

INSTITUTO FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
CAMPUS CANOAS  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -  
PROFMAT

PAULO ROBERTO MARTINS BERNDT

**ESTUDO DE FUNÇÕES POR MEIO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NO  
SOFTWARE GEOGEBRA**

CANOAS

2025

**PAULO ROBERTO MARTINS BERNDT**

**ESTUDO DE FUNÇÕES POR MEIO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NO  
SOFTWARE GEOGEBRA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto Federal do Rio Grande do Sul/Campus Canoas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Bruno Brogni Uggioni

**Coorientadora:** Profa. Dra. Juliana Sanches

**Canoas**

**2025**

## CIP - Catalogação na publicação

Berndt, Paulo Roberto Martins  
Estudo de Funções por meio de Construções  
Geométricas no software GeoGebra / Paulo Roberto  
Martins Berndt. -- 2025.  
235 f.  
Orientador: Bruno Brogni Uggioni.

Coorientadora: Juliana Sanches.

Dissertação (Mestrado) -- Instituto Federal de  
Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul,  
Campus Canoas, Mestrado Profissional em Matemática em  
Rede Nacional - PROFMAT, Canoas, BR-RS, 2025.

1. Geometria. 2. Funções. 3. GeoGebra. 4. Geometria  
Dinâmica. I. Uggioni, Bruno Brogni. II. Sanches,  
Juliana. III. Título.

PAULO ROBERTO MARTINS BERNDT

**ESTUDO DE FUNÇÕES POR MEIO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NO  
SOFTWARE GEOGEBRA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto Federal do Rio Grande do Sul/Campus Canoas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Banca examinadora**

---

Prof. Dr. Bruno Brogni Uggioni  
Instituto Federal do Rio Grande do Sul

---

Profa. Dra. Juliana Sanches  
Instituto Federal do Rio Grande do Sul

---

Profa. Dra. Núbia Lúcia Cardoso Guimarães  
Instituto Federal do Rio Grande do Sul

---

Prof. Dr. Alessandro Bagatini  
Colégio Militar de Porto Alegre

**Canoas  
2025**

## AGRADECIMENTOS

Início expressando minha profunda gratidão ao Instituto Federal do Rio Grande do Sul (IFRS), instituição na qual atuo profissionalmente, pelo constante incentivo à qualificação de seus servidores.

Agradeço, com especial apreço, a todos os professores do mestrado profissional em Matemática (PROFMAT), do IFRS – Campus Canoas, pelas aulas enriquecedoras e pelas valiosas reflexões que contribuíram significativamente para minha formação acadêmica e profissional.

Expresso meus agradecimentos à Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Maria Alice Gravina, cuja produção intelectual constituiu relevante fonte de inspiração, sendo também responsável por minha introdução ao estudo da Geometria Dinâmica.

Dirijo meu agradecimento mais profundo aos meus orientadores, Prof. Dr. Bruno Brogni Uggioni e Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Juliana Sanches, pelo acompanhamento atento, pelas orientações precisas e pelo comprometimento dedicado, fundamentais para a realização e conclusão desta dissertação.

Registro ainda meu reconhecimento aos colegas do mestrado, pelo companheirismo, apoio mútuo e partilha de experiências ao longo dessa jornada.

Por fim, agradeço com carinho à minha mãe e aos meus irmãos pelo apoio incondicional e pela ajuda essencial que me permitiram trilhar e concluir esse caminho.

## RESUMO

Esta proposta visa integrar o estudo de Funções Reais às áreas de Geometria e Trigonometria, por meio da resolução de problemas geométricos e do uso de construções de representações gráficas de funções. A escolha desse tema surgiu diante da constatação de lacunas significativas nos conhecimentos geométricos dos estudantes ingressantes nos cursos técnicos integrados do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS) – Campus Feliz. Para enfrentar essa dificuldade, propomos antecipar o ensino de conteúdos geométricos desde o primeiro ano do curso, permitindo tempo hábil para o desenvolvimento e consolidação desses conhecimentos. A pesquisa é guiada pela pergunta: *Como explorar conceitos de funções reais no Ensino Médio, com enfoque geométrico, utilizando o software GeoGebra?* A proposta busca integrar tecnologia ao ensino da Matemática, tornando o aprendizado mais visual, dinâmico e acessível. O objetivo geral é desenvolver uma proposta pedagógica que aborde funções em um contexto geométrico, por meio de construções dinâmicas que estimulem o estudante a fazer inferências e generalizações algébricas. Outros objetivos são: elaborar e justificar uma sequência de atividades que favoreça um aprendizado mais significativo de funções, tenha o potencial de despertar o interesse dos alunos, promova a análise de gráficos e dados, incentive a identificação de padrões e desenvolva o raciocínio lógico e a abstração. A metodologia adotada foi qualitativa, baseada em pesquisa bibliográfica e desenvolvida em três etapas: levantamento de literatura sobre Geometria Dinâmica e ensino de funções; análise de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) que envolviam Geometria e Funções; e elaboração de duas sequências didáticas – para o 1º e o 3º anos do Ensino Médio – com o GeoGebra como ferramenta central. A utilização do GeoGebra permite a criação de gráficos dinâmicos, diversificando e ampliando a forma de compreender e relacionar as representações gráficas e algébricas. Ao observar essas representações em movimento, os estudantes têm a oportunidade de visualizar transformações e identificar propriedades invariantes nas construções geométricas. Em vez de analisarem uma única figura estática, entram em contato com uma família de infinitas figuras geradas pelas sucessivas posições ao longo do movimento, o que pode favorecer a formulação de conjecturas e a construção de argumentos dedutivos. Esses processos favorecem a transição do conhecimento empírico para o formal e podem guiar o estudante pelos caminhos da argumentação e prova. Conclui-se que ambientes de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra, podem potencializar uma aprendizagem matemática mais integrada e significativa, unindo visualização, experimentação e dedução. Essa abordagem pode fortalecer a intuição, a formalização e o pensamento investigativo, essenciais para o desenvolvimento de competências matemáticas sólidas.

**Palavras-chave:** Geometria. Funções. GeoGebra. Geometria Dinâmica.

## ABSTRACT

This proposal aims to integrate the study of Real Functions with the areas of Geometry and Trigonometry, through the resolution of geometric problems and the use of graphical representations of functions. The choice of this topic arose from the observation of significant gaps in the geometric knowledge of students entering integrated technical programs at the Federal Institute of Education, Science, and Technology of Rio Grande do Sul (IFRS) – Campus Feliz. To address this challenge, we propose to introduce geometric content early in the first year of the program, allowing sufficient time for the development and consolidation of this knowledge. The research is guided by the question: How can we explore concepts of real functions in high school, with a geometric focus, using GeoGebra software? The proposal seeks to integrate technology into mathematics teaching, making learning more visual, dynamic, and accessible. The overall objective is to develop a pedagogical approach that addresses functions in a geometric context, through dynamic constructions that encourage students to make algebraic inferences and generalizations. Other objectives include: developing and justifying a sequence of activities that fosters more meaningful learning about functions, has the potential to spark student interest, promotes graph and data analysis, encourages pattern identification, and develops logical reasoning and abstraction. The methodology adopted was qualitative, based on bibliographic research, and developed in three stages: a literature review on Dynamic Geometry and the teaching of functions; analysis of questions from the Brazilian Public School Mathematics Olympiad (OBMEP) involving Geometry and Functions; and the development of two teaching sequences—for 1st and 3rd grade high school students—with GeoGebra as the central tool. Using GeoGebra allows for the creation of dynamic graphs, diversifying and expanding the way students understand and relate graphical and algebraic representations. By observing these representations in motion, students have the opportunity to visualize transformations and identify invariant properties in geometric constructions. Instead of analyzing a single static figure, they interact with a family of infinite figures generated by successive positions throughout the movement, which can favor the formulation of conjectures and the construction of deductive arguments. These processes facilitate the transition from empirical to formal knowledge and can guide students along the paths of argumentation and proof. It follows that Dynamic Geometry environments, such as GeoGebra, can foster more integrated and meaningful mathematical learning by combining visualization, experimentation, and deduction. This approach can strengthen intuition, formalization, and investigative thinking, essential for the development of solid mathematical skills.

Keywords: Geometry. Functions. GeoGebra. Dynamic Geometry.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de sequência de ilustrações em forma de L.....	30
Figura 2 - A “máquina” de dobrar.....	31
Figura 3 - Representações para funções na escola: relações limitadas.....	35
Figura 4 - Representações para funções na escola: completando articulações.....	36
Figura 5 - Quadrado na forma prototípica (esq.) e não prototípica (dir.).....	39
Figura 6 - Estruturas Lógicas e funcionamentos cognitivos.....	40
Figura 7 - Construção da Mediatriz de um segmento.....	44
Figura 8 - Circuncentro em triângulos Acutângulos, Obtusângulos e Retângulos.....	45
Figura 9 - Sequência: Escada que desliza apoiada em uma parede vertical.....	45
Figura 10 - Relação funcional entre objetos, armazenada pelo software.....	46
Figura 11 - Família de "paralelogramos em movimento", todos com mesma área.....	47
Figura 12 - Quadrado construído com "estabilidade sob ação de movimento".....	52
Figura 13 - Figura construída sem "estabilidade sob ação de movimento".....	53
Figura 14 - Ilustração da Questão 18.....	57
Figura 15 - Questão 18, OBMEP 2007, Nível 3, 1ª Fase.....	58
Figura 16 - Gráfico da função que modela o problema da Questão 18.....	58
Figura 17 - Ilustração da Questão 13.....	59
Figura 18 – Gráfico da função que modela o problema da questão 13.....	60
Figura 19 - Ilustração da Questão 11.....	60
Figura 20 - Questão 11, OBMEP 2016, Nível 3, 1ª Fase.....	61
Figura 21 - Gráfico da função que modela o problema da Questão 11.....	62
Figura 22 - Os triângulos ABC e A'B'C' são congruentes.....	63
Figura 23 - Caso LAL de congruência de Triângulos.....	64
Figura 24 - Caso ALA de congruência de triângulos.....	64
Figura 25 - Caso LLL de congruência de triângulos.....	64
Figura 26 - Caso LAAo de congruência de triângulos.....	65
Figura 27 - Caso Especial de congruência de triângulos retângulos.....	65
Figura 28 - Ilustração do exemplo de congruência de triângulos.....	66
Figura 29 - ABC e A'B'C' são triângulos semelhantes.....	66
Figura 30 - Ilustração do Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos.....	67
Figura 31 - Ilustração do Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos.....	68
Figura 32 - Caso AA de Semelhança de Triângulos.....	69
Figura 33 - Caso LAL de Semelhança de Triângulos.....	69
Figura 34 - Caso LLL de Semelhança de Triângulos.....	70
Figura 35 - Ilustração do exemplo de semelhança de triângulos.....	70
Figura 36 - Triângulos semelhantes presentes na construção.....	71
Figura 37 - Quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo.....	71
Figura 38 - Demonstração clássica do Teorema de Pitágoras.....	72
Figura 39 - Quadrados construídos sobre os lados de medidas 3, 4 e 5 do triângulo retângulo.....	72

Figura 40 - Quadrado unitário .....	73
Figura 41 - Quadrado de lado $\ell$ .....	73
Figura 42 - Decomposição de um quadrado em quadrados e retângulos. ....	74
Figura 43 - Retângulo de base $b$ e altura $h$ .....	74
Figura 44 - Translação transforma paralelogramo em retângulo equivalente.....	75
Figura 45 - Paralelogramo de base $b$ e altura $h$ . ....	75
Figura 46 - Justaposição de triângulos congruentes forma um paralelogramo. ....	75
Figura 47 - Triângulo de base $b$ e altura $h$ . ....	76
Figura 48 - Losango pode ser inscrito em um retângulo.....	76
Figura 49 - Losango de diagonais $d_1$ e $d_2$ .....	77
Figura 50 - Rotação transforma trapézio em paralelogramo equivalente. ....	77
Figura 51 - Trapézio de bases $b_1$ e $b_2$ e altura $h$ .....	78
Figura 52 - Gráfico da função constante. ....	78
Figura 53 - Gráfico de uma função afim. ....	79
Figura 54 - Três pontos sobre o gráfico de uma função afim. ....	79
Figura 55 - Triângulos semelhantes presentes na construção.....	80
Figura 56 - Variação do coeficiente angular " $a$ " em retas do tipo $y = ax$ .....	81
Figura 57 - Variação do coeficiente linear " $b$ " em retas do tipo $y = x + b$ .....	82
Figura 58 - Gráfico cartesiano de uma função quadrática. ....	83
Figura 59 - Definição Geométrica da Parábola.....	84
Figura 60 - Eixo de simetria da parábola.....	84
Figura 61 - Coordenadas do vértice de uma parábola.....	85
Figura 62 - Variação do coeficiente " $a$ " em parábolas do tipo $y = ax^2$ .....	86
Figura 63 - Gráfico da função modular.....	87
Figura 64 - Gráfico de uma função definida em três partes. ....	87
Figura 65 - Triângulo retângulo .....	88
Figura 66 - Triângulos Retângulos semelhantes. ....	89
Figura 67 - Cálculo da medida da altura de um triângulo equilátero.....	89
Figura 68 - Cálculo da medida da diagonal de um quadrado.....	90
Figura 69 - Triângulo ABC e seu círculo circunscrito. ....	90
Figura 70 - Triângulo qualquer ABC.....	91
Figura 71 - Triângulo Acutângulo.....	91
Figura 72 - Triângulo Obtusângulo.....	92
Figura 73 - Triângulo Retângulo.....	92
Figura 74 - Triângulo qualquer ABC.....	93
Figura 75 - ABC é triângulo acutângulo. ....	93
Figura 76 - ABC é triângulo obtusângulo.....	93
Figura 77 - ABCD é um paralelogramo. ....	94
Figura 78 - ABCD é um losango. ....	94
Figura 79 - Arco AB definido na circunferência.....	95
Figura 80 - Detalhe de um círculo dividido em 360 partes. ....	95
Figura 81 - Arco cuja medida é 1 radiano.....	96
Figura 82 - Comprimento de um arco.....	96

Figura 83 - Ciclo Trigonométrico e arco marcado no sentido anti-horário.....	97
Figura 84 - Ciclo Trigonométrico: extremidades dos quadrantes.....	98
Figura 85 - Exemplo de um arco de mais de uma volta.....	98
Figura 86 - Exemplo de arco negativo.....	99
Figura 87 - O arco AP está associado a uma família de arcos cômruos.....	99
Figura 88 - Arcos simétricos em relação ao eixo vertical.....	100
Figura 89 - Arcos simétricos em relação ao eixo horizontal.....	100
Figura 90 - Arcos simétricos em relação ao centro.....	101
Figura 91 - Três famílias de arcos notáveis simétricos.....	101
Figura 92 - Função Seno.....	102
Figura 93 - Gráfico cartesiano da Senoide.....	103
Figura 94 - Função Cosseno.....	103
Figura 95 - Gráfico cartesiano da Cossenoide.....	104
Figura 96 - Função Tangente.....	104
Figura 97 - Triângulos Semelhantes no ciclo.....	104
Figura 98 - Gráfico cartesiano da Tangentoide.....	105
Figura 99 - Ilustração do Problema nº 01.....	109
Figura 100 - Construção geométrica do Problema nº 01.....	110
Figura 101 - Construção do gráfico dinâmico do Problema nº 01.....	111
Figura 102 - Traçado Auxiliar da altura do triângulo ABE.....	111
Figura 103 - Ilustração do Problema nº 02.....	113
Figura 104 - Construção geométrica do problema nº 02.....	113
Figura 105 - Solução particular, considerando $BE = 1$ unidade.....	114
Figura 106 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 02.....	115
Figura 107 - Ilustração do problema nº 03.....	116
Figura 108 - Construção geométrica do problema nº 03.....	117
Figura 109 - Solução particular, para $AE = 1$ unidade.....	118
Figura 110 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 03.....	118
Figura 111 - Ilustração do problema nº 04.....	120
Figura 112 - Construção geométrica do problema nº 04.....	120
Figura 113 - Triângulos semelhantes presentes na construção.....	121
Figura 114 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 04.....	122
Figura 115 - Ilustração do problema nº 05.....	123
Figura 116 - Construção geométrica do problema nº 05.....	124
Figura 117 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 05.....	125
Figura 118 - Ilustração do problema nº 06.....	127
Figura 119 - Construção geométrica do problema nº 06.....	128
Figura 120 - Triângulos congruentes presentes na construção.....	129
Figura 121 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 06.....	130
Figura 122 - Decomposição do quadrado ABCD.....	130
Figura 123 - Ilustração do problema nº 07.....	132
Figura 124 - Construção geométrica do problema nº 07.....	133
Figura 125 - Triângulos congruentes ABI e IFA.....	133

Figura 126 – Solução particular para $AF = 0,5$ unidades.....	134
Figura 127 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 07.....	135
Figura 128 - Análise das dimensões dos retângulos vermelhos.....	135
Figura 129 - Ilustração do problema nº 08.....	137
Figura 130 - Construção geométrica do problema nº 08.....	137
Figura 131 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 08.....	139
Figura 132 - Ilustração do problema nº 09.....	141
Figura 133 - Construção geométrica do problema nº 09.....	142
Figura 134 - Solução particular para $CF = 1,5$ unidades.....	143
Figura 135 - Solução particular para $CF = 4,5$ unidades.....	143
Figura 136 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 09.....	144
Figura 137 - Ilustração do problema nº 01.....	147
Figura 138 - Solução particular para $\alpha = 30^\circ$ .....	148
Figura 139 - Solução particular para $\alpha = 120^\circ$ .....	148
Figura 140 - Solução particular para $\alpha = 225^\circ$ .....	149
Figura 141 - Solução particular para $\alpha = 330^\circ$ .....	149
Figura 142 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 01.....	150
Figura 143 - Análise da altura quando $\alpha$ está no 1º quadrante. ....	151
Figura 144 - Análise da altura quando $\alpha$ está no 2º quadrante. ....	151
Figura 145 - Análise da altura quando $\alpha$ está no 3º quadrante. ....	151
Figura 146 - Análise da altura quando $\alpha$ está no 4º quadrante. ....	152
Figura 147 - Ilustração do problema nº 02.....	153
Figura 148 - Construção geométrica do problema nº 02.....	154
Figura 149 - Solução particular para $\alpha = 30^\circ$ .....	155
Figura 150 - Solução particular para $\alpha = 90^\circ$ .....	155
Figura 151 - Solução particular para $\alpha = 135^\circ$ .....	156
Figura 152 - Solução particular para $\alpha = 240^\circ$ .....	156
Figura 153 - Solução particular para $\alpha = 270^\circ$ .....	156
Figura 154 - Solução particular para $\alpha = 330^\circ$ .....	157
Figura 155 - Solução particular para $\alpha = 0^\circ$ .....	157
Figura 156 - Solução particular para $\alpha = 180^\circ$ .....	157
Figura 157 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 02.....	158
Figura 158 - Análise da variação da área em função de $\alpha$ .....	158
Figura 159 - Ilustração do problema nº 03.....	160
Figura 160 - Construção geométrica do problema nº 03.....	161
Figura 161 - Solução particular para $\alpha = 0^\circ$ .....	162
Figura 162 - Solução particular para $\alpha = 30^\circ$ .....	162
Figura 163 - Solução particular para $\alpha = 90^\circ$ .....	163
Figura 164 - Solução particular para $\alpha = 120^\circ$ .....	163
Figura 165 - Solução particular para $\alpha = 180^\circ$ .....	164
Figura 166 - Solução particular para $\alpha = 225^\circ$ .....	164
Figura 167 - Solução particular para $\alpha = 270^\circ$ .....	165
Figura 168 - Solução particular para $\alpha = 300^\circ$ .....	165

