto e um carro rosa chegam a esse estacionamento. De quantas maneiras diferentes esses carros podem ocupar duas vagas de forma que haja pelo menos uma vaga livre entre eles?



a) 56

b) 70

c) 71

d) 72

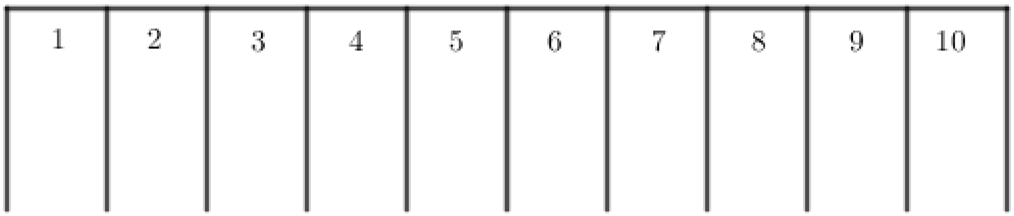
e) 80

(Disponível em http://www.obmep.org.br/provas.htm acesso em 09/01/2020)

Uma solução:

Para resolver esse problema, vamos numerar a vagas do estacionamento de 1 até 10 da esquerda para a direita, conforme a Figura 17.

Figura 17: Estacionamento com vagas numeradas de 1 a 10



Fonte: Criado pelo próprio autor

Agora vamos dividir o problema em dois casos:

1) Quando o primeiro motorista a chegar no estacionamento decide estacionar nas vagas de número 1 ou 10. Se isso acontece, o segundo motorista tem oito maneiras de estacionar. Pelo PFC, $2 \cdot 8 = 16$ é o número de formas que os dois carros podem ser estacionados.

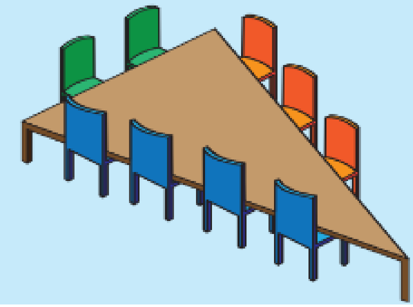
2) Quando o primeiro motorista a chegar no estacionamento decide estacionar nas vagas de número 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Se isso acontece, o segundo motorista tem apenas sete formas de estacionar seu carro. Pelo PFC, $8 \cdot 7 = 56$ são as formas dos dois motoristas estacionarem seus carros.

Usando o princípio aditivo, tem-se $16 + 56 = 72$ formas dos dois motoristas estacionarem seus carros de forma que exista pelo menos uma vaga entre eles.

Resposta D.

PROBLEMA 6 (OBMEP – 2012, 1ª Fase – Nível 3)

Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa triangular, cujos lados têm 2, 3 e 4, como na figura. De quantas maneiras esses amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa?



a) 288

b) 6720

c) 10080

d) 15120

e) 60480

(Disponível em http://www.obmep.org.br/provas.htm acesso em 09/01/2020)

Uma solução:

Para resolver este problema, sugere-se sua divisão em três casos:

1º caso: quando o casal decide sentar no lado da mesa que possui dois lugares.

Alice ao escolher sua cadeira neste lado da mesa pode realizar essa decisão de duas formas, sobrando apenas uma forma para Bernardo escolher sua cadeira. Com isso, restam sete cadeiras para os quatro amigos sentarem. Dessa forma, pelo PFC, os seis amigos podem se sentarem na mesma de $2 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 1680$ forrmas diferentes.

2º caso: quando o casal decide sentar no lado da mesa que possui três cadeiras.

Alice, ao sentar neste lado da mesa pode escolher sentar nas pontas ou no meio. Se Alice escolher sentar nas pontas ela pode fazer essa escolha de duas maneiras e para Bernardo resta apenas uma forma de escolher sua cadeira. Restando aos quatro amigos sete cadeiras para se sentarem. Dessa forma, pelo PFC, existem $2 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 1680$ maneiras dos seis amigos se sentarem à mesa. Caso Alice escolha sentar no meio terá apenas uma forma de escolher sua cadeira e para Bernardo duas formas de escolher sua cadeira. Restando aos quatro amigos sete cadeiras para se sentarem. Dessa forma, Pelo PFC, existem $1 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 1680$ formas dos seis amigos se sentarem à mesa.

3º caso: quando o casal decide sentar no lado da mesa que possui quatro cadeiras.

Alice, ao escolher sua cadeira neste lado da mesa pode escolher sentar nas pontas ou nos meios. Se Alice escolher sentar nas pontas ela pode fazer a escolha de duas maneiras e para Bernardo sentar ao seu lado resta apenas uma forma de escolher sua cadeira. Restando aos quatro amigos sete cadeiras para se sentarem. Dessa forma, pelo PFC, existem $2 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 1680$ maneiras dos seis amigos se sentarem à mesa. Caso Alice escolha se sentar nos meios ela pode realizar a escolha da sua cadeira de duas formas e, desta forma, Bernardo tem duas formas de escolher sua cadeira. Restando aos quatro amigos sete cadeiras para sentarem. Dessa forma, pelo PFC, $2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 3360$.