Figura 169 - Solução particular para $\alpha = 360^\circ$ .....	166
Figura 170 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 03.....	166
Figura 171 - Análise da medida de AG quando $\alpha$ está no 1º quadrante. ....	167
Figura 172 - Análise da medida de AG quando $\alpha$ está no 2º quadrante. ....	167
Figura 173 - Análise da medida de AG quando $\alpha$ está no 3º quadrante. ....	168
Figura 174 - Análise da medida de AG quando $\alpha$ está no 4º quadrante. ....	168
Figura 175 - Ilustração do problema nº 04.....	169
Figura 176 - Construção geométrica do problema nº 04.....	170
Figura 177 - Solução particular para $\alpha = 0^\circ$ .....	171
Figura 178 - Solução particular para $\alpha = 45^\circ$ .....	171
Figura 179 - Solução particular para $\alpha = 90^\circ$ .....	171
Figura 180 - Solução particular para $\alpha = 120^\circ$ .....	172
Figura 181 - Solução particular para $\alpha = 180^\circ$ .....	172
Figura 182 - Solução particular para $\alpha = 210^\circ$ .....	173
Figura 183 - Solução particular para $\alpha = 270^\circ$ .....	173
Figura 184 - Solução particular para $\alpha = 300^\circ$ .....	173
Figura 185 - Solução particular para $\alpha = 360^\circ$ .....	174
Figura 186 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 04.....	174
Figura 187 - Análise da área de BCDE quando $\alpha$ está no 1º ou 2º quadrante. ....	175
Figura 188 - Análise da área de BCDE quando $\alpha$ está no 3º ou 4º quadrante. ....	175
Figura 189 - Ilustração do problema nº 05.....	177
Figura 190 - Solução particular quando $\alpha = 0^\circ$ .....	178
Figura 191 - Solução particular quando $\alpha = 45^\circ$ .....	178
Figura 192 - Solução particular quando $\alpha = 60^\circ$ .....	179
Figura 193 - Solução particular quando $\alpha = 90^\circ$ .....	179
Figura 194 - Solução particular quando $\alpha = 150^\circ$ .....	179
Figura 195 - Solução particular quando $\alpha = 180^\circ$ .....	180
Figura 196 - Solução particular quando $\alpha = 240^\circ$ .....	180
Figura 197 - Solução particular quando $\alpha = 270^\circ$ .....	180
Figura 198 - Solução particular quando $\alpha = 330^\circ$ .....	181
Figura 199 - Solução particular quando $\alpha = 360^\circ$ .....	181
Figura 200 - Construção do gráfico cartesiano do problema nº 05. ....	182
Figura 201 - Análise da medida de CD quando $\alpha$ está no 1º quadrante. ....	182
Figura 202 - Quando $\alpha = 90^\circ$ , o triângulo ACD se degenera em uma faixa infinita. ....	183
Figura 203 - Análise da medida de CD quando $\alpha$ está no 2º quadrante. ....	183
Figura 204 - Análise da medida de CD quando $\alpha$ está no 3º quadrante. ....	183
Figura 205 - Quando $\alpha = 270^\circ$ , o triângulo ACD se degenera em uma faixa infinita.....	184
Figura 206 - Análise da medida de CD quando $\alpha$ está no 4º quadrante. ....	184

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b> .....	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>Problema, objetivos e justificativa</b> .....	<b>16</b>
<b>3</b>	<b>Procedimentos Metodológicos</b> .....	<b>18</b>
<b>4</b>	<b>Fundamentação Teórica</b> .....	<b>22</b>
4.1	Revisão de Literatura .....	22
4.2	Considerações sobre o ensino de Funções .....	28
4.2.1	O Conceito de Função .....	28
4.2.2	Considerações nos Parâmetros Curriculares Nacionais .....	32
4.2.3	Considerações sobre o ensino de Funções no livro Recursos Computacionais.....	35
4.3	Considerações sobre o ensino de Geometria .....	37
4.3.1	Considerações nos Parâmetros Curriculares Nacionais .....	37
4.3.2	Considerações na tese: Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo.....	38
4.4	Geometria Dinâmica.....	42
4.4.1	GeoGebra .....	51
<b>5.</b>	<b>Questões da OBMEP que integram Geometria e Funções</b> .....	<b>55</b>
<b>6.</b>	<b>Premissas</b> .....	<b>63</b>
6.1.	Congruência de triângulos.....	63
6.1.1.	Casos de Congruência de Triângulos .....	63
6.2.	Semelhança de Triângulos.....	66
6.2.1.	Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos.....	67
6.2.2.	Casos de Semelhança .....	68
6.3.	O Teorema Pitágoras .....	71
6.4.	Áreas de Figuras Planas.....	73
6.4.1.	Área do Quadrado .....	73
6.4.2.	Área do Retângulo.....	73
6.4.3.	Área do Paralelogramo .....	75
6.4.4.	Área do Triângulo .....	75
6.4.5.	Área do Losango .....	76
6.4.6.	Área do Trapézio .....	77
6.5	Funções.....	78
6.5.1	Função Constante.....	78
6.5.2	Função Afim.....	79

6.5.3 Função Quadrática.....	82
6.5.4 Funções de várias sentenças .....	86
6.6 Trigonometria.....	87
6.6.1 Razões Trigonométricas para ângulos agudos. ....	87
6.6.2 Lei dos Senos.....	90
6.6.3 Lei dos Cossenos.....	91
6.6.4 Fórmula Trigonométrica para a Área de um Triângulo .....	93
6.6.5 Medidas de Arcos e Ângulos.....	94
6.6.6 Ciclo Trigonométrico .....	97
6.6.7 Simetrias no Ciclo Trigonométrico .....	100
6.6.8 Funções Trigonométricas .....	102
<b>7 Sequências Didáticas.....</b>	<b>107</b>
7.1. Primeira Sequência de atividades – para estudantes do 1° ano do Ensino Médio.....	108
7.1.1. Problema n° 01.....	108
7.1.2. Problema n° 02.....	112
7.1.3. Problema n° 03.....	116
7.1.4. Problema n° 04.....	119
7.1.5. Problema n° 05.....	122
7.1.6. Problema n° 06.....	126
7.1.7. Problema n° 07.....	131
7.1.8. Problema n° 08.....	136
7.1.9. Problema n° 09.....	140
7.2 Segunda Sequência de atividades – para estudantes do 3° ano do Ensino Médio .....	146
7.2.1. Problema n° 01.....	146
7.2.2. Problema n° 02.....	152
7.2.3. Problema n° 03.....	159
7.2.4. Problema n° 04.....	169
7.2.5. Problema n° 05.....	176
<b>8 Considerações Finais.....</b>	<b>186</b>
<b>Referências.....</b>	<b>188</b>
<b>Apêndices .....</b>	<b>191</b>
Apêndice 1 - Primeira sequência de atividades – para estudantes do 1° ano do Ensino Médio .....	191
Apêndice 2 - Segunda sequência de atividades – para estudantes do 3° ano do Ensino Médio .....	202
Apêndice 3 – Protocolos de construção gerados pelo software GeoGebra.....	209

<b>Anexos .....</b>	<b>224</b>
Anexo 1 – Questões da OBMEP que relacionam Geometria e Funções .....	224

## 1 Introdução

Desde o ano de 2011, venho atuando de forma contínua como docente em turmas dos Cursos Técnicos Integrados ao Ensino Médio no Instituto Federal do Rio Grande do Sul – Campus Feliz. Ao longo desse período, pude observar com frequência uma recorrente dificuldade por parte dos alunos no que se refere à aprendizagem dos conteúdos de Geometria. Essa deficiência não é pontual, mas sim fruto de um histórico de negligência dessa área do conhecimento durante o Ensino Fundamental, conforme relatado pelos próprios estudantes ao longo dos anos.

Diante dessa realidade, e reconhecendo a importância da Geometria como componente essencial na formação matemática dos alunos, busco, sempre que possível, integrar uma abordagem geométrica nos conteúdos que ministro. Essa iniciativa visa não apenas atender à demanda imediata dos estudantes, mas também contribuir para preencher as lacunas formativas deixadas em etapas anteriores da escolarização.

Compreendo que, na região onde atuo, há uma necessidade evidente de revalorização e resgate mais efetivo da Geometria no contexto das aulas do Ensino Médio. Nesse sentido, proponho, neste trabalho, duas sequências didáticas que têm como objetivo apresentar o estudo das Funções a partir de construções geométricas. Trata-se de uma proposta metodológica que visa integrar conteúdos de Álgebra e Geometria de maneira significativa, promovendo uma aprendizagem mais profunda e articulada.

Essa proposta está alinhada com minha afinidade particular com o tema e com o desejo de contribuir com as práticas pedagógicas de outros professores de Matemática. Acredito que o compartilhamento de experiências e materiais didáticos pode fortalecer o trabalho coletivo dos docentes e favorecer a diversificação no ensino.

As sequências didáticas produzidas destinam-se a professores do Ensino Médio e contém 14 situações-problema. Essas sequências podem ser adaptadas conforme as necessidades dos estudantes e têm como foco a resolução de tarefas desafiadoras e significativas, relacionadas ao processo de ensino-aprendizagem de Funções reais de variável real e Áreas de figuras planas.

Após a exposição do planejamento referente a cada atividade, o professor encontrará uma seção destinada às resoluções detalhadas, cujas soluções pressupõem o domínio prévio, por parte dos estudantes, de conceitos relacionados à Geometria e às Funções.

As atividades foram organizadas considerando a progressão dos conteúdos ao longo do Ensino Médio. A primeira sequência é voltada para alunos do 1º ano, com foco nas funções polinomiais e no conceito de área, por meio de situações-problema contextualizadas geometricamente. Já a segunda sequência é direcionada para alunos do 3º ano, e trabalha problemas mais complexos, que exigem a articulação de conceitos de Geometria e Trigonometria, preparando os estudantes para os desafios futuros do ensino superior.

As atividades foram elaboradas com o objetivo de oferecer subsídios que contribuam para o aprofundamento dos conhecimentos dos estudantes, ao mesmo tempo em que sugerem uma metodologia baseada em práticas investigativas. Essa abordagem busca ser mais intuitiva, favorecendo o desenvolvimento da argumentação lógica e do raciocínio dedutivo.

Os problemas de modelagem geométrica que resultam em funções reais de variável real revelam-se como instrumentos potentes para o ensino da Matemática. Tais problemas funcionam como verdadeiros laboratórios para o ensino de Geometria, nos quais os alunos podem explorar conceitos, testar hipóteses e construir significados por meio da visualização e manipulação de representações geométricas. Essa abordagem pode favorecer o desenvolvimento do pensamento matemático e estimular a autonomia intelectual dos estudantes.

Além disso, o uso de recursos tecnológicos, como os softwares de Geometria Dinâmica, amplia significativamente as possibilidades de exploração didática da Geometria. Dentre esses recursos, destaco o software GeoGebra, cuja interface amigável e suas múltiplas funcionalidades permitem a criação de construções interativas que enriquecem o processo de ensino e aprendizagem. O movimento e a interatividade presentes nas construções realizadas no GeoGebra não apenas tornam as aulas mais atrativas, mas, sobretudo, constituem elementos essenciais para a compreensão dos conceitos. Assim, o software não é utilizado apenas como uma ferramenta de desenho, mas como um verdadeiro ambiente informatizado de investigação matemática.

As propostas que apresento neste trabalho refletem minha intenção de promover uma prática docente mais significativa, integradora e sintonizada com as demandas atuais da Educação Matemática. Espero, com isso, contribuir para a qualificação do ensino da Matemática e para a formação de alunos mais críticos, criativos e preparados para os desafios do mundo contemporâneo.

## 2 Problema, objetivos e justificativa

O ensino de Matemática no Ensino Médio, conforme estabelecem os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2002a), deve possibilitar aos estudantes não apenas a resolução de problemas práticos do cotidiano, mas também a modelagem de fenômenos em diferentes áreas do conhecimento. Além disso, espera-se que os alunos compreendam a Matemática como ciência estruturada por teoremas e demonstrações, reconhecendo seu caráter histórico, social e sua relevância no desenvolvimento científico e tecnológico. Neste contexto, o estudo de funções reais de variável real constitui-se como conteúdo central e estruturante, cuja abordagem demanda metodologias que estimulem o raciocínio lógico, a interpretação gráfica e a articulação entre diferentes representações matemáticas.

Diante disso, o presente trabalho tem como problema de pesquisa a seguinte indagação: como explorar conceitos de funções reais de variável real no Ensino Médio, a partir de um enfoque geométrico, utilizando o software GeoGebra? A relevância dessa investigação reside na possibilidade de integrar recursos tecnológicos ao ensino de funções, promovendo uma compreensão mais visual e dinâmica dos conceitos envolvidos, especialmente por meio das construções geométricas que o GeoGebra permite realizar.

O objetivo geral deste estudo é elaborar uma proposta de ensino que aborde o estudo de funções em um contexto geométrico, enfatizando as construções geométricas e as deduções algébricas decorrentes, com o apoio do software GeoGebra. Entre os objetivos específicos, destacam-se:

- Planejar e justificar uma sequência de atividades didáticas que favoreçam uma aprendizagem mais significativa dos estudantes, permitindo-lhes construir, fundamentar, ampliar e solidificar seus conhecimentos matemáticos;
- Construir uma sequência didática que possa motivar os estudantes, engajando-os para a construção do conhecimento, por meio da investigação, argumentação e prova;
- Provocar a percepção dos alunos sobre as propriedades matemáticas presentes nas situações-problema abordadas, promovendo o desenvolvimento do pensamento lógico e da capacidade de abstração.

A utilização de tecnologias digitais no ensino de Matemática, em especial o GeoGebra, oferece novas possibilidades para o desenvolvimento de propostas

pedagógicas que articulem o conhecimento geométrico e algébrico. A abordagem geométrica das funções favorece a construção de significados por parte dos estudantes, ao possibilitar a visualização de propriedades como domínio, imagem, crescimento e decrescimento, máximos e mínimos, entre outras. Assim, o uso do GeoGebra como ferramenta pedagógica permite uma transição fluida entre representações gráficas e simbólicas, contribuindo para uma aprendizagem mais integrada e contextualizada.

Além disso, o enfoque geométrico atende à necessidade de tornar o estudo das funções mais acessível e atrativo, estimulando a investigação, a experimentação e o pensamento crítico. Ao propor atividades que envolvem construção, manipulação e interpretação de gráficos, espera-se que os estudantes desenvolvam não apenas competências básicas de cálculo, mas também habilidades cognitivas mais amplas, como a capacidade de argumentação, comunicação e resolução de problemas.

A proposta aqui delineada pretende contribuir para a melhoria do ensino de funções no Ensino Médio, a partir de uma perspectiva que valoriza o uso da tecnologia e o papel ativo do estudante no processo de aprendizagem. Com base nas diretrizes dos PCNEM (2002) e BNCC, busca-se promover uma prática pedagógica que esteja em consonância com os desafios do nosso tempo, preparando os alunos para o uso competente da Matemática em múltiplos contextos.

### 3 Procedimentos Metodológicos

A metodologia adotada para o desenvolvimento deste trabalho pautou-se, fundamentalmente, na pesquisa bibliográfica, estruturada em três etapas principais, cada uma com objetivos bem definidos e inter-relacionados. Na primeira etapa, procedeu-se a um levantamento de livros, artigos acadêmicos, dissertações e outras fontes relevantes que abordam temas ligados à Geometria Dinâmica, ao ensino de funções e a conteúdos afins. O objetivo central dessa etapa foi a construção de uma fundamentação teórica que pudesse sustentar, do ponto de vista pedagógico e didático, as escolhas metodológicas adotadas ao longo da pesquisa. Essa revisão da literatura permitiu identificar abordagens diversificadas para o ensino de Matemática, bem como compreender os fundamentos conceituais que embasam o uso de tecnologias digitais, como o software GeoGebra, no processo de ensino e aprendizagem.

As principais referências teóricas utilizadas neste trabalho foram os estudos da professora doutora Maria Alice Gravina, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática por meio da Geometria Dinâmica. Essa escolha deve-se, em grande parte, ao fato de eu ter sido seu aluno nos anos de 2012 e 2013 na UFRGS. Tanto em sua atuação como pesquisadora quanto como docente, Gravina sempre esteve voltada às questões relacionadas ao uso das tecnologias digitais no ensino da Matemática escolar. Foi nesse contexto que tive contato com um universo de possibilidades didáticas proporcionadas pelos recursos informáticos, diretamente extraídos das aulas e das publicações da referida professora/pesquisadora.

Nesse ambiente acadêmico, tive acesso a diversos trabalhos orientados por Gravina, como, por exemplo, a dissertação “Matemática Dinâmica: uma abordagem para o ensino de funções afim e quadrática a partir de situações geométricas”, de Eliana Bevilacqua Salim, que apresenta como ponto em comum com a presente dissertação a escolha temática.

Também na UFRGS, tive a oportunidade de assistir a uma palestra do professor doutor Victor Augusto Giraldo (UFRJ), na qual apresentou o conceito de Gráficos Dinâmicos. A partir desse contato, conheci suas relevantes publicações na *Revista do Professor de Matemática* (RPM), onde coordenava a seção “Computador na sala de aula”. Pesquisando mais sobre sua trajetória, encontrei a obra *Recursos Computacionais no*

*Ensino da Matemática*, escrita em coautoria com outros dois pesquisadores e publicada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) na coleção PROFMAT.

Por meio das referências indicadas nos trabalhos do professor Victor Giraldo, tive acesso à produção do professor doutor Abraham Arcavi, um dos pioneiros nas investigações sobre Geometria Dinâmica. Pesquisador argentino com pós-doutorado na Universidade da Califórnia, Berkeley, Arcavi atualmente reside em Israel, onde colabora com o Ministério da Educação e com a Iniciativa para Pesquisa Aplicada em Educação da Academia Israelense de Ciências e Humanidades. Foi em Berkeley que desenvolveu um projeto embrionário de software de Geometria Dinâmica, o *Geometry Inventor*, em 1994, possibilitando o início das investigações sobre ensino e aprendizagem com objetos dinâmicos (Hadas, Arcavi, 2001).

Além dos trabalhos desses autores, que compõem a base teórica principal desta pesquisa, outros estudos também foram incorporados, todos oriundos de publicações acadêmicas com revisão por pares, contribuindo para o aprofundamento e a fundamentação da discussão proposta.

A segunda etapa consistiu na realização de uma análise detalhada das provas disponibilizadas no site da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), com o intuito de selecionar questões que envolvessem direta ou indiretamente conceitos de Geometria Dinâmica. A seleção dessas questões teve como finalidade identificar situações-problema que pudessem ser reinterpretadas ou adaptadas ao contexto das sequências didáticas propostas, estabelecendo, assim, uma conexão entre o conteúdo trabalhado em sala de aula e o tipo de raciocínio exigido em avaliações externas de relevância educacional.

No presente estudo, foram analisadas todas as 37 provas do Nível 3 disponibilizadas no site oficial da OBMEP no período de 2005 a 2024. Esse conjunto inclui 18 provas referentes à 1ª fase e 19 provas correspondentes à 2ª fase da competição. A partir desse material, foi possível reunir um total de 474 questões, que compuseram o universo da análise.

Durante o processo de triagem e leitura cuidadosa dessas questões, foram identificadas 20 que apresentavam, de forma simultânea, elementos relacionados aos dois temas centrais deste trabalho. No entanto, ao aprofundar a análise qualitativa dessas 20 questões, constatou-se que 4 delas abordavam conteúdos ligados a distâncias e perímetros. Apesar de estarem relacionados à Geometria, esses tópicos não se enquadram

no escopo específico desta pesquisa, cujo foco recai sobre o estudo das áreas de figuras planas. Em razão disso, as referidas 4 questões foram desconsideradas para fins de análise aprofundada.

As 16 questões remanescentes, que tratam exclusivamente do tema "Áreas de Figuras Planas", foram consideradas pertinentes e relevantes para os objetivos desta investigação. Essas questões foram organizadas em ordem cronológica, com o intuito de permitir uma visão evolutiva da abordagem do tema ao longo dos anos. A apresentação cronológica também facilitou a identificação de possíveis mudanças na complexidade, na linguagem e nos contextos propostos ao longo das edições da OBMEP.

Na terceira e última etapa, foram elaboradas duas sequências didáticas distintas, direcionadas a diferentes níveis do Ensino Médio. A primeira sequência foi planejada para atender às necessidades de aprendizagem de estudantes do primeiro ano do Ensino Médio, enquanto a segunda teve como público-alvo alunos do terceiro ano. Ambas as propostas se fundamentaram na utilização de construções geométricas realizadas no software GeoGebra, com o propósito de explorar e aprofundar a compreensão de funções reais por meio de representações gráficas e manipulações dinâmicas, promovendo, assim, um ensino mais interativo, visual e exploratório.

A criação das sequências didáticas ocorreu em três fases distintas, com o intuito de construir um material pedagógico robusto, explorando a articulação entre Geometria e Funções por meio do software GeoGebra.

Na primeira fase, foram realizados experimentos livres e testes exploratórios com o GeoGebra, visando à concepção e análise de situações-problema geométricas. Os problemas foram elaborados com um nível moderado de complexidade, de forma que pudessem ser prontamente reconhecidos, visualizados e compreendidos pelos estudantes do Ensino Médio. As construções geométricas envolveram figuras planas como triângulos, quadrados, retângulos, losangos e círculos, servindo de base para o desenvolvimento das situações didáticas. Para cada problema geométrico, foi gerado um gráfico dinâmico que evidenciava a variação da área da figura em função de determinado parâmetro, revelando assim a natureza matemática da função envolvida.

Ao longo dessa etapa, foram produzidos 80 arquivos distintos, cada um contendo uma construção geométrica diferente. A análise desses arquivos revelou uma ampla diversidade de funções reais, dentre as quais se destacam: função constante, função afim, função quadrática, função definida por partes, funções trigonométricas e também funções

menos recorrentes no currículo do Ensino Médio, como as funções polinomiais de 3º e 4º graus, funções racionais e funções cujas expressões envolvem radicais de expressões algébricas. Estas últimas, por sua natureza mais complexa, são mais frequentemente abordadas em cursos de nível superior, especialmente no contexto do Cálculo.

Na segunda fase, procedeu-se à seleção dos problemas que resultavam em funções reais compatíveis com os conteúdos usualmente trabalhados no Ensino Médio. Os demais problemas, por exigirem conhecimentos além desse nível, foram descartados para os fins deste trabalho. Os problemas selecionados foram, então, organizados com base em dois critérios principais: o conteúdo matemático envolvido (tanto de Geometria quanto de Funções) e o nível de complexidade. A partir dessa triagem, foram escolhidos os problemas mais representativos e significativos para os objetivos pedagógicos pretendidos, resultando em um conjunto de 14 situações-problema, que posteriormente foram distribuídas em duas sequências didáticas: a primeira contendo nove problemas e a segunda, cinco.

Na terceira e última fase, com os problemas já definidos, foram delineadas as estratégias pedagógicas a serem empregadas na condução das atividades. Para cada situação, foram identificados os objetivos de aprendizagem específicos, o que orientou a elaboração de conjuntos de perguntas cuidadosamente planejadas. Essas perguntas foram concebidas com a finalidade de guiar o raciocínio dos estudantes, promovendo a investigação, a formulação de conjecturas e a construção gradual do conhecimento matemático, com foco especial na compreensão das propriedades geométricas e na representação gráfica da função associada a cada problema.

Na fase subsequente da pesquisa, foi redigido um capítulo específico dedicado à sistematização das bases teóricas consideradas essenciais para que os alunos possam obter sucesso no desenvolvimento das atividades propostas nas sequências didáticas. Esse capítulo funciona como um suporte teórico, oferecendo uma visão clara dos pré-requisitos conceituais e operatórios necessários para o pleno aproveitamento das propostas pedagógicas desenvolvidas.

## 4 Fundamentação Teórica

Neste capítulo, serão apresentados os principais artigos consultados na pesquisa, acompanhados de um breve resumo de cada um, visando facilitar a leitura e compreensão por parte do leitor. A seguir, serão abordados temas fundamentais para embasar esta pesquisa: o software GeoGebra, os conceitos de Geometria Dinâmica e aspectos relevantes do ensino de Funções e Geometria. A discussão dessas temáticas será enriquecida com o apoio dos autores e estudos mencionados na próxima seção, bem como de outras referências complementares.

### 4.1 Revisão de Literatura

O artigo “Modelling with graphical representations. For the Learning of Mathematics” de Abraham Arcavi (2008) propõe uma nova perspectiva para o ensino da modelagem matemática na escola, destacando o papel central que as representações gráficas dinâmicas podem desempenhar nesse processo. Em contraste com a abordagem tradicional, que privilegia quase exclusivamente o uso de símbolos algébricos, Arcavi argumenta que os gráficos, especialmente quando mediados por tecnologias digitais, devem ocupar um lugar de destaque como ferramentas primárias de modelagem. Partindo da constatação de que a matemática escolar tende a favorecer a modelagem simbólica, o autor sugere que, com o suporte das tecnologias, os gráficos dinâmicos oferecem possibilidades ricas de aprendizagem. Esses recursos permitem aos alunos visualizarem relações matemáticas em tempo real, antecipar conceitos mais avançados (como derivadas e integrais) e desenvolver uma compreensão mais intuitiva sobre variação e dependência entre variáveis.

Para Arcavi (2008), modelar é, essencialmente, transitar entre diferentes “mundos”, da realidade para o simbólico ou gráfico, e depois retornar, num movimento que possibilita compreender, representar e resolver problemas. Embora a modelagem escolar geralmente siga diretamente para o uso de expressões simbólicas, o autor defende que os gráficos devem ser utilizados desde o início como ferramentas investigativas centrais, permitindo a construção gradual do conhecimento. A fim de ilustrar essa proposta, o autor apresenta sete problemas geométricos baseados em figuras simples: retângulos, triângulos e trapézios, todos com restrições, como perímetro fixo, por exemplo. O objetivo é investigar como áreas e comprimentos variam em função de determinados parâmetros, sempre partindo da exploração gráfica dinâmica antes de

recorrer à formalização algébrica. Os gráficos gerados: parabólicos, lineares, simétricos ou com formas surpreendentes, incentivam a investigação, o questionamento e a construção do conhecimento. As contribuições educacionais dessa abordagem são diversas e significativas. Em primeiro lugar, o conceito de função, que é essencial na matemática, torna-se o eixo de todas as atividades. Ao visualizar gráficos que mudam em tempo real, os alunos conseguem estabelecer conexões entre as representações matemáticas e os fenômenos do mundo real. Além disso, a inversão da ordem tradicional, isto é, explorando modelos gráficos antes dos simbólicos favorece o desenvolvimento de intuições visuais e conceituais que enriquecem o aprendizado formal posterior. Situações inesperadas, como o comportamento quase linear observado no Problema 2, tornam-se oportunidades valiosas de questionamento e aprofundamento, incentivando os estudantes a refletirem criticamente sobre suas suposições. Outro ponto forte desta proposta é a valorização do ambiente tecnológico como uma arena experimental. Esse espaço permite que os alunos explorem, testem hipóteses e recebam feedback imediato, sem a pressão do erro como fracasso. Assim, cria-se um clima propício à construção do conhecimento. Por fim, essa abordagem serve como base preparatória para o estudo de conceitos matemáticos mais avançados. Ao promover o desenvolvimento de uma infraestrutura intuitiva, os alunos estarão mais bem preparados para compreender temas como cálculo diferencial e integral.

Arcavi (2008) defende, portanto, um ensino que valoriza a modelagem gráfica dinâmica como etapa inicial e essencial da aprendizagem matemática. Por meio da exploração visual e interativa, os alunos constroem significados antes de formalizá-los simbolicamente, tornando o estudo das funções e relações matemáticas mais acessível, compreensível e conectado com a intuição. Por fim reitera sua visão de que a modelagem é um ciclo contínuo entre os diferentes “mundos”: o da realidade, o das imagens e o dos símbolos, um processo que se retroalimenta, aprofunda a compreensão e amplia as possibilidades de aprendizagem.

O ebook “Perímetro e área” (Gravina, Lopes, 2019) trata de uma proposta de oficina, na qual foram explorados os conceitos de perímetro e área por meio de diversas atividades, adaptadas a diferentes níveis de ensino. Sempre que possível, foram integrados elementos da aritmética, álgebra e geometria. As propostas foram pensadas com o intuito de incentivar a investigação; com o objetivo de estimular nos alunos as atitudes que fazem parte do raciocínio matemático, como testar casos específicos,

formular hipóteses, identificar padrões e buscar justificativas. Foi proposta a utilização de materiais concretos, como palitos, cordões, quadrados de papelão e papel quadriculado. Além disso, recorreu-se ao uso do software GeoGebra, permitindo trabalhar com objetos que transitam entre o concreto e o abstrato.

O artigo “A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados.” (Gravina, Santarosa, 1999) examinou ambientes digitais que oferecem recursos alinhados com o processo de aprendizagem construtivista, que se baseia no princípio de que o conhecimento é construído pelas ações do sujeito. Sob a perspectiva da teoria do desenvolvimento cognitivo de Jean Piaget, foram destacados recursos que auxiliam as ações do indivíduo e, conseqüentemente, favorecem a construção do conhecimento matemático. Na aprendizagem da matemática, esse apoio se manifesta na oportunidade de realizar atividades matemáticas: experimentar, visualizar diferentes aspectos, generalizar, fazer conjecturas e, por fim, demonstrar. Exemplos de ambientes específicos ilustraram esse processo.

O artigo “Modelagem Geométrica e gráficos de funções “sem lei”: criando sequências didáticas em um GeoGebrabook” (Stormowski, 2015) relata a proposta de um minicurso que explorou a criação de applets no GeoGebra voltados para o estudo de funções. Utilizando representações geométricas dinâmicas oferecidas pelo software, buscou-se identificar (ou construir) variáveis relacionadas por dependência funcional, gerando, assim, representações gráficas dessas funções sem recorrer a expressões algébricas explícitas. Em outras palavras, o gráfico da função foi construído diretamente a partir da modelagem geométrica. O foco principal está na análise das taxas de variação entre as variáveis envolvidas, permitindo investigar o comportamento das funções sem a necessidade de trabalhar com sua forma algébrica.

O trabalho “Geometria e funções: uma abordagem computacional a partir de problemas da OBMEP” (Machado, Machado, 2018) propôs uma análise sobre como os aspectos algébricos e geométricos podem ser integrados no ensino de funções reais nas aulas de Matemática da Educação Básica. Para isso, foram exploradas atividades em um ambiente de geometria dinâmica. O estudo se baseou em uma seleção de questões com enfoque geométrico-funcional, extraídas da OBMEP entre os anos de 2005 e 2017. A abordagem metodológica centrou-se na criação de roteiros de atividades utilizando o software Geogebra, com o objetivo de favorecer a compreensão do conceito de função

como uma relação de dependência entre elementos geométricos. Dessa forma, buscou-se ampliar as representações conceituais e as conexões entre Funções Reais e a Geometria.

O artigo “Geometria Dinâmica – uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria” (Gravina, 1996) abordou o problema enfrentado por estudantes que ingressavam no curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, com altos índices de reprovação na disciplina de Geometria Euclidiana, oferecida no primeiro ano. A análise de seu desempenho revelou dificuldades em compreender conceitos geométricos fundamentais e em desenvolver raciocínio dedutivo rigoroso. Muitos confundiam características dos desenhos com as propriedades dos objetos matemáticos e não distinguiam claramente axiomas, definições, teoremas e propriedades. Este trabalho investigou essas limitações e propôs o uso de ambientes de geometria dinâmica como estratégia pedagógica. Nessas atividades, os alunos formularam conjecturas por meio da experimentação, ajustando-as com base no retorno visual do ambiente, o que estimulou a argumentação e a dedução lógica.

O artigo “Modelagem com o GeoGebra: uma possibilidade para a educação interdisciplinar?” (Gravina, Contiero, 2011) explorou a aplicação do software GeoGebra em uma atividade de modelagem que combina conteúdos de geometria com funções reais de variável real, apontando também para potenciais contribuições em trabalhos interdisciplinares. A experiência descrita foi realizada em um curso de licenciatura, no qual os estudantes, ao modelarem diferentes tipos de movimento, demonstraram o desenvolvimento de competências típicas do pensamento matemático, como a capacidade de estabelecer conexões, formular hipóteses e resolver problemas.

O artigo “Formação de professores de matemática para o uso efetivo de tecnologias em sala de aula” (Gravina, Stormowski, Lima, 2015) apresentou um estudo em andamento com o objetivo de melhorar a forma como os professores de matemática incorporam essas tecnologias. A pesquisa se baseia na teoria da abordagem instrumental (Rabardel), que trata da apropriação de ferramentas tecnológicas (como o software GeoGebra), e na teoria dos registros de representação (Duval), que aborda a organização do conhecimento matemático por meio de representações dinâmicas. Com essa abordagem, o artigo propõe estratégias de formação para aprimorar a apropriação da tecnologia pelos docentes de matemática.

O artigo “Aportes de la Geometría Dinámica al estudio de la noción de función a partir de un problema geométrico: un análisis praxeológico” (Costa, Río, 2019) tem como

foco a descrição e a análise de um problema situado no campo da Geometria, utilizado como ponto de partida para a introdução ao conceito de função. Para isso, é feita uma análise prévia dos conhecimentos e habilidades que podem ser mobilizados na resolução desse problema. Em seguida, o problema é adaptado e aplicado em diversos workshops e cursos de formação de professores, com a particularidade de incorporar a Geometria Dinâmica no processo de resolução. Com base nessas experiências, é realizada uma nova análise. Conclui-se que as habilidades práticas relacionadas à Geometria Dinâmica, dentro dos processos de estudo, permitem a construção significativa das ideias fundamentais do conceito de função, a partir de um conjunto praxeológico inicial reduzido.

O artigo “La noción de función mediada por entornos dinámicos. El caso del punto dinámico” (Ferragina, Lupinacci, 2015) tem como objetivo mostrar como o uso de um recurso didático baseado em tecnologia dinâmica, voltado para apresentar a função como ferramenta de modelagem no estudo das variações com grandezas geométricas, pode servir como ponto de partida para novos questionamentos sobre o conceito de função. O desenvolvimento do trabalho foi guiado pela análise das produções dos estudantes, as quais suscitaram novas perguntas sobre esse objeto matemático mediado pela tecnologia: a ideia de função que está implícita no ponto dinâmico. As questões analisadas foram: Qual conceito de função está presente em um software de geometria dinâmica, como o GeoGebra? A quais concepções históricas de função esse conceito se aproxima? A criação de um ponto dinâmico configura, de fato, uma função? E, se sim, de que maneira essa função é caracterizada?

A dissertação “Matemática Dinâmica: uma abordagem para o ensino de Funções Afim e Quadrática a partir de situações geométricas” (Salim, 2014) investigou o papel dos registros de representação semiótica na construção do conceito de função, com foco nas funções dos tipos afim e quadrática. Também foi analisado como o uso do software GeoGebra pode auxiliar no processo de aprendizagem desse tópico. A metodologia seguida se baseou na engenharia didática de Artigue, utilizando uma sequência didática desenvolvida em 2013 para uma turma do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola pública em Porto Alegre. A pesquisa explorou como os alunos estabeleceram conexões entre diferentes representações de uma função (algébrica, gráfica e numérica) e a importância do GeoGebra como ferramenta pedagógica para trabalhar com essas múltiplas representações. As respostas dos alunos foram analisadas com base na teoria dos registros de representação semiótica de Duval, observando como a manipulação de

pontos no GeoGebra ajudou na compreensão do conceito de função e gráfico por meio da conversão contínua entre diferentes registros.

A dissertação “Tecnologias Digitais na formação continuada: situações de ensino articulando Geometria e Funções” (Oliveira, 2017) apresentou a pesquisa que fez parte do projeto "Educação Continuada do Professor de Matemática do Ensino Médio" vinculado ao Programa Observatório da Educação (Obeduc) da Capes. Seu objetivo principal foi investigar como, por meio de um processo de formação contínua, é possível mobilizar e reconstruir o conhecimento profissional docente em Matemática, abordando temas como funções quadráticas e áreas de figuras planas, com o uso de tecnologias digitais. A pesquisa se fundamenta nas teorias de Shulman sobre conhecimento profissional docente, Mishra e Koehler sobre o Conhecimento Tecnológico Pedagógico do Conteúdo (TPACK), e Perrenoud sobre processos reflexivos. A metodologia qualitativa foi dividida em duas etapas: pesquisa documental e elaboração de um processo formativo, seguidas de seu desenvolvimento, coleta e análise de dados. A análise dos dados revelou que os professores ampliaram seu conhecimento sobre Matemática, especialmente em Funções Quadráticas, e avançaram em aspectos tecnológicos, com ênfase no uso do GeoGebra, além de melhorias pedagógicas na integração entre Geometria e Funções. As discussões sobre áreas de figuras planas contribuíram para o fortalecimento do conhecimento pedagógico e tecnológico dos docentes.

A dissertação “Ambientes de Geometria Dinâmica no ensino de Funções e Geometria Plana” (Pinto, 2016) apresenta o GeoGebra como uma ferramenta complementar no ensino de Funções e Geometria Euclidiana Plana na educação básica. Após uma revisão sobre Funções, Geometria Euclidiana e ambientes de Geometria Dinâmica, o software GeoGebra é apresentado, destacando sua interface e recursos principais. São propostas atividades de ensino para funções afim, quadráticas, trigonométricas e geometria, utilizando o GeoGebra para visualização de gráficos e construção de figuras. A utilização de tais softwares se mostra essencial para aprimorar o aprendizado dos alunos, facilitando a assimilação de conceitos.

Também foi analisada a tese “Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo” (Gravina, 2001). Neste trabalho, a autora destaca que o processo de demonstração é fundamental na construção do conhecimento matemático, especialmente na Geometria Euclidiana, que pode ser difícil para os alunos. Um dos principais desafios é a transição entre o conhecimento que os alunos já têm e o conhecimento teórico que deve

ser aprendido, baseado em axiomas, teoremas e demonstrações. Com o avanço da tecnologia, surgem novas estratégias de ensino para ajudar nesse processo, e o uso de ferramentas computacionais se tornou um campo de pesquisa. A questão principal é entender como a interação com a máquina, ao permitir a realização de construções e ações mentais, influencia o aprendizado e contribui para o desenvolvimento de novos conhecimentos. Esta pesquisa propôs uma abordagem didática usando um ambiente de geometria dinâmica, com o objetivo de ajudar os alunos a evoluírem do pensamento empírico para o hipotético-dedutivo. A proposta se baseou nas teorias de Piaget e nas situações didáticas em matemática, desenvolvidas pela escola francesa. As atividades de ensino foram divididas em três etapas: no primeiro nível, buscou-se que os alunos entendessem o significado e a necessidade da demonstração por meio de construções geométricas; no segundo, o foco foi o desenvolvimento das primeiras habilidades de demonstração; e no terceiro, os problemas exigiram mais capacidade cognitiva para lidar com figuras geométricas, com ênfase nas extensões de desenho e nas operações que sustentam a argumentação dedutiva. A análise dos trabalhos dos alunos depois da aplicação da metodologia mostrou um avanço expressivo na construção do conhecimento geométrico como modelo matemático.