Pelo princípio aditivo, tem-se $1680 + 1680 + 1680 + 1680 + 3360 = 10080$ formas dos seis amigos se sentarem a mesa.

Resposta C.

Ao analisar as questões do ENEM, verificou-se o uso de fórmulas de arranjo e combinação nas alternativas, indo contra ao exposto nos Parâmetros Curriculares Nacionais e na Base Nacional Comum Curricular, que defendem que o aluno deve ser capaz de elaborar estratégias para resolver um problema sem recorrer ao uso de fórmulas. A nosso ver o uso de fórmulas de agrupamentos utilizado nas alternativas apresentadas nas questões de provas do ENEM, não valoriza e ainda prejudica o estudante que não decorou tais fórmulas, mas que, mesmo assim, resolve os problemas de análise combinatória utilizando o princípio fundamental da contagem.

Já as questões encontradas e analisadas nas provas da OBMEP não foram encontradas fórmulas de agrupamentos nos enunciados e alternativas de respostas. Sendo possível verificar também, que os problemas necessitam de estratégias para resolução e as fórmulas por si só não levariam o aluno a resposta correta.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao decorrer deste percurso, onde pesquisamos, escrevemos e propomos atividades de ensino de análise combinatória através de resolução de problemas, foi possível compreender melhor esta metodologia e entender que o ensino da Matemática deve ser algo que possa abastecer o aluno de estratégias de resolução, não só de problemas matemáticos, mas também de problemas do dia a dia, dos quais é imprescindível o raciocínio lógico e racional. O ensino da matemática não deve ser um caminho percorrido sem fins proveitosos à vida cotidiana, ela deve ser vista como uma ferramenta necessária para encarar de forma sensata certas situações do dia a dia.

A metodologia de resolução de problemas, que antes desse trabalho era tão especulada, hoje está mais nítida e proporciona uma visão do ensino e aprendizagem da Matemática como um processo evolutivo de um pensamento dedutivo. Além disso, foi possível constatar que o conteúdo de análise combinatória exige muito desse pensamento dedutivo, de estratégias e de técnicas que só serão desenvolvidas se o aluno agir ativamente nesse processo. Percebe-se que o ensino da Matemática não deve ser encaminhado de forma que o aluno apenas reproduza as informações transmitidas pelo professor.

Nesse sentido, procurou-se, ao elaborar a proposta de ensino, propor atividades diferentes e atrativas, em virtude de sabermos que atualmente está difícil prender a atenção do aluno com todas as atrações que o cercam dentro e fora da sala de aula. Ainda mais que, quando se trata de resolver problemas, as situações abordadas devem ser interessantes e desafiadoras para os alunos, para que eles se sintam motivados e engajados a querer resolver.

Buscamos, com este trabalho, auxiliar na solução de uma das maiores dificuldades encontradas nos dias de hoje em sala de aula, que é prender a atenção do aluno, visto que a proposta de ensino foi pensada objetivando envolver o aluno para que ele enxergue a Matemática com outros olhos e comece a se interessar pela disciplina e também servir aquele professor que não possui tanto domínio em relação ao conteúdo de análise combinatória a posicionar-se como mediador.

Portanto, pode-se concluir que este trabalho foi de grande importância, pois se pôde compreender melhor a metodologia e conteúdo estudado e uni-los em uma proposta didática de ensino de análise combinatória por meio de resolução de problemas que irá auxiliar o professor a transformar o ensino de matemática menos bitolado e amarrado a fórmulas, como é tradicionalmente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL, Lei nº 9.394/96, de 20 de dezembro de 1996. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.** Brasília. DF: Presidência da República. [2005]. Disponível em: <https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/70320/65.pdf> Acesso em 23 de novembro de 2019.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Versão final. Brasília. 2017.

BRASIL, Ministério da Educação. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+).** Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos: Matemática**.Brasília: MECSEF, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.** Brasília. 1998.

DANTE, Luiz Roberto; **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**: 1ª a 5ª série. 8. ed. São Paulo: Ática, 1996.

DANTE, Luiz Roberto; **Matemática**: Volume Único. 1. ed. São Paulo: ática, 2009.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Olvado; DEGENSZAJN, David. **Matemática**: Volume único. 4. ed. São Paulo: Atual Editora, 2007.

IMPA. **15ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS**. Disponível em: http://www.obmep.org.br/provas.htm. Acesso em: 8 jan. 2020

LIMA, E. L. *et al*. **A Matemática do Ensino Médio**: Volume 2. 7. ed. São Paulo: SBM, 2016.

LUFT, Celso Pedro; **Minidicionário**: Luft. 1. ed. São Paulo: Ática, 2000.

PARRA, C. et al. **Didática da matemática:** Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. 2 ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, João Pedro Da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemática:** na sala de aula. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016.

POZO, Juan Ignácio; **A solução de Problemas**: Aprender a resolver, resolver para aprender. 1. ed. Porto Alegre: Artmed, 1998.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez; **Ler, escrever e resolver problemas**: Habilidades básicas para aprender matemática. 1. ed. Porto Alegre: Artmed, 2011.