A pesquisa seguiu com a leitura dos documentos governamentais oficiais que norteiam o Ensino de Matemática no Brasil, a saber: a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Também foram estudados outros importantes referenciais, como, por exemplo, o livro *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática* (Giraldo, Caetano, Mattos, 2012), que apresenta propostas de ensino de Matemática utilizando ferramentas computacionais e tem um capítulo especialmente dedicado à Geometria Dinâmica.

## **4.2 Considerações sobre o ensino de Funções**

Nesta primeira seção trataremos brevemente sobre a evolução do conceito de função na história da Matemática.

### **4.2.1 O Conceito de Função**

A história do conceito de função mescla-se com a história das primeiras contagens. Segundo Eves (2011), há evidências arqueológicas de que as primeiras contagens ocorreram há pelo menos 50.000 anos. O autor aponta como provavelmente nasceu o conceito de função quando ainda nem os números tinham sido criados:

Com a evolução gradual da sociedade, tornaram-se inevitáveis contagens simples. Uma tribo tinha que saber quantos eram seus membros e quantos eram

seus inimigos e tornava-se necessário a um homem saber se seu rebanho de carneiros estava diminuindo. É provável que a maneira mais antiga de contar se baseasse em algum método de registro simples, empregando o princípio da correspondência biunívoca. Para uma contagem de carneiros, por exemplo, podia-se dobrar um dedo para cada animal. Podia-se também contar fazendo-se ranhuras no barro ou numa pedra, produzindo-se entalhes num pedaço de madeira ou fazendo-se nós numa corda. (EVES, 2011, p. 25, 26)

Assim, o ato de fazer uma correspondência um a um, isto é, uma bijeção, entre um conjunto de carneiros e por exemplo, um conjunto de nós numa corda, talvez tenha sido o embrião do conceito de função.

Do ponto de vista formal da Matemática, segundo Eves (2011), o conceito de função foi observado primeiramente nos trabalhos de Leibniz em 1694, a fim de representar qualquer quantidade associada a uma curva, como as coordenadas de um ponto, ou a inclinação, ou o raio de curvatura da curva. Por volta de 1718, Johann Bernoulli e, depois, Leonard Euler consideraram função como qualquer expressão ou fórmula que apresentasse alguma variável e algumas constantes. No final do século XVIII, as pesquisas de Joseph Fourier sobre a propagação do calor utilizavam determinadas séries trigonométricas, que levaram Dirichlet a uma definição mais ampla, a fim de englobar essas formas de relação.

No período moderno o conceito de função foi apresentado em uma forma totalmente abstrata e direcionada para a Matemática pura. Eves (2011) afirma que vários matemáticos contribuíram para a construção do conceito de função, dentre eles: Descartes, Galileu Galilei, Euler, Newton, Dedekind, Cauchy e Joseph Fourier. Dentre todas as contribuições destes, a definição apresentada por Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) é considerada a que mais se assemelha a que temos hoje. Dirichlet chegou ao seguinte resultado:

Uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis  $x$  e  $y$  estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a  $x$ , corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a  $y$ , então se diz que  $y$  é uma função (unívoca) de  $x$ . A variável  $x$ , à qual se atribuem valores à vontade, é chamada variável independente e a variável  $y$ , cujos valores dependem dos valores de  $x$ , é chamada variável dependente. Os valores possíveis que  $x$  pode assumir constituem o campo de definição da função e os valores assumidos por  $y$  constituem o campo de valores da função. (EVES, 2011, p. 661)

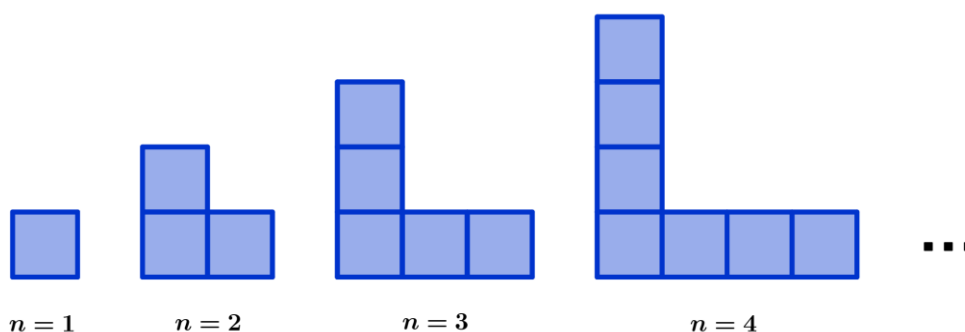
Eves (2011) ressalta que a definição de Dirichlet é abrangente e enfatiza a relação entre dois conjuntos de números. Afirma que em decorrência disto não há necessidade de apresentarmos qualquer forma de expressão analítica para a relação que há entre  $x$  e  $y$ . Ainda, segundo o mesmo autor, uma nova definição de função foi apresentada no século XX, definição esta que se baseava na linguagem da Teoria dos Conjuntos. Desta forma, a relação não se restringe apenas a conjuntos numéricos, mas conjuntos de elementos quaisquer. Essa mudança trouxe um maior enfoque à linguagem da álgebra abstrata. Assim, segundo a Teoria dos Conjuntos, uma função  $f$  é um conjunto qualquer de pares ordenados de elementos, pares esses que satisfazem a seguinte condição:

Se  $(a_1, b_1) \in f$ ,  $(a_2, b_2) \in f$  e  $a_1 = a_2$ , então  $b_1 = b_2$ . O conjunto  $A$  dos primeiros elementos dos pares ordenados chama-se domínio da função e conjunto  $B$  de todos os segundos elementos dos pares ordenados se diz imagem da função. Assim, uma função é simplesmente um tipo particular de subconjunto do produto cartesiano  $A \times B$ . (EVES, 2011, p. 661).

Assim, a definição de Dirichlet representou um avanço significativo na formalização do conceito de função, alinhando-se mais estreitamente com a abordagem moderna adotada na matemática contemporânea.

Segundo Santos e Barbosa (2017), o trabalho docente de conceituar funções reais de variável real envolve as diversas maneiras de expressar o conceito de função e vai muito além de sua definição formal. É possível, por exemplo, transmitir essa ideia por meio de generalizações, mesmo sem usar explicitamente o termo função. Isso pode acontecer nos primeiros anos do Ensino Fundamental, quando se trabalha com a identificação de padrões ou regras em seqüências. A seguir, a Figura 1 apresenta uma das formas de comunicação desse conceito.

Figura 1 – Exemplo de seqüência de ilustrações em forma de L.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A sequência apresentada na Figura 1 representa uma atividade na qual é possível identificar um padrão geométrico: a partir da segunda imagem, cada nova ilustração acrescenta dois quadrados a mais em relação à anterior. Se busca que o aluno tente fazer a generalização do número de quadrados em uma ilustração, de acordo com o número  $n$ , que representa a ordem da ilustração. Mesmo sem indicar que esta correspondência se trata de uma função, a expressão  $f(n) = 2n - 1$  representa o número de quadrados procurado.

As formas mais recorrentes de comunicar o conceito de função ocorrem por meio de: expressões algébricas, tabelas, gráficos, diagramas e o conceito mais intuitivo de “máquina de entrada e saída”, ou “máquina de transformação” (Santos; Barbosa, 2017).

A utilização da metáfora da máquina de transformação para explicar o conceito de função no ensino oferece uma perspectiva mais acessível e intuitiva para os alunos, conectando a matemática com situações que podem ser mais facilmente compreendidas no cotidiano. Ao associar a função a um processo mecânico ou automatizado, os estudantes podem visualizar de maneira concreta como um valor de entrada é alterado de acordo com uma regra definida, resultando em um valor único de saída. Essa abordagem visa tornar a abstração matemática mais tangível, simplificando a compreensão de conceitos que podem parecer complexos à primeira vista.

Na figura 2 temos a ilustração de uma “máquina” de dobrar presente no livro didático Matemática: contexto & aplicações. O autor ressalta que os resultados obtidos são determinados pelos valores inseridos na “máquina”, ou seja, os resultados dependem diretamente dos números que foram colocados nela.

Figura 2 - A “máquina” de dobrar.



Fonte: DANTE (2016).

Ao associar o conceito de função a uma “máquina”, fica claro que não se trata apenas de uma transformação qualquer, mas de uma transformação específica, regida por uma regra determinística. A ideia de que uma entrada sempre gera uma saída única reforça a noção de que as funções são relações bem definidas, onde cada elemento do

conjunto de entrada (domínio) é relacionado a um único elemento do conjunto de saída (imagem). Essa metáfora também permite que os alunos compreendam de maneira mais concreta a ideia de que uma função pode ser vista como uma transformação entre dois conjuntos distintos. Ao introduzir essa relação de forma visual e processual, os alunos começam a associar a função não apenas a uma fórmula matemática abstrata, mas a um processo contínuo de transformação e mudança. Com essa base, os conceitos de domínio e imagem podem ser facilmente introduzidos. O domínio, ou conjunto de entrada, é o conjunto de elementos que "alimentam" a máquina, enquanto a imagem, ou conjunto de saída, é o conjunto de valores que resultam desse processo de transformação. Essas definições são essenciais para caracterizar formalmente uma função e permitem uma análise mais profunda sobre como as funções operam dentro de um determinado contexto matemático. Essa abordagem, ao simplificar e contextualizar a teoria das funções, oferece aos alunos uma forma eficaz de começar a explorar as relações funcionais e suas aplicações em diversas áreas do conhecimento.

Nas propostas didáticas apresentadas no capítulo 7, ao relacionarmos áreas de figuras planas com funções, continuamos explorando a ideia de função como uma máquina. No entanto, agora ela se apresenta sob uma nova perspectiva: a de uma máquina geométrica. Nessa abordagem, suas engrenagens, as construções geométricas, serão inteiramente visíveis e produzidas pelos próprios estudantes, o que pode conferir ainda mais concretude e significado ao modelo matemático.

#### **4.2.2 Considerações nos Parâmetros Curriculares Nacionais**

Nos Parâmetros Curriculares do Ensino Médio encontramos sugestões de como iniciar o estudo do tema Ensino de Funções e de como prosseguir:

O estudo de Funções pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações: idade e altura; área do círculo e raio; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outras. [...] O estudo de Funções pode prosseguir com os diferentes modelos que devem ser objeto de estudo na escola: modelos linear, quadrático e exponencial. (BRASIL, 2002a, p. 72)

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (2006), o ensino da função quadrática pode ganhar mais significado quando parte de contextos reais ou problemas aplicados. Um exemplo clássico é a busca por um ponto de máximo, como nos problemas que envolvem a determinação de áreas máximas. No estudo da função quadrática, é essencial explorar

suas principais características, como a concavidade do gráfico, a posição do vértice (que representa o ponto de máximo ou mínimo da função), os valores dos zeros (ou raízes) e o comportamento da parábola em relação ao eixo  $y$ . Essa abordagem deve ser feita de forma investigativa, promovendo a construção de significados e incentivando o aluno a perceber como a variação dos coeficientes da expressão algébrica influencia a forma e a posição do gráfico. A utilização da forma canônica ou fatorada da função, expressa por  $f(x) = a \cdot (x - m)^2 + n$ , com  $a$  não nulo, pode ser um recurso pedagógico poderoso. Essa forma destaca de maneira clara as coordenadas do vértice da parábola, o ponto  $(m, n)$ , e permite uma interpretação mais direta da transformação da função quadrática em relação à função  $f(x) = x^2$ . A visualização do gráfico se torna mais acessível e favorece a compreensão da influência de cada parâmetro na função: o coeficiente  $a$  altera a concavidade e o "alargamento" ou "estreitamento" da parábola, enquanto  $m$  e  $n$  indicam deslocamentos horizontais e verticais, respectivamente. Além disso, é pertinente inserir no estudo a dedução da fórmula resolutiva da equação quadrática, mostrando não apenas como aplicá-la, mas também como ela é obtida por meio da técnica de completar quadrados. Isso contribui para que o aluno compreenda a lógica por trás do procedimento e perceba que as fórmulas matemáticas surgem como resultados de processos que podem ser compreendidos e reconstruídos. É também importante apresentar a parábola não apenas como um gráfico de função, mas também como um objeto geométrico. Nesse sentido, a associação entre o gráfico da função quadrática e a definição geométrica da parábola – o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto fixo (o foco) e de uma reta (a diretriz) – amplia o repertório do aluno, favorece a ligação entre aspectos algébricos e geométricos e enriquece a compreensão sobre as conexões entre diferentes representações matemáticas. Essa abordagem integrada e contextualizada tende a aprofundar e solidificar o conhecimento do estudante sobre funções quadráticas.

Quanto à construção de gráficos de funções, Brasil (2006) indica que, sempre que possível, deve ser um processo para além da simples reprodução de dados numéricos. É fundamental que o traçado dos gráficos seja guiado por uma compreensão mais ampla e profunda da relação entre as variáveis envolvidas, especialmente no que diz respeito às tendências de crescimento ou decréscimo da função. Esse olhar global permite identificar padrões, comportamentos gerais e possíveis exceções, contribuindo de forma significativa para a interpretação e análise das funções. Limitar-se à transcrição direta de dados retirados de uma tabela pode resultar em uma visão superficial. Embora os valores

numéricos sejam úteis para definir pontos específicos, eles não revelam, por si só, o dinamismo da função ao longo do tempo ou em diferentes intervalos do domínio. Quando o foco está apenas na construção mecânica do gráfico, perde-se a oportunidade de refletir sobre as causas e implicações do comportamento da função tais como a existência de máximos, mínimos, intervalos de crescimento ou concavidade. Portanto, é essencial que o processo de elaboração de gráficos seja acompanhado de uma análise qualitativa da função, favorecendo uma representação que seja não apenas precisa, mas também significativa.

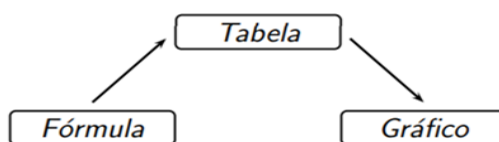
Quanto às funções trigonométricas, Brasil (2006) salienta a importância dos estudantes compreenderem com clareza a transição conceitual entre o uso do seno e do cosseno no contexto do triângulo retângulo, onde essas razões trigonométricas são inicialmente definidas a partir da relação entre os lados do triângulo e os ângulos agudos, com medidas em graus, e sua redefinição mais ampla no contexto das funções trigonométricas no círculo trigonométrico. Neste segundo caso, o seno e o cosseno passam a ser entendidos como as coordenadas ( $y$  e  $x$ , respectivamente) de um ponto que se desloca sobre a circunferência de raio unitário, à medida que descreve um arco cuja medida é dada em radianos. Essa generalização amplia o domínio das funções seno e cosseno para todos os números reais, e não apenas para os ângulos entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ . Compreender essa ampliação é essencial para que os alunos desenvolvam uma visão mais profunda das funções trigonométricas, percebendo que elas não se limitam ao triângulo, mas que fazem parte de um conjunto de funções periódicas que descrevem comportamentos cíclicos encontrados frequentemente em fenômenos naturais, como a oscilação de um pêndulo e outros contextos físicos, como ondas sonoras, movimento circular etc. Além disso, é importante que os estudantes sejam incentivados a construir e analisar os gráficos das funções seno e cosseno, observando características como a periodicidade, amplitude, frequência, deslocamentos horizontais e verticais. Nesse processo, deve-se enfatizar que, ao utilizar expressões como  $f(x) = \text{sen}(x)$ , a variável  $x$  representa uma medida de arco (ou seja, uma medida angular em radianos), e não simplesmente um ângulo em graus, como inicialmente aprendido no contexto do triângulo retângulo. Além desses aspectos, o texto ressalta que no processo de ensino-aprendizagem, é recomendável dar ênfase às funções trigonométricas básicas: seno, cosseno e tangente, e tratar as demais funções trigonométricas, com menor prioridade, abordando-as de maneira complementar, quando necessário.

#### 4.2.3 Considerações sobre o ensino de Funções no livro Recursos Computacionais.

O livro Recursos Computacionais no Ensino de Matemática (Giraldo, Caetano e Mattos, 2012) foi elaborado como material didático para o PROFMAT, com a intenção de abordar o uso pedagógico de tecnologias digitais no ensino de Matemática na educação básica. Em vez de seguir o formato de um guia técnico ou tutorial de softwares, a obra propõe uma análise crítica das possibilidades e limitações dessas ferramentas no contexto educacional, com foco na reflexão sobre sua aplicação didática. A proposta central é que o uso do computador no ensino de Matemática deve ampliar as formas de ensinar e aprender, superando a ideia de apenas tornar as atividades mais interessantes. O conteúdo está organizado a partir de atividades modelo, que são discutidas quanto aos seus objetivos, aos conceitos matemáticos envolvidos, ao papel desempenhado pelos recursos digitais, às suas vantagens e aos possíveis desafios que podem surgir em sala de aula. Longe de ser um catálogo pronto de atividades, o livro busca oferecer fundamentos teóricos e metodológicos para que o professor possa criar propostas próprias, considerando sua realidade de ensino. Embora tenha sido concebido inicialmente para atender ao mestrado do PROFMAT, o material também é relevante em outras iniciativas de formação docente, promovendo reflexões mais amplas sobre o ensino da Matemática. Por estas razões esta obra foi escolhida como parte do referencial teórico desta dissertação.

Sobre o ensino de funções reais de variável real, os autores Giraldo, Caetano e Mattos (2012) enfatizam que as principais formas de representação empregadas são: algébricas (fórmulas), gráficas (gráficos) e numéricas (tabelas). No entanto, é dada uma grande ênfase para as fórmulas e procedimentos algébricos de forma que muitos alunos só entendem como função aquilo que tem uma fórmula. Dessa forma outros aspectos importantes são deixados de lado. Tradicionalmente os alunos são incentivados a partir de uma fórmula dada, construir uma tabela por substituição de valores e depois marcar os pontos correspondentes no plano cartesiano e, por fim, ligar esses pontos obtendo um esboço do gráfico.

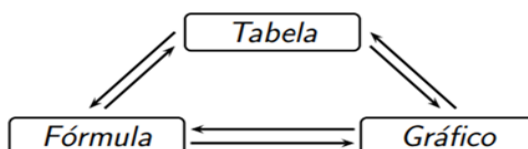
Figura 3 - Representações para funções na escola: relações limitadas.



Fonte: Giraldo, Caetano, Mattos (2012)

Essa forma limitada de encadeamento das representações pode ser enriquecida se criarmos outras articulações entre as distintas representações, conforme esquema representado na figura abaixo:

Figura 4 - Representações para funções na escola: completando articulações.



Fonte: Giraldo, Caetano, Mattos (2012).

Segundo Giraldo, Caetano e Mattos (2012), os ambientes de Geometria Dinâmica proporcionam ferramentas adequadas para explorar as relações de dependência funcional em construções geométricas, ou seja, situações em que certos elementos são funções de outros, como por exemplo, um quadrado e seu círculo inscrito. Ao construirmos um quadrado e seu círculo inscrito, podemos observar que a medida do raio do círculo inscrito é função da medida do lado do quadrado. Ainda, segundo o autor, no ensino básico, geralmente, essas construções não são abordadas em sala de aula. No entanto, consistem em abordagens enriquecedoras do conceito de função, pois possibilitam a investigação por parte dos alunos. Dessa forma é possível estabelecer uma conexão entre dois campos da Matemática distintos: Geometria e Funções. Sobre esta integração, Victor Giraldo evidencia:

(...) Destacamos a possibilidade viabilizada por ambientes computacionais, de acrescentar um ingrediente dinâmico às representações algébricas e gráficas usualmente empregadas em sala de aula do ensino médio. Entretanto as potencialidades de aplicação de ambientes de geometria dinâmica no ensino de funções vão mais além: é possível integrar à abordagem tradicional novas formas de relacionar as representações gráficas e algébricas usuais, e ainda outras formas de representação, diferentes das usuais. Nesse sentido propomos a exploração dinâmica da variação de funções que exprimem grandezas geométricas, antes mesmo de traçar seus gráficos, e o traçado dos gráficos diretamente a partir das construções geométricas, sem a mediação de expressões algébricas ou tabelas. (GIRALDO, 2012, p.40)

O autor ainda enfatiza que a resolução de problemas modelados por funções reais se constitui como ferramenta poderosa para incentivar o pensamento intuitivo sobre a variação dessas funções. E este representa o primeiro passo de uma investigação: o lançamento de uma hipótese. Ao contrário do esquema fórmula → tabela → gráfico que pode ser mecanizado e gerar pouca reflexão, a abordagem do ensino de funções reais por meio de Geometria Dinâmica pode induzir o desenvolvimento da ideia intuitiva de variação.

### 4.3 Considerações sobre o ensino de Geometria

Nesta seção, abordaremos o ensino de Geometria, destacando a importância de superar a mera memorização de definições e teoremas, priorizando o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo e a construção do conhecimento por meio de investigações e argumentações.

#### 4.3.1 Considerações nos Parâmetros Curriculares Nacionais

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, o ensino da Matemática não deve se limitar à memorização de postulados e demonstrações, mas deve proporcionar ao estudante a compreensão de como essa ciência estrutura, valida e comunica seus conhecimentos. Além disso, é essencial promover o desenvolvimento do pensamento lógico-dedutivo e dos aspectos mais formais de sua linguagem. Em geral, considerar uma proposição como “verdadeira” em Matemática implica demonstrar que ela é uma consequência lógica derivada de outras proposições previamente estabelecidas.

Nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio temos a seguinte afirmação sobre o saber geométrico:

O processo de provar em Matemática seria uma tarefa impossível de marchar para trás indefinidamente, a não ser que se estabelecesse um ponto de partida. Esse ponto inicial deve conter um certo número de afirmações, chamadas de postulados ou axiomas, que devem ser aceitas como verdadeiras e para as quais não se exige nenhuma prova. Toda vez que um campo do conhecimento se organiza a partir de algumas verdades eleitas, preferivelmente poucas, simples e evidentes, então se diz que esse campo está apresentado de forma axiomática. Esse é o caso, por exemplo, da geometria clássica. (BRASIL, 2002b, p.124).

O trecho acima citado esclarece que a Geometria e mais amplamente a Matemática, são sistemas axiomáticos, estruturados em uma hierarquia de proposições, teoremas e postulados, e que o conhecimento a ser construído não deve ser baseado em mera memorização destes resultados, mas no desenvolvimento da capacidade dedutiva e da

habilidade de argumentação. É ressaltada a importância da dedução lógica no processo de construção destes saberes, aspecto este que nem sempre é atendido no ensino básico.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio identificam os objetivos básicos do ensino de Geometria, destacando novamente a importância que a construção da argumentação dedutiva tem neste campo do saber:

O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos – a geometria que leva à trigonometria e a geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes. (BRASIL, 2006, p. 75)

O texto ainda vai além, esclarecendo que determinados conceitos anteriormente estudados no ensino fundamental agora devem ser novamente abordados, desta vez de maneira mais aperfeiçoada, de forma a solidificar os conhecimentos geométricos dos estudantes. Evidenciamos que todos os temas descritos fazem parte da base de conhecimentos trabalhados em nossa proposta didática, cujas atividades são detalhadas no capítulo 7 deste trabalho.

#### **4.3.2 Considerações na tese: Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**

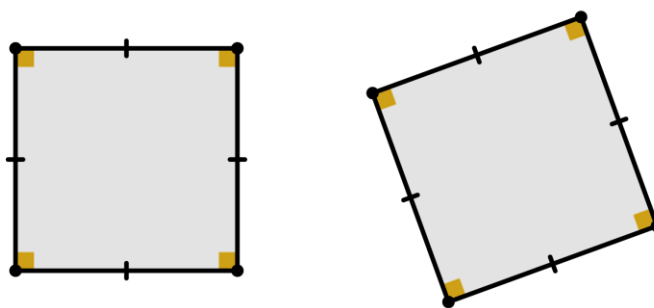
A citação seguinte critica uma abordagem reducionista da geometria que confunde representação com conceito. Gravina (2001) propõe uma distinção importante entre o aspecto figural (a imagem) e o aspecto conceitual (as propriedades abstratas). Ao tomar o desenho como o conceito, corre-se o risco de limitar a compreensão do que realmente define uma figura geométrica. A autora aponta que as dificuldades surgem porque costumamos tomar desenhos prototípicos como se fossem a única expressão válida da figura. Isso reforça a crítica de que há uma limitação na forma como essas figuras são apresentadas e compreendidas: outras variações possíveis da figura são ignoradas, o que empobrece a compreensão do conceito. Gravina (2001) esclarece que um desenho é apenas um exemplo específico, uma instância do conceito mais amplo. A dificuldade está em fazer com que os estudantes entendam essa abstração. Ou seja, o aspecto visual da figura (o "figural") tem uma generalidade - ele pertence a um conjunto de possibilidades,

mas essa generalidade só faz sentido se for guiada pelo componente conceitual (a definição e as propriedades abstratas da figura). Sobre isso, a autora destaca:

A origem dessas dificuldades reside nos desenhos prototípicos, inadequadamente tomados como a expressão do componente figural (outras possíveis expressões normalmente não são consideradas) e nos quais, de fato, são procedentes as propriedades depreendidas. A dificuldade está em entender que um dado desenho nada mais é do que uma instância particular do componente figural, guardando, portanto, uma generalidade no seu aspecto figural, controlada pelo componente conceitual. (GRAVINA, 2001, p. 61)

Gravina (2001) alerta para o risco de confundir representações específicas com o conceito geral que elas pretendem ilustrar. Quando usamos um desenho como exemplo de um conceito, devemos lembrar que ele é apenas uma instância e não a totalidade do conceito. A compreensão verdadeira ocorre quando conseguimos articular o que é visto (figural) com o que é pensado (conceitual). A autora aponta o problema de usar desenhos prototípicos como se eles fossem a representação total da ideia que se quer transmitir. A limitação ocorre porque outras formas de representar o mesmo conceito muitas vezes são ignoradas. Isso reduz a compreensão do conceito a uma forma visual única e não à sua essência mais abstrata. Por exemplo, um quadrado desenhado de forma que seus lados não sejam horizontais e verticais muitas vezes não é reconhecido pelos estudantes como um quadrado, pois não é desta forma que os professores e livros didáticos costumam representá-lo. A Figura 5 ilustra essa situação.

*Figura 5 - Quadrado na forma prototípica (esq.) e não prototípica (dir.)*



*Fonte: Elaborado pelo autor (2025).*

Dessa forma, fica evidente que o não reconhecimento da figura se dá pelo fato do conceito de quadrado (quatro lados congruentes e quatro ângulos congruentes) não estar solidificado na compreensão do estudante, que está baseando-se apenas no aspecto figural. Assim, o aspecto visual do desenho tem um potencial de generalidade, mas esse

potencial só se concretiza se for guiado pela compreensão conceitual correta. É o conceito que "controla" o sentido da figura, e não o contrário.

Gravina (2001) afirma que o entendimento formalizado da Geometria (aquele presente nos livros, nos teoremas) não acontece de forma espontânea. Ou seja, é um processo que necessita ser cultivado, requer mediação, esforço e a construção de uma base de conhecimentos ao longo do tempo. A aprendizagem em Geometria, especialmente a formal, requer que o aluno pense, experimente, construa imagens mentais, compare, generalize. Não basta observar figuras ou decorar fórmulas: é preciso elaborar os conceitos mentalmente, com profundidade.

Na Teoria Construtivista de Piaget as abstrações são categorizadas da seguinte forma: (1) Abstrações empíricas: São aquelas que surgem da experiência concreta, da manipulação de objetos, do contato direto com figuras, modelos, materiais. (2) Abstrações reflexionantes: são mais complexas; ocorrem quando o aluno começa a refletir sobre suas próprias ações e operações mentais. É um passo além da simples experimentação. (3) Abstrações pseudo-empíricas: Referem-se a abstrações que parecem vir da experiência sensível, mas na verdade são reconstruídas mentalmente com base em experiências anteriores. Ou seja, são empíricas apenas na aparência; internamente, o aluno já está operando com conceitos mais refinados.

Figura 6 - Estruturas Lógicas e funcionamentos cognitivos



Fonte: Gravina (2001, p. 25).

Gravina (2001) esclarece sobre o desenvolvimento do pensamento matemático formal, aquele que caracteriza a Geometria enquanto sistema dedutivo: parte-se de hipóteses e constrói-se deduções lógicas. E isso só é possível quando o aluno deixa de depender exclusivamente da experiência concreta (abstração empírica) e começa a operar com estruturas mentais abstratas e relações formais (abstrações reflexionantes). Sobre esta temática, a autora explica:

Não resta dúvida: chegar a *construtos geométricos individuais* em sintonia com os objetos cristalizados na geometria não é um processo natural. Depende, e muito, das ações e elaborações mentais dos alunos e, pela natureza deste conhecimento, as elaborações exigem tanto *abstrações empíricas* como *abstrações reflexionantes* – essas, em especial, na forma particular de *abstrações*

*pseudo-empíricas*. É com a subordinação, crescente, das primeiras pelas últimas, que instala-se o pensamento hipotético-dedutivo. (GRAVINA, 2001, p. 63)

Gravina (2001) destaca que a construção de objetos geométricos, algo que poderia tornar o aprendizado mais significativo, era pouco incentivada nos livros escolares. Construir figuras geométricas exige que o aluno pense nas propriedades, nas relações e nas definições envolvidas. Ou seja, é uma atividade que naturalmente leva à compreensão mais profunda dos conceitos. Além disso, havia também a ausência de questões abertas, aquelas que promovem o pensamento crítico e investigativo. Quando o ensino se limita a exercícios mecânicos e repetições, perde-se a oportunidade de formar alunos que realmente entendam e saibam aplicar a Geometria em diferentes contextos. Promover a construção de objetos geométricos e suas investigações não resulta apenas em tornar as aulas mais dinâmicas. Trata-se de ensinar geometria de maneira significativa. Incentivar a exploração e a formulação de perguntas é um caminho eficaz para o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento matemático dos estudantes. Gravina (1996) afirma que:

O aspecto de construção dos objetos geométricos raramente é abordado; dificilmente encontramos no livro escolar a instrução “construa”, e no entanto esta é uma das atividades que leva o aluno ao domínio de conceitos geométricos. Mais difícil ainda é encontrar questões do tipo “o que podemos dizer nesta situação?” ou “que regularidades percebemos?”, onde estratégias de investigação devem ser estabelecidas. (p. 2)

A autora apresenta uma definição clara e didática do processo de dedução no contexto da Geometria, destacando a importância tanto do raciocínio lógico quanto da representação visual (o desenho) na construção do conhecimento matemático. A dedução é apresentada como um processo estruturado, em que partimos de hipóteses (ou axiomas, definições, propriedades conhecidas) para chegar a conclusões (teses). Esse processo é fundamental no pensamento matemático, pois garante a validade e a coerência das conclusões com base em premissas previamente aceitas ou demonstradas. A autora ressalta que não se trata de um raciocínio qualquer, mas sim de um encadeamento que respeita regras formais, o que confere à matemática seu caráter rigoroso e objetivo. Em Geometria, em especial, a figura não é apenas ilustração: ela é baseada em conceitos e propriedades, e pode ajudar o estudante a identificar relações, testar hipóteses, e verificar coerências, até que este alcance o pensamento abstrato. Em resumo, a dedução é valorizada como uma ferramenta central da matemática e o desenho de figuras

geométricas é reconhecido como um aliado importante no ensino da Geometria, por sua capacidade de tornar visível aquilo que está sendo analisado logicamente.

Deduzir uma propriedade significa estabelecer uma cadeia lógica de raciocínios conectando propriedades do enunciado tomadas como pressupostos (hipóteses) às propriedades ditas decorrentes (teses). Esta cadeia de raciocínios que denominamos de argumentação lógica e dedutiva. O desenho entra aqui como materialização da configuração geométrica, guardando as relações a partir das quais decorrem as propriedades. (GRAVINA, 1996, p. 3)

Em Geometria, o processo de argumentação lógica e dedutiva é particularmente visual. As relações entre pontos, retas, ângulos e demais elementos presentes nas figuras são expressas por meio de desenhos que ilustram as configurações estudadas. O desenho geométrico, nesse sentido, não é apenas um apoio visual, mas uma ferramenta essencial de raciocínio. Ele permite observar padrões, levantar conjecturas e, muitas vezes, perceber relações que nem sempre são imediatamente evidentes por meio do texto. Por exemplo, ao analisar um triângulo isósceles, a simetria percebida no desenho pode sugerir que os ângulos da base são congruentes, e esta é uma propriedade aparentemente óbvia, mas que deve ser demonstrada. O desenho, então, orienta o raciocínio, mas não substitui a necessidade da prova. A habilidade de transformar uma situação descrita verbalmente em uma representação gráfica adequada é, portanto, fundamental. Essa transição entre registros é o que possibilita ao aluno perceber as relações que embasam as deduções. Assim, o raciocínio dedutivo e o desenho geométrico caminham juntos na construção do conhecimento em Geometria. Enquanto o primeiro garante a solidez lógica da conclusão, o segundo oferece suporte visual para o entendimento e a formulação dos argumentos.

#### 4.4 Geometria Dinâmica

No ano de 1985 um grupo de pesquisadores franceses iniciou o projeto Cabri-Géomètre<sup>1</sup>, liderados por Jean-Marie Laborde, matemático do Instituto de Informática e de Matemática Aplicada de Grenoble. Este software, de apoio ao ensino de Geometria, foi classificado como software de Geometria Dinâmica pois, ao contrário dos demais programas de desenho, permitia a criação de objetos dinâmicos, que poderiam ser controlados e movimentados na tela do computador. Em 1988 o Cabri-Géomètre começou a ganhar popularidade, pois sua primeira versão ganhou o troféu Apple de melhor

---

<sup>1</sup> Cabri-Géomètre. Groupe de recherche à l'université Joseph Fourier. Disponível em: <https://www-cabri.imag.fr/cabri2/historique.php>.

software educacional. Dessa forma, foi oferecido um ambiente computacional para o estudo e construção de figuras geométricas, imitando digitalmente o que antes só era possível fazer com régua e compasso no papel.

Segundo Paulo Cezar P. Carvalho, em sua palestra no 25º Colóquio Brasileiro de Matemática (25º CBM [...], 2018), os softwares de Geometria Dinâmica permitem trabalhar, em síntese, com construções geométricas dentro de um ambiente virtual. É apresentado um menu de construções baseado nos elementos da Geometria Euclidiana. Então é possível trabalhar com as construções geométricas clássicas. Segundo Carvalho, se bem analisarmos o repertório dessas construções, percebe-se que ele é bastante reduzido. Com régua e compasso, as operações básicas são:

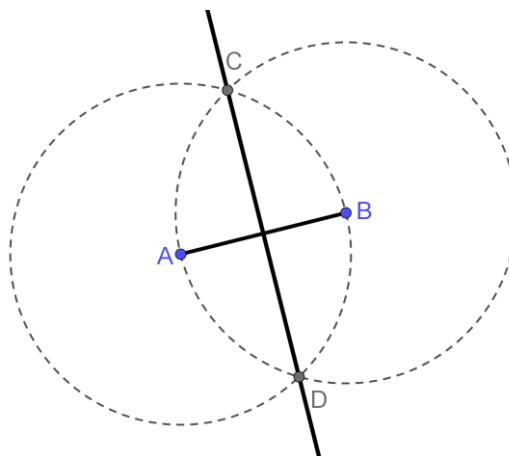
1. Dados dois pontos, podemos traçar a reta que passa por eles.
2. Dado um centro e um raio, ou um ponto de passagem, podemos traçar um círculo.
3. E, a partir da interseção entre retas e círculos, podemos definir novos pontos.

Essas interseções são fundamentais, porque permitem criar novos pontos para serem usados em construções futuras. Assim, todo o desenho geométrico se baseia essencialmente nessas três ações: traçar retas, traçar círculos e usar interseções. Basicamente, qualquer software de Geometria Dinâmica oferece três operações principais, representadas por três botões. O restante são atalhos, que nada mais são do que sequências dessas construções básicas, usadas para agilizar o trabalho e torná-lo menos cansativo (25º CBM [...], 2018).

Por exemplo, vamos ilustrar os passos de uma construção da mediatriz de um segmento.

1. Primeiro, usamos a ferramenta ponto para criar dois pontos.
2. Depois, usamos a ferramenta reta (ou segmento, ou semirreta - o software diferencia esses elementos).
3. A partir do segmento criado, usamos a ferramenta "compasso". No caso digital, o compasso é simulado por um círculo com raio maior do que ou igual à metade comprimento do segmento. Traçamos dois círculos com centros nos extremos do segmento e raios de mesma medida. A fim de facilitar o processo, escolhemos para o raio a medida do próprio segmento.
4. As interseções entre esses círculos nos dão dois pontos. Traçando uma reta por esses dois pontos, temos a mediatriz.

Figura 7 - Construção da Mediatriz de um segmento.



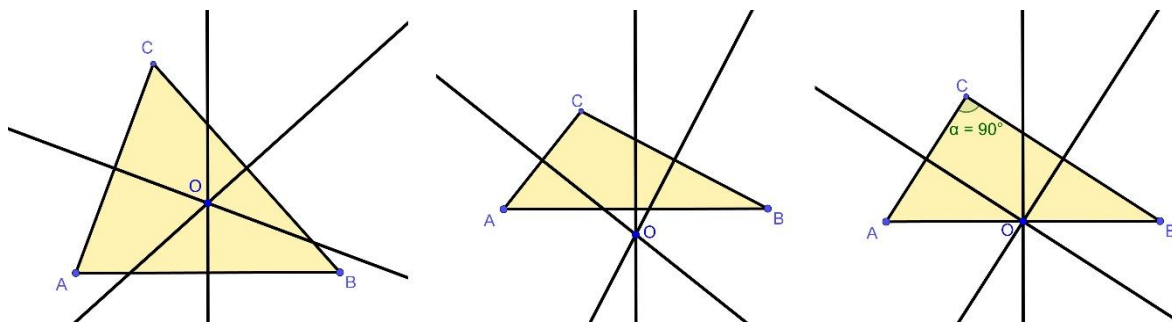
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Se movimentarmos qualquer uma das extremidades do segmento, toda a construção se ajusta automaticamente. Esse é o aspecto dinâmico: cada elemento da construção está ligado logicamente aos elementos anteriores. É essa interatividade que diferencia a Geometria Dinâmica das construções com régua e compasso no papel. Neste sentido há uma vantagem dada pelo ambiente computacional: a possibilidade de explorar a variação dos elementos iniciais sem a necessidade de ter que refazer toda a construção.

Mesmo diante das facilidades oferecidas pelos softwares de Geometria Dinâmica, é importante que os alunos também manipulem os instrumentos físicos, vivenciem essa experiência concreta. O que a Geometria Dinâmica oferece é outra dimensão: ela permite experimentação e manipulação rápida, o que é especialmente útil quando queremos explorar padrões ou formular conjecturas (25º CBM [...], 2018).

Vamos exemplificar novamente. Consideremos um triângulo qualquer dado por seus vértices e vamos construir as mediatrizes de seus lados. Ao fazermos a construção, percebemos que elas se encontram em um único ponto - o circuncentro do triângulo. Este é um fato que requer demonstração e os estudantes podem ser instigados a elaborá-la. Quanto à construção geométrica, podemos fazê-la com régua e compasso, ou utilizando um software de Geometria Dinâmica. Com o software, podemos usar a ferramenta "mediatriz" diretamente, selecionando os segmentos desejados.

Figura 8 - Circuncentro em triângulos Acutângulos, Obtusângulos e Retângulos

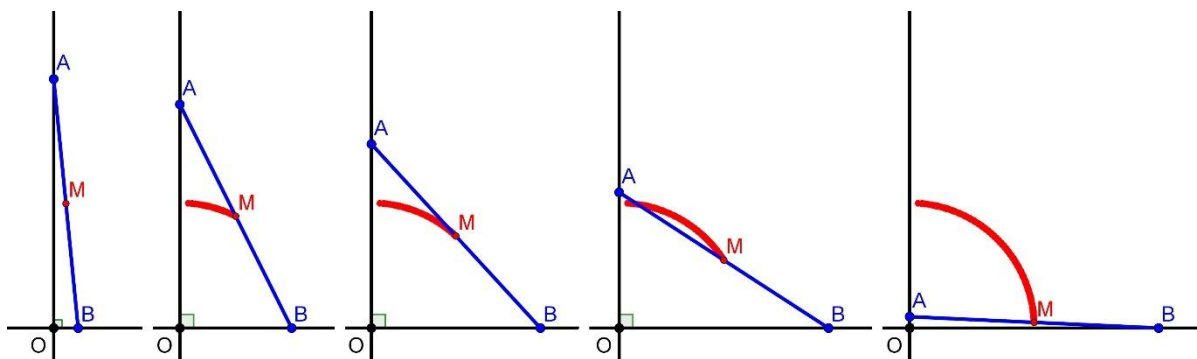


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Desta forma o estudante pode perceber que o circuncentro existe em qualquer triângulo. E mais: permite observar que, em triângulos acutângulos o circuncentro é interno ao triângulo, que em triângulos obtusângulos, esse ponto é externo ao triângulo e que em triângulos retângulos este ponto coincide com o ponto médio da hipotenusa. Fazendo a construção com régua e compasso no papel, o aluno dificilmente veria todos estes fatos com clareza. A ferramenta permite fazer uma única construção e, a partir dela, testar infinitas variações, apenas movendo os vértices do triângulo.

Outra grande vantagem oferecida pelos softwares de Geometria Dinâmica é a possibilidade de explorar Lugares Geométricos (25º CBM [...], 2018). Vamos a outro exemplo. Suponha que você tenha uma escada encostada em uma parede que forma um ângulo reto com o chão. Vamos representar a escada pelo segmento AB, em que A é o ponto de apoio na parede e B é o ponto de apoio no chão. A escada se move, de modo que o ponto A vai deslizando para baixo, o ponto B vai se afastando da parede e AB é um segmento de comprimento fixo (medida da escada). O que acontece com o ponto médio dessa escada? Qual é o lugar geométrico que ele descreve?

Figura 9 - Sequência: Escada que desliza apoiada em uma parede vertical



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Com o software, podemos construir esse cenário. Criamos duas retas perpendiculares (chão e parede), um ponto A que se move sobre a parede vertical, e, para

determinarmos um segmento de comprimento constante, traçamos um círculo de centro A e raio cuja medida é o comprimento da escada. Marcamos o ponto B de intersecção deste círculo com a reta horizontal que representa o chão. Assim, AB é um segmento de medida fixa. Marcamos o ponto médio M do segmento AB e ativamos o rastro desse ponto. Ao mover o ponto inicial A, vemos claramente que o ponto médio M descreve um arco de circunferência. Podemos medir a distância até a origem e verificar que ela se mantém constante. Isso nos permite formular uma conjectura de que o ponto médio descreve um arco de círculo. A prova pode vir depois - talvez com Geometria Analítica ou argumentos sintéticos. O software ajuda-nos a ter uma boa intuição antes de partir para a demonstração formal.

Segundo Gravina (2001), uma das contribuições mais significativas dos softwares de Geometria Dinâmica é a forma como eles explicitam, de maneira inédita e intuitiva, o conceito matemático de função. Durante a construção de uma figura geométrica dinâmica, certos elementos são definidos como pontos livres, ou seja, podem ser movimentados diretamente pelo usuário. Esses objetos assumem o papel de variáveis independentes. A movimentação desses elementos provoca, em tempo real, alterações nos demais objetos da construção, os objetos dependentes, cujas posições, medidas ou características variam em função dos primeiros. Assim, a relação funcional se revela na prática: existe uma correspondência entre valores assumidos pelas variáveis independentes e os resultados que essas mudanças produzem nos objetos dependentes. O dinamismo da figura, portanto, manifesta graficamente e visualmente a noção de dependência funcional. A construção deixa evidente como uma alteração em um parâmetro inicial (por exemplo, a posição de um ponto) afeta diretamente outros elementos da figura, como o comprimento de um segmento, o ângulo entre duas retas etc. Esse tipo de visualização ativa permite ao aluno compreender a função não apenas como uma fórmula abstrata, mas como um fenômeno de interdependência visível e manipulável.

*Figura 10 - Relação funcional entre objetos, armazenada pelo software.*



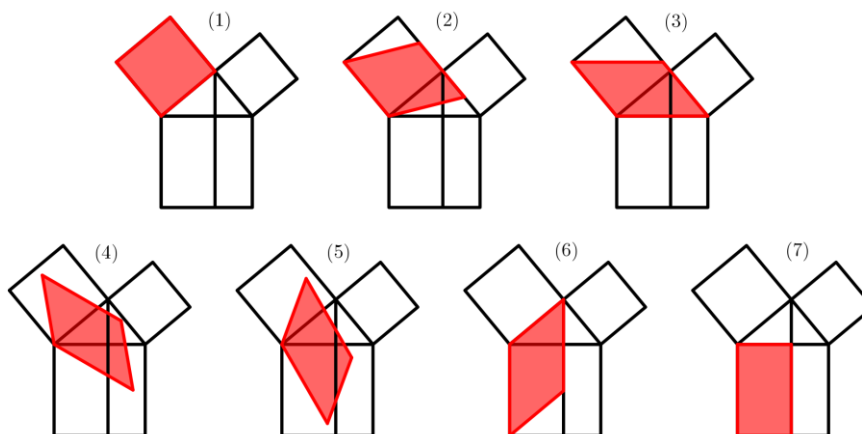
*Fonte: Gravina (2001, p. 85)*

Consultando os PCN+: Ensino Médio – orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (2002), encontramos um forte incentivo à utilização de softwares de Geometria Dinâmica:

Para o aprendizado da geometria, há programas que dispõem de régua e compasso virtuais e com menu de construção em linguagem clássica da geometria – reta perpendicular, ponto médio, mediatriz, bissetriz, etc. Feita uma construção, pode-se aplicar movimento a seus elementos, sendo preservadas as relações geométricas impostas à figura – daí serem denominados programas de geometria dinâmica. Esses também enriquecem as imagens mentais associadas às propriedades geométricas. Por exemplo: para o Teorema de Pitágoras, partindo do triângulo retângulo e dos quadrados construídos sobre seus lados, podemos construir uma família de “paralelogramos em movimento” que, conservando a área, explica por que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas construídas sobre os catetos. (BRASIL, 2006, p. 88)

Na Figura 11, temos uma sequência de sete imagens que representam etapas intermediárias do movimento dos paralelogramos.

*Figura 11 - Família de "paralelogramos em movimento", todos com mesma área.*



*Fonte: Elaborado pelo autor (2024).*

Na primeira etapa, as imagens (1), (2) e (3) representam o cisalhamento que o quadrado inicial sofreu. Nessas figuras temos paralelogramos de mesma base e mesma altura, logo possuem a mesma área. Na segunda etapa, as imagens (4) e (5) representam a rotação de  $90^\circ$  em sentido horário do paralelogramo em torno de um de seus vértices. Sendo a rotação uma isometria, os paralelogramos são figuras congruentes, logo possuem a mesma área. Na terceira etapa, as imagens (6) e (7) representam o novo cisalhamento, onde o paralelogramo toma finalmente a forma de um retângulo. Novamente temos

paralelogramos de mesma base e mesma altura, logo possuem a mesma área. Exatamente os mesmos raciocínios podem ser aplicados no quadrado construído sobre o outro cateto, e assim conclui-se o Teorema de Pitágoras.

Segundo Teixeira (2013), ambientes ou softwares de Geometria Dinâmica, têm por finalidade oferecer um meio digital que propicia a interação, a observação e a exploração, por meio de processos dinâmicos de construções geométricas que potencializam o ensino e a aprendizagem de Geometria. Por meio dos recursos computacionais oferecidos, os estudantes podem criar várias figuras, gráficos e outros objetos matemáticos, que podem ser manipulados e investigados, de forma a ampliar o conhecimento do aluno, fomentando o raciocínio matemático dedutivo e solidificando as aprendizagens em Geometria. O estudante, ao interagir com o software, realizando uma construção, pode articular conceitos, conjecturar e testar suas hipóteses, confirmando-as ou refutando-as.

O termo “dinâmico” tem ideia de movimento, e é isso que os programas de Geometria Dinâmica têm como principal ferramenta. A ferramenta que dá a dinamicidade referida é o comando arrastar. Você pode clicar num ponto da figura e movê-lo, fazendo um movimento em que há uma mudança na configuração da construção do objeto que você construiu. [...] O termo Geometria Dinâmica foi usado, inicialmente, por Nick Jakiw e Steve Rasmussen para diferenciar esses softwares dos demais softwares geométricos. Estes programas agem de forma interativa e permitem visualização, criação e manipulação de figuras geométricas com suas propriedades. (TEIXEIRA, 2013, p. 1091)

Verificamos as possibilidades de utilização dos softwares de Geometria Dinâmica na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e encontramos cinco recomendações de uso no Ensino Fundamental e três recomendações de uso no Ensino Médio. Diante das múltiplas possibilidades que os softwares de Geometria Dinâmica oferecem, as menções parecem mínimas, muitas vezes reduzidas às atividades que antes eram propostas a partir do uso de régua e compasso, ou então à utilização do software como um simples gerador de gráficos.

*Quadro 1 - Habilidades que sugerem a utilização de Geometria Dinâmica, de acordo com a BNCC.*

Habilidades – Ensino Fundamental
(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.

(EF07MA23) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica.
(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.
(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.
(EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.

*Fonte: Elaborado pelo autor a partir de BRASIL (2018).*

*Quadro 2 - Habilidades que sugerem a utilização de Geometria Dinâmica, de acordo com a BNCC.*

Habilidades – Ensino Médio
(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

*Fonte: Elaborado pelo autor a partir de BRASIL (2018).*

Analisando as competências acima destacadas, é possível observar que os softwares de Geometria Dinâmica são fortemente recomendados desde o Ensino Fundamental e representam uma nova maneira de confeccionar desenhos geométricos. No entanto, as possibilidades desses softwares vão muito além disto, como podemos observar no parágrafo abaixo, extraído do livro Recursos Computacionais no Ensino de Matemática:

Assim, em uma representação feita com papel e lápis apenas (sem nenhum outro instrumento), as propriedades dos objetos são indicadas apenas pela notação usada. Em geometria dinâmica, por outro lado, **a garantia de validade das propriedades e relações matemáticas do objeto representado é incorporada concretamente no próprio processo de construção da representação.** Desta forma, as próprias experiências de construir representações em geometria dinâmica já constituem, por si só, exercícios que demandam um maior nível de

conhecimento matemático dos objetos. Essas experiências podem ainda fornecer pistas sobre outras propriedades e relações dos objetos construídos, além daquelas que fazem parte de suas definições ou são dadas nos enunciados dos problemas, sugerindo porque estas são válidas (ou não válidas) e indicando caminhos para sua dedução. Assim, o processo de construção pode nos levar a perceber ou a conjecturar propriedades, que, evidentemente, deverão ser confirmadas ou refutadas por argumentos matemáticos. [...] (GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2012, p.114, grifo do autor.)

Da citação acima, entende-se que a Geometria Dinâmica não é apenas uma ferramenta para "desenhar melhor", mas sim uma forma de aprender fazendo, descobrir propriedades, e entender conceitos por meio da interação. Ela aproxima o estudante da prática real da matemática por meio de processos que envolvem observação, formulação de hipóteses e demonstração. Daí também se depreende que construir objetos na Geometria Dinâmica exige uma maior compreensão matemática, porque o usuário precisa saber como definir e construir os elementos corretamente. E durante esse processo, é comum que o próprio aluno descubra novas propriedades ou conjecture sobre relações que não estavam explícitas. Isso enriquece o aprendizado, pois leva à investigação e à necessidade de justificar matematicamente o que foi observado.

A mesma visão é defendida por Paulo Cezar P. Carvalho (25º CBM [...], 2018), que destaca que construir figuras em um ambiente de Geometria Dinâmica não é uma atividade meramente mecânica, mas já constitui, em si, um exercício de aprendizagem geométrica. Ou seja, ao realizar construções, o aluno é levado a pensar geometricamente, compreendendo propriedades, relações e estruturas. Esse processo exige uma sequência lógica de ações, semelhante a um algoritmo: é preciso planejar quais construções devem ser feitas primeiro, quais ferramentas utilizar e como garantir que as relações geométricas sejam preservadas. Assim, a construção demanda planejamento e estratégia, características típicas da resolução de problemas matemáticos. Desse modo, valoriza-se o processo exploratório e construtivo, e não apenas as respostas finais. A tecnologia é integrada de maneira significativa ao ensino de Geometria, promovendo o desenvolvimento do pensamento estratégico. O uso de ferramentas digitais pode ser reconhecido como uma ferramenta que potencializa o pensamento matemático, ao contrário de substituí-lo.

Sobre a questão da necessidade de demonstração ser essencial em Geometria, Paulo Cezar P. Carvalho (25º CBM [...], 2018) enfatiza que, quando um software de

Geometria Dinâmica é apresentado aos estudantes há o risco de ocorrer uma interpretação equivocada: *“Ah, então agora que temos o software, não precisamos mais demonstrar nada?”* Naturalmente a resposta para essa pergunta é negativa. A Geometria Dinâmica não substitui a demonstração. Ela é uma ferramenta de apoio, um ambiente rico para formular conjecturas, levantar hipóteses e explorar propriedades. A demonstração continua sendo essencial. A matemática não é uma ciência experimental, mesmo que o processo de descoberta envolva a experimentação. A ideia não é abandonar a prova, mas sim estimular o desejo de provar, despertado pela curiosidade de entender por que um certo padrão acontece.

#### 4.4.1 GeoGebra

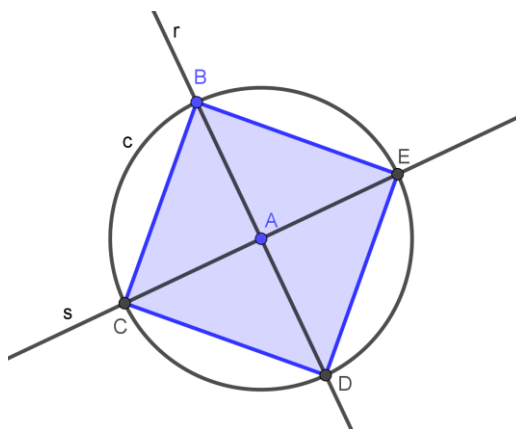
Hoje, o GeoGebra ocupa um lugar de destaque dentre os softwares de Geometria Dinâmica, pois além de ser um software livre, oferece, de forma prática, muitas ferramentas para a construção de objetos geométricos e algébricos. O processo de construção das figuras é feito por meio da linguagem natural da Geometria: pontos, retas, segmentos, retas paralelas, retas perpendiculares, círculos, transformações geométricas, são exemplos das ferramentas utilizadas. Diferentemente de quando utilizamos lápis e papel as construções geométricas realizadas nos softwares de Geometria Dinâmica nos possibilitam a manipulação das figuras que estão na tela do computador e para isso vamos arrastando pontos ou deslocando os elementos iniciais da construção (objetos livres). Essa exploração nos permite observar quais propriedades da figura construída são invariantes, isto é, que se mantêm estáveis durante o movimento. Sobre isso, os autores Gravina e Contiero (2011) explicam:

O GeoGebra e outros programas similares – os ditos softwares de geometria dinâmica - têm o interessante recurso de “estabilidade sob ação de movimento”: feita uma construção, mediante movimento aplicado aos pontos que dão início a construção, a figura que está na tela do computador se transforma quanto ao tamanho e posição, mas preserva as propriedades geométricas que foram impostas no processo de construção, bem como as propriedades delas decorrentes. (GRAVINA; CONTIERO, 2011, p. 3)

Todas as construções geométricas propostas nas sequências didáticas serão realizadas sob o princípio de estabilidade sob ação de movimento, isto é, as figuras construídas preservarão certas propriedades, mesmo que sejam transladadas. Como exemplo, podemos citar a construção de um quadrado, gerado a partir dos seguintes

passos: (1) Marcamos dois pontos quaisquer do plano: A e B. (2) Traçamos a reta  $r$  passando pelos pontos A e B. (3) Traçamos a reta  $s$  passando pelo ponto A e perpendicular à reta  $r$ . (4) Traçamos um círculo de centro A e passando pelo ponto B. (5) Marcamos as demais intersecções do círculo com as retas  $r$  e  $s$ : os pontos C, D e E. (6) Traçamos o polígono BCDE.

*Figura 12 - Quadrado construído com "estabilidade sob ação de movimento"*



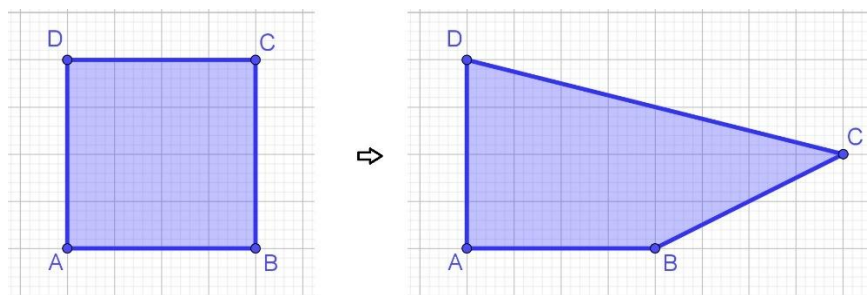
*Fonte: Elaborado pelo autor (2024).*

Mesmo que os pontos livres desta figura (A ou B) sejam movimentados, esta permanecerá sempre um quadrado, pois a perpendicularidade entre as retas  $r$  e  $s$  nos garante que as diagonais  $BD$  e  $CE$  são perpendiculares entre si. Além disso, o círculo de centro A nos garante que as diagonais  $BD$  e  $CE$  são congruentes e se interseccionam em seu ponto médio. Como consequência, o polígono BCDE assim construído fatalmente será um quadrado. Para explicar tal fato, vamos analisar os triângulos  $BAC$ ,  $CAD$ ,  $DAE$  e  $EAB$  que são todos congruentes pelo caso LAL. Assim, temos  $BC = CD = DE = EB$ , o que nos mostra que BCDE é um losango. Por outro lado, os triângulos  $BAC$ ,  $CAD$ ,  $DAE$  e  $EAB$  são retângulos e isósceles, e daí segue que seus ângulos agudos medem  $45^\circ$ . Portanto cada ângulo interno de BCDE tem por medida o dobro de  $45^\circ$ , isto é  $90^\circ$ . Dessa forma BCDE é também um retângulo e, por fim, BCDE é um quadrado.

Neste exemplo podemos observar que a forma da figura não se altera com qualquer movimento aplicado nos pontos A ou B, apenas sua posição e tamanho. Isto ocorre pois foi construída com base em propriedades que definem o quadrado, e estas se preservam intactas mediante o movimento. Ainda, segundo Gravina (2001), o mesmo não ocorreria se criássemos a mesma figura livremente no mesmo software. Caso escolhêssemos quatro vértices baseados apenas em percepção visual e criássemos um quadrado, sua forma não

seria mantida caso lhe fosse aplicado algum movimento, isto é, a figura inicial colapsaria, já que sua construção não foi baseada em propriedades geométricas.

*Figura 13 - Figura construída sem "estabilidade sob ação de movimento"*



*Fonte: Elaborado pelo autor (2025).*

Segundo Hall e Lingefjärd (2017, p. 26), o GeoGebra é um software matemático cuja interface nos possibilita trabalhar com Geometria e Álgebra simultaneamente, de forma interligada. Muitos recursos são oferecidos, como gráficos, Geometria Dinâmica plana e espacial, álgebra dinâmica e simbólica, planilhas, probabilidade, números complexos, vetores, equações diferenciais, texto dinâmico, modelagem de funções dos mais variados tipos e assim por diante. Todas as representações de objetos matemáticos estão conectadas e permitem visualizar, experimentar e analisar problemas e situações em um ambiente semelhante ao de um laboratório. Pode-se, por exemplo, criar um modelo geométrico em uma janela, animá-lo e coletar dados diretamente em um gráfico. É possível utilizar o GeoGebra em computadores, tablets e smartphones, em vários sistemas operacionais e é de uso gratuito para fins não comerciais. O software pode ser usado em mais de 65 idiomas diferentes, disponíveis em uma opção de menu.

Desde 2001, quando o software foi criado, a comunidade que utiliza o GeoGebra vem crescendo intensamente. Com ferramentas computacionais potentes e adequadas, a utilização do software tornou possível ampliar a modelagem relativamente modesta normalmente feita em sala de aula para abordar mais situações da vida real e resolver problemas mais desafiadores.

Graças aos múltiplos recursos oferecidos pelo programa, é possível criar construções geométricas com ferramentas euclidianas, isto é, utilizando régua e compasso. Isso permite aos estudantes explorarem inúmeras situações geométricas, por meio da criação de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos, círculos etc. Além disso, o software possibilita alterar todos esses objetos dinamicamente, a partir do movimento atribuído a um ponto que se desloca sobre um segmento, ou sobre um círculo, por

exemplo. O movimento de um objeto pode também estar associado a um número (ou um ângulo) que varia em um determinado intervalo pré-estabelecido e, para isso, basta a criação de um controle deslizante, ferramenta que permite a especificação dos parâmetros necessários. Assim, os estudantes podem construir objetos dinâmicos e observar as correspondentes transformações em suas respectivas equações e coordenadas. A interface amigável e intuitiva do GeoGebra propicia aos estudantes um ambiente ideal para a exploração e a manipulação de objetos e construções, pois a interação dos alunos com o software pode permitir o aprimoramento dos processos cognitivos implicados nas soluções de problemas. Dessa forma, os estudantes podem internalizar conceitos matemáticos, por meio de experiências de resolução de problemas, observando e explorando as relações de dependência entre os objetos de uma determinada construção. Devido a apresentação da Janela de Álgebra e da Janela de Visualização, os estudantes podem perceber a ligação entre as diferentes representações de um mesmo objeto. Por exemplo, ao criar um círculo na Janela de Visualização utilizando-se a ferramenta “Círculo dados centro e um de seus pontos”, imediatamente surge, na Janela de Álgebra, a equação correspondente deste círculo. Se o aluno movimentar um ponto deste círculo, alterando a medida do seu raio, poderá observar a equação associada também sofrendo alterações numéricas em tempo real. Assim, os estudantes podem investigar as relações entre as diferentes representações de um objeto matemático, ou podem analisar as representações 2D e 3D de objetos, de forma a observar as correspondências entre as dimensões, como por exemplo as associações possíveis entre a definição de um quadrado e a definição de um cubo, ou ainda, a definição de um círculo e a definição de uma esfera etc. Portanto, o GeoGebra pode ser entendido como uma ferramenta para a compreensão de conceitos matemáticos. Por todas as razões apresentadas e ainda outras não elencadas, a utilização do GeoGebra em sala de aula, como um recurso didático para o ensino e aprendizagem de Matemática, vem se tornando cada vez mais popular.

## 5. Questões da OBMEP que integram Geometria e Funções

Neste capítulo abordaremos a trajetória da temática integradora de Geometria e Funções nas questões da OBMEP. Mais especificamente, apresentaremos e comentaremos algumas das questões abordadas nesta olimpíada entre os anos 2005 e 2024, que trataram de relacionar os temas Geometria Plana e Funções. Analisadas todas as 37 provas do nível 3 disponibilizadas no site<sup>2</sup> da OBMEP, sendo 18 provas de 1ª fase e 19 provas de 2ª fase, em um universo de 474 questões, foram encontradas 20 questões relacionando os dois temas simultaneamente. Das 20 questões analisadas, apenas 4 abordavam temas relacionados a distâncias e perímetros, que não constituem o foco deste trabalho e, por isso, foram desconsideradas. As 16 questões restantes abordavam Áreas de Figuras Planas, e são apresentadas em ordem cronológica na tabela abaixo.

*Quadro 3: Questões da OBMEP que relacionam Áreas de Figuras Planas e Funções (continua)*

Nº	Prova / Ano	Nível	Fase	Questão	Conteúdos abordados na questão
01	OBMEP 2005	3	2ª	4	Congruência de Triângulos, Área do Quadrado, Função Quadrática.
02	OBMEP 2007	3	1ª	18	Semelhança de Triângulos, Teorema de Pitágoras, Áreas do Triângulo e do Retângulo e Função Afim.
03	OBMEP 2008	3	2ª	3	Semelhança de Triângulos, Área do Trapézio, Área do Retângulo e Função Quadrática.
04	OBMEP 2009	3	1ª	19	Teorema de Pitágoras, área do Quadrado e Função Quadrática.
05	OBMEP 2009	3	2ª	5	Triângulo Retângulo Isósceles, Área do Triângulo, Área do Trapézio, Função de Várias Sentenças.
06	OBMEP 2011	3	2ª	4	Semelhança de Triângulos, Congruência de Triângulos, Área do Triângulo e Função Quadrática.
07	OBMEP 2012	3	2ª	4	Semelhança de Triângulos, Teorema de Pitágoras, Área do Triângulo, Função Racional.
08	OBMEP 2013	3	2ª	4	Triângulo Retângulo Isósceles, Área do Triângulo, Área do Trapézio, Função de Várias Sentenças.
09	OBMEP 2014	3	2ª	2	Retângulo, Área do Triângulo, Função de Várias Sentenças.
10	OBMEP 2015	3	1ª	13	Área do Quadrado e Função de Várias Sentenças.
11	OBMEP 2016	3	1ª	11	Área do Trapézio, Área do Triângulo e Função Quadrática.
12	OBMEP 2017	3	1ª	15	Retângulo, Paralelismo, Função de Várias Sentenças. Crescimento e Decrescimento, Função Constante.

<sup>2</sup> OBMEP – Provas e soluções. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>.

Nº	Prova / Ano	Nível	Fase	Questão	Conteúdos abordados na questão
13	OBMEP 2017	3	2ª	3	Triângulo Equilátero (cálculo da altura), Área do Triângulo e Função de Várias Sentenças.
14	OBMEP 2018	3	2ª	4	Triângulo Retângulo Isósceles, Congruência de Triângulos, Área do Triângulo, Função de Várias Sentenças.
15	OBMEP 2019	3	1ª	13	Área do Quadrado, Área do Triângulo, Função Afim.
16	OBMEP 2024	3	2ª	3	Área do Hexágono Regular. Área do Triângulo e Função de Várias Sentenças.

*Fonte: elaborado pelo autor (2025). (conclusão)*

Destacamos que estas questões representaram uma motivação e uma inspiração para a criação das sequências didáticas apresentadas no capítulo 7, pois nelas foi observado um potencial de gerar nos estudantes as reflexões relacionadas à Geometria Dinâmica. Importante também ressaltar que este tipo de questão aparece regularmente na OBMEP desde 2005, ano em que a olimpíada foi criada e começou a ser aplicada nas escolas brasileiras. Isso evidencia a relevância do tema para os pesquisadores do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) que são os responsáveis pela confecção da prova.

Na Tabela 1, podemos observar o expressivo número de alunos que participaram da 1ª fase da OBMEP no ano de 2024. O número de alunos participantes manteve-se acima de 18 milhões nos anos de 2022 até 2024, segundo dados colhidos no próprio site<sup>3</sup> da OBMEP.

*Tabela 1: OBMEP em números 2024*

<b>19ª OBMEP 2024 - Inscrições 1ª Fase</b>			
	<b>Públicas</b>	<b>Privadas</b>	<b>Todos</b>
Escolas	50.960	5.556	56.516
Alunos	17.687.393	811.316	18.498.709
Municípios	99,89%	23,88%	99,89%

*Fonte: OBMEP (2024).*

Mesmo considerando que apenas uma fração destes 18 milhões de alunos tenham realizado a prova de nível 3 desta olimpíada, é razoável pensar que são milhões de alunos do Ensino Médio com acesso a estas questões. Desta forma, a OBMEP influencia alunos e

<sup>3</sup> OBMEP em números. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/em-numeros.htm>.

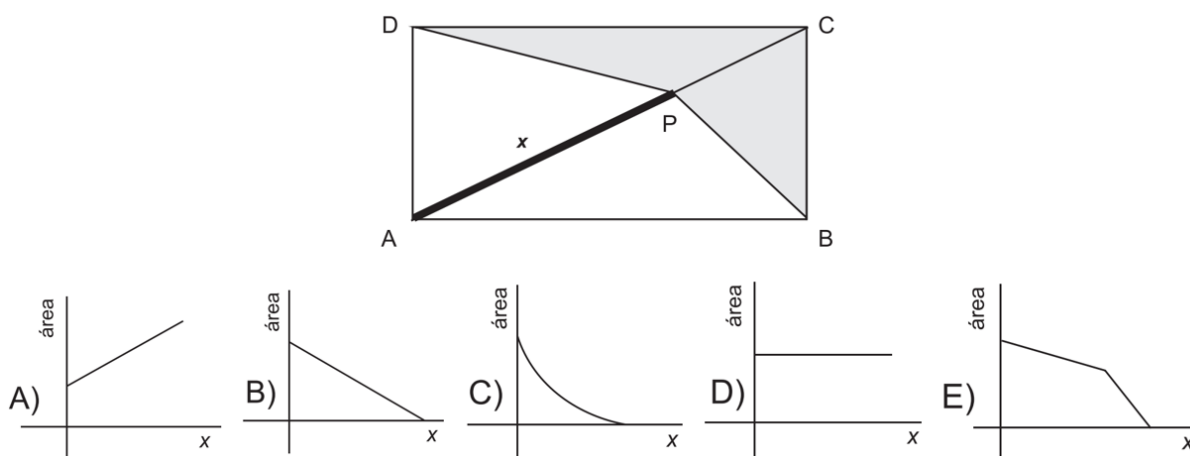
professores de todo o Brasil a olharem para as temáticas consideradas mais relevantes da Matemática, por meio de suas questões. Questões estas que muitas vezes são consideradas exigentes pelo seu caráter olímpico, mas que ao mesmo tempo desafiam os jovens estudantes a desenvolverem suas habilidades matemáticas e darem prova de seu esforço e talento.

Apresentaremos a seguir três das dezesseis questões citadas no quadro 3, a fim de que o leitor possa observar a forma como se dá a investigação de uma função, partindo de uma construção geométrica dada. Tal construção deve possuir um ou mais pontos móveis, isto é, pontos que se deslocam sobre segmentos, retas, entre outros, deslocamento este que faz com que uma determinada medida varie (variável independente), e isto implica em uma variação na área de uma região definida no enunciado (variável dependente). Então ocorre o estudo da variação da área desta região por meio do estudo da função que modela o problema.

A Figura 14 apresenta a ilustração da questão 18 da OBMEP 2007 (Nível 3, 1ª fase).

Qual dos gráficos abaixo descreve a variação da área do polígono BCDP em função da distância  $x = AP$ ?

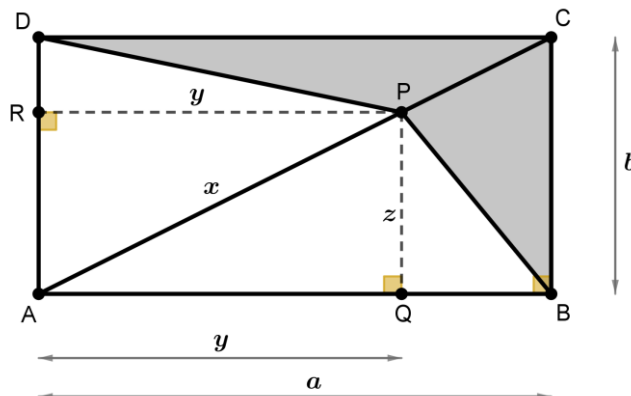
Figura 14 - Ilustração da Questão 18.



Fonte: OBMEP (2007).

Na questão acima, temos que o ponto P desloca-se sobre o segmento AC fazendo que a medida  $x$  de AP varie. Desta forma, a questão possui relação com a Geometria Dinâmica, uma vez que há a ideia do movimento do ponto P causar uma variação na área da região cinza e solicita-se que o aluno investigue esta variação. A questão aborda os seguintes temas: Semelhança de Triângulos, Teorema de Pitágoras, Áreas do Triângulo e do Retângulo e Função Afim. Uma possível estratégia de resolução é representar as medidas dos lados do retângulo ABCD pelas constantes  $a$  e  $b$ . (Figura 15)

Figura 15 - Questão 18, OBMEP 2007, Nível 3, 1ª Fase

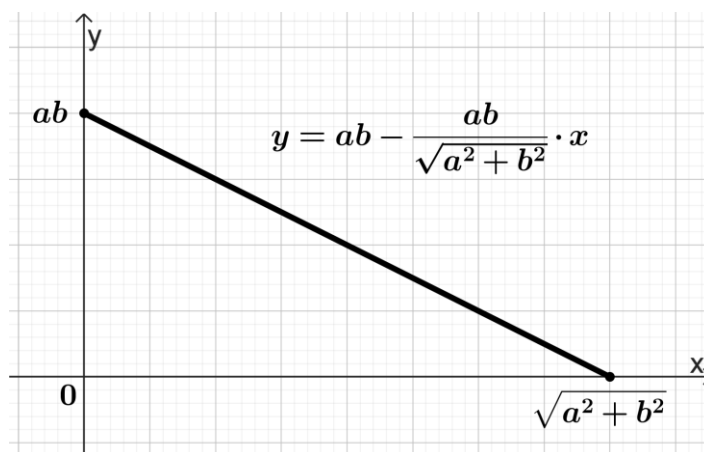


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Traçamos as perpendiculares PQ e PR relativas aos lados AB e AD, respectivamente. Aplicamos o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, assim,  $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Observamos a semelhança dos triângulos ABC e AQP (caso AA) e, portanto,  $\frac{PQ}{CB} = \frac{AQ}{AB} = \frac{AP}{AC}$ , logo temos  $\frac{z}{b} = \frac{y}{a} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  e assim,  $y = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  e  $z = \frac{bx}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

Assim, utilizando o raciocínio por subtração, se pode chegar à conclusão de que a área do polígono BCDP é dada por  $A_{BCDP} = A_{ABCD} - A_{ABP} - A_{ADP} = ab - \frac{az}{2} - \frac{by}{2} = ab - \frac{abx}{2\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{abx}{2\sqrt{a^2 + b^2}} = ab - \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot x$ , com  $a, b > 0$ . Denominando  $a_1 = -\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  e  $b_1 = ab$ , temos que  $A_{BCDP} = a_1 \cdot x + b_1$ , em que  $a_1 < 0$  e  $b_1 > 0$ , expressão esta que claramente representa uma função afim decrescente, como mostra a Figura 16 abaixo.

Figura 16 - Gráfico da função que modela o problema da Questão 18



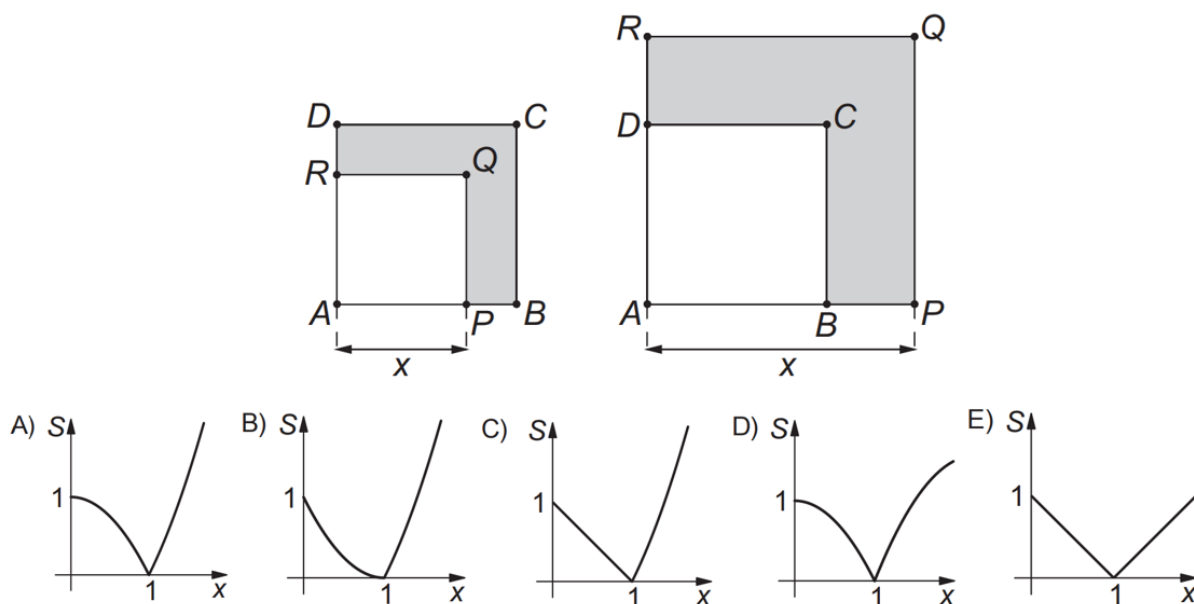
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Por conseguinte, a resposta procurada é a alternativa (B). (Figura 14)

A Figura 17 apresenta a ilustração da questão 13 da OBMEP 2015 (Nível 3, 1ª fase).

Um quadrado ABCD tem área 1. Um ponto P desloca-se ao longo da semirreta AB, partindo do ponto A para a direita, conforme mostra a figura. Se S é a área da região compreendida entre os quadrados ABCD e APQR, destacada em cinza, qual é o gráfico que melhor representa a variação de S em função de x?

Figura 17 - Ilustração da Questão 13.



Fonte: OBMEP (2015).

Na questão acima, temos que o ponto P desloca-se sobre a semirreta AB fazendo com que a medida  $x$  de AP varie. Isso implica que Q e R são também pontos móveis, já que APQR é sempre um quadrado. A ideia do movimento de um ponto que percorre uma semirreta nos remete mais uma vez à Geometria Dinâmica. O estudante deve investigar a variação da área da região situada entre os dois quadrados e concluir qual gráfico melhor representa esta variação. Os conteúdos relacionados são: Área do Quadrado e Função de várias sentenças.

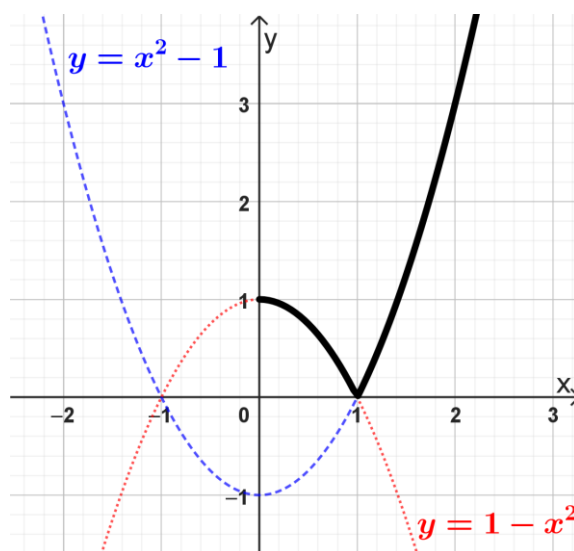
Uma possível resolução: observa-se que se o ponto P pertence ao segmento AB então o quadrado ABCD, de lado 1, é maior do que o quadrado APQR, de lado  $x$ . Portanto, se  $0 \leq x \leq 1$  então  $A_{PBCDRQ} = A_{ABCD} - A_{APQR} = 1^2 - x^2 = 1 - x^2$ . Por outro lado, se o ponto P pertence ao prolongamento de AB então o quadrado APQR, de lado  $x$ , é maior do que o quadrado ABCD, de lado 1. Portanto, se  $x > 1$  então  $A_{PBCDRQ} = A_{APQR} - A_{ABCD} = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$ . Daí segue que a função que representa a variação da área da região compreendida entre os dois quadrados pode ser escrita como a função de duas sentenças

$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ , ou ainda, de forma mais concisa, podemos escrever que

$f(x) = |x^2 - 1|$ , com  $x \geq 0$ .

Construindo-se o gráfico desta função (Figura 18), encontramos o resultado representado no item (A). (Figura 17)

Figura 18 – Gráfico da função que modela o problema da questão 13

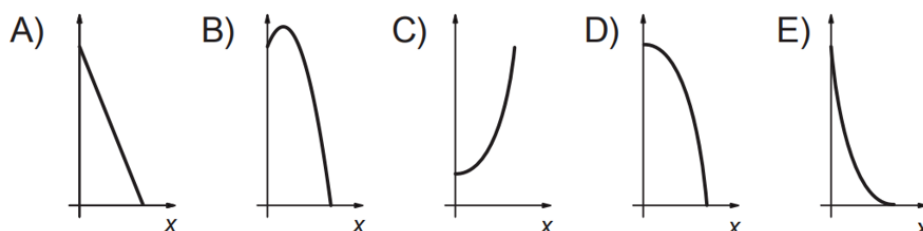
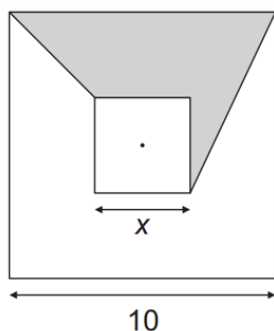


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A Figura 19 apresenta a ilustração da questão 11 da OBMEP 2016 (Nível 3, 1ª fase).

Os quadrados da figura têm lados paralelos e o mesmo centro. O quadrado maior tem lado 10 e o menor tem lado  $x$ . Qual é o gráfico que expressa a área da região cinza em função de  $x$ ?

Figura 19 - Ilustração da Questão 11.

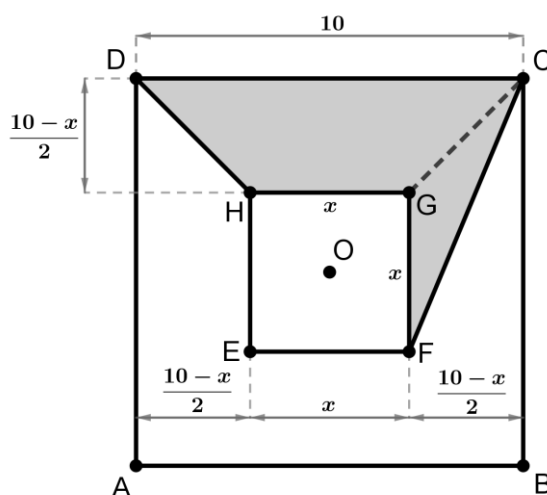


Fonte: OBMEP (2016).

Nessa questão, temos que a medida  $x$  do lado do quadrado menor varia. Esta variação se dá no intervalo  $[0, 10]$  já que  $x$  é uma medida positiva e não deve ser maior do que a medida do lado do quadrado maior. Sabemos que os dois quadrados são concêntricos e tem seus lados paralelos. Portanto existe a ideia do movimento dos quatro vértices do quadrado menor, o que evidencia o caráter dinâmico da figura. O estudante deve determinar a variação da área da região cinza e concluir qual gráfico melhor representa esta variação. Os conteúdos relacionados são: Área do Trapézio, Área do Triângulo e Função Quadrática.

Denominamos ABCD o quadrado maior e EFGH o quadrado menor, ambos de mesmo centro O, conforme Figura 20.

Figura 20 - Questão 11, OBMEP 2016, Nível 3, 1ª Fase



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Observamos que a área da região pintada de cinza – o pentágono DCFGH – pode ser decomposta na soma de duas áreas: das regiões DCGH e CGF. É imediato que a menor distância entre os lados paralelos dos dois quadrados é a metade da diferença das medidas de seus lados, isto é,  $\frac{10-x}{2}$ . Como  $DC \parallel HG$ , sabemos que DCGH é um trapézio de

bases  $\overline{DC} = 10$  e  $\overline{HG} = x$  e altura  $\frac{10-x}{2}$ . Assim,  $A_{DCHG} = \frac{(10+x) \cdot \frac{(10-x)}{2}}{2} = \frac{10^2 - x^2}{4} = \frac{100 - x^2}{4}$ . O

triângulo CGF possui base  $\overline{GF} = x$  e altura  $\frac{10-x}{2}$ . Assim,  $A_{CGF} = \frac{x \cdot \frac{(10-x)}{2}}{2} = \frac{10x - x^2}{4}$ . Logo,

$A_{DCFGH} = A_{DCHG} + A_{CGF} = \frac{100 - x^2}{4} + \frac{10x - x^2}{4} = \frac{-2x^2 + 10x + 100}{4} = -\frac{x^2}{2} + \frac{5x}{2} + 25$ . Expressão

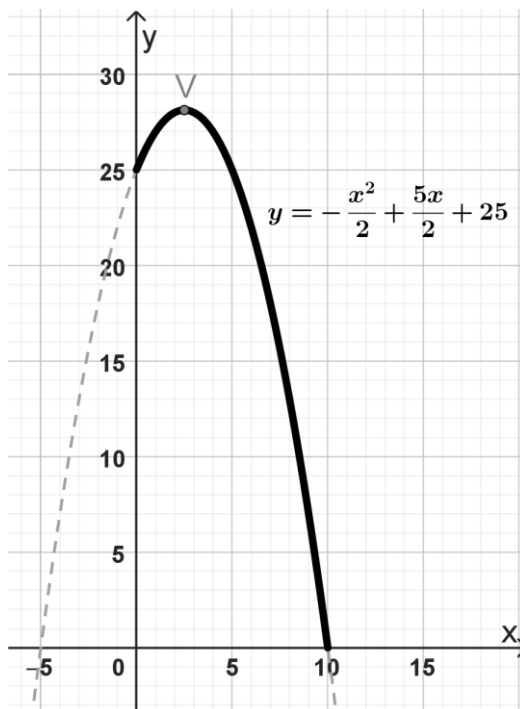
esta que representa uma função quadrática, cujo gráfico é uma parábola com concavidade para baixo. Calculando as coordenadas do vértice V desta parábola, temos:  $x_V = -\frac{b}{2a} =$

$$-\frac{\frac{5}{2}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ (valor do domínio no qual ocorre a área máxima) e } y_V = -\frac{\Delta}{4a} =$$

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 25}{4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{\frac{25}{4} + 50}{(-2)} = \frac{\frac{25+200}{4}}{2} = \frac{225}{8} = 28,125 \text{ (valor da área máxima).}$$

Assim, podemos construir o gráfico abaixo (Figura 21), que corresponde à alternativa (B).  
(Figura 19)

Figura 21 - Gráfico da função que modela o problema da Questão 11



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

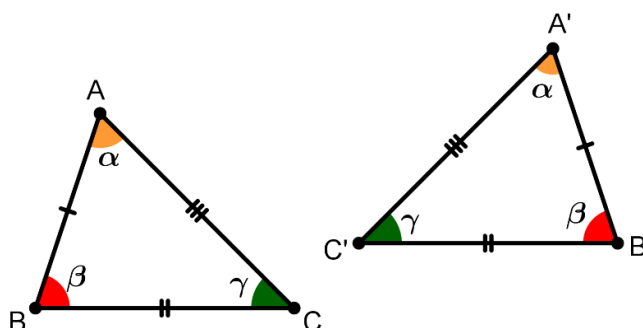
## 6. Premissas

Este capítulo visa apresentar os conteúdos básicos que são pré-requisitos para o estudante submetido às sequências didáticas. No caso, são duas sequências didáticas ao todo; uma para estudantes do 1º ano do Ensino Médio, e outra para estudantes do 3º ano. As obras utilizadas para compor o texto de nossas premissas foram os livros da coleção Fundamentos de Matemática Elementar, principalmente os volumes: v.1. Funções, (Iezzi; Murakami, 2013), v.3. Trigonometria (Iezzi, 2013) e v.9. Geometria Plana (Dolce; Pompeo, 2013). Como não tivemos o objetivo de esgotar os assuntos abordados neste capítulo, convidamos o leitor a consultar tais obras para mais detalhes, se for o caso.

### 6.1. Congruência de triângulos

Dois triângulos são congruentes quando os lados e ângulos do primeiro triângulo estão em correspondência com os lados e ângulos do segundo triângulo de tal forma que os lados e ângulos em correspondência sejam ordenadamente congruentes.

Figura 22 - Os triângulos ABC e A'B'C' são congruentes.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} AB = A'B' & \angle A = \angle A' \\ AC = A'C' & e \quad \angle B = \angle B' \\ BC = B'C' & \angle C = \angle C' \end{pmatrix}$$

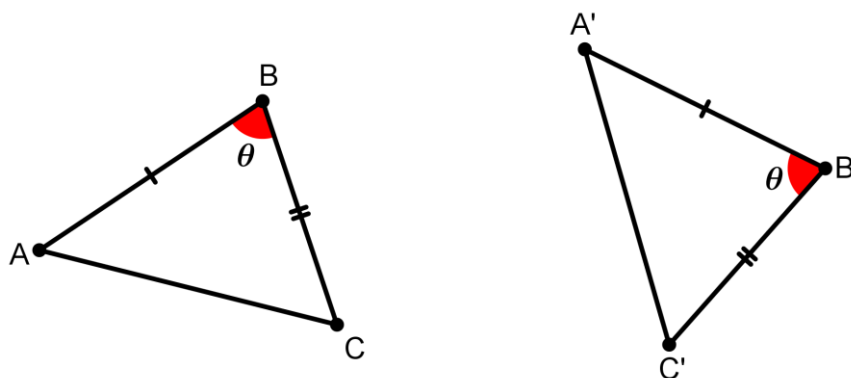
Desse modo, para determinar a congruência de dois triângulos podemos observar seis elementos em cada triângulo (os três lados e os três ângulos) e comparar as medidas. Mas de fato, é suficiente que se conheçam apenas três destes elementos, numa certa ordem, para termos a congruência assegurada. É isso que nos dizem os casos de congruências de triângulos.

#### 6.1.1. Casos de Congruência de Triângulos

1º Caso – LAL (lado, ângulo, lado):

"Se dois triângulos possuem ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes."

Figura 23 - Caso LAL de congruência de Triângulos.

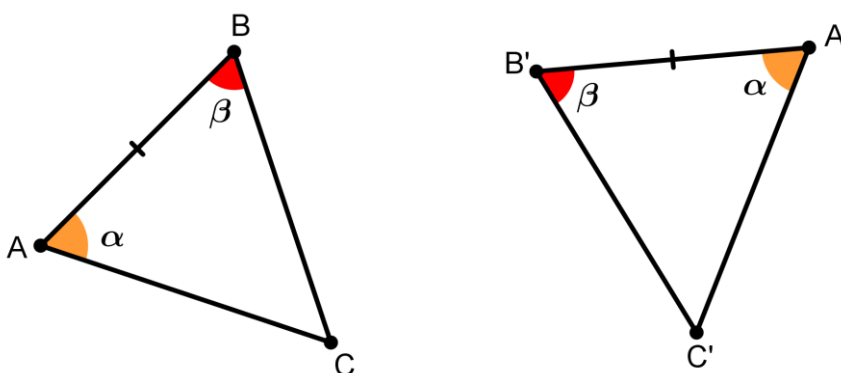


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

2º Caso – ALA (ângulo, lado, ângulo):

"Se dois triângulos possuem ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes."

Figura 24 - Caso ALA de congruência de triângulos.

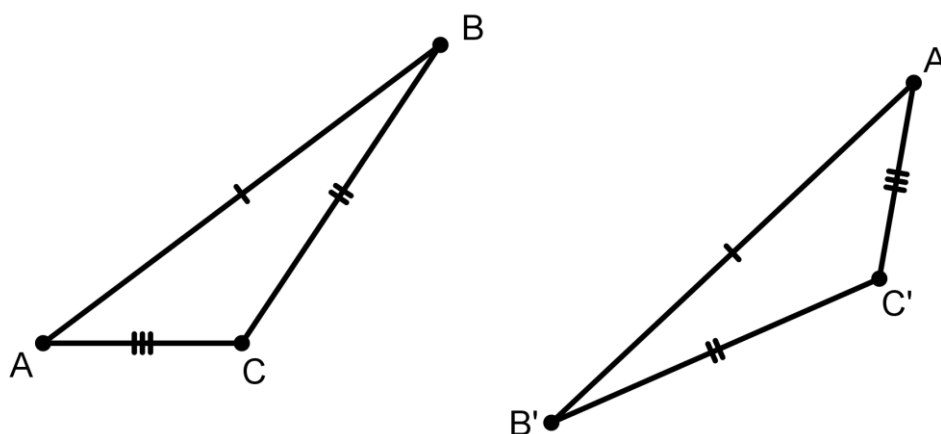


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

3º Caso – LLL (lado, lado, lado):

"Se dois triângulos possuem seus três lados congruentes, então eles são congruentes."

Figura 25 - Caso LLL de congruência de triângulos.

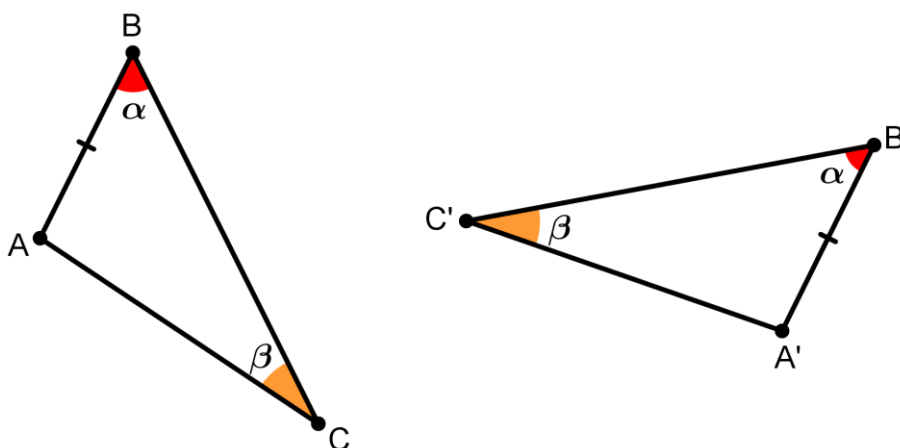


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

4º Caso – LAAo (lado, ângulo, ângulo oposto):

"Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes."

Figura 26 - Caso LAAo de congruência de triângulos.

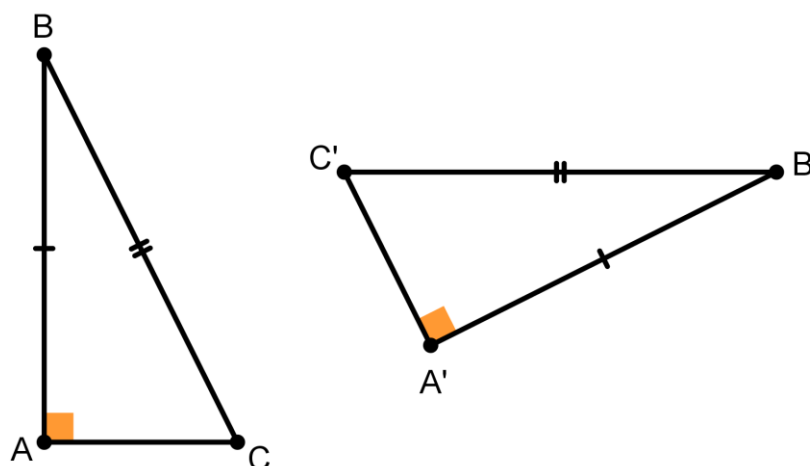


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

5º Caso – Caso especial de Congruência de Triângulos Retângulos:

"Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes."

Figura 27 - Caso Especial de congruência de triângulos retângulos

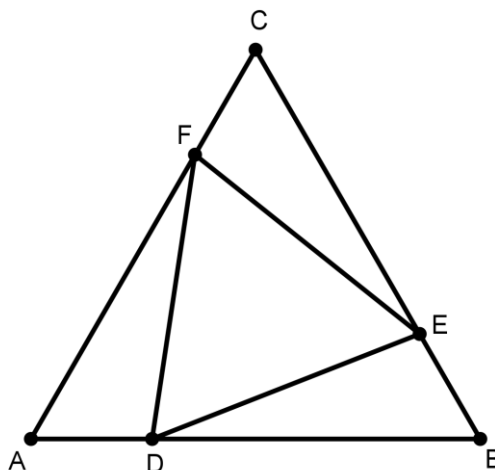


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Vejamos um exemplo da aplicação de Congruência de Triângulos:

Considere o triângulo equilátero ABC da figura abaixo. Foram marcados os pontos  $D \in AB$ ,  $E \in BC$  e  $F \in CA$ , tais que  $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$ . Mostre que DEF é triângulo equilátero.

Figura 28 - Ilustração do exemplo de congruência de triângulos



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Como  $ABC$  é equilátero, então  $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$  e  $B\hat{A}C = A\hat{B}C = A\hat{C}B = 60^\circ$ . É imediato que  $B\hat{A}C = D\hat{A}F$ ,  $A\hat{B}C = E\hat{B}D$  e  $A\hat{C}B = F\hat{C}E$ . Como  $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$  então  $\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{BC} - \overline{BE} = \overline{CA} - \overline{CF}$  e, portanto,  $\overline{DB} = \overline{EC} = \overline{FA}$ .

$$\text{Assim, } \begin{cases} \overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} & \text{(enunciado)} \\ D\hat{A}F = E\hat{B}D = F\hat{C}E = 60^\circ & \text{(ângulo interno do triângulo equilátero)} \\ \overline{DB} = \overline{EC} = \overline{FA} & \text{(dedução)} \end{cases} .$$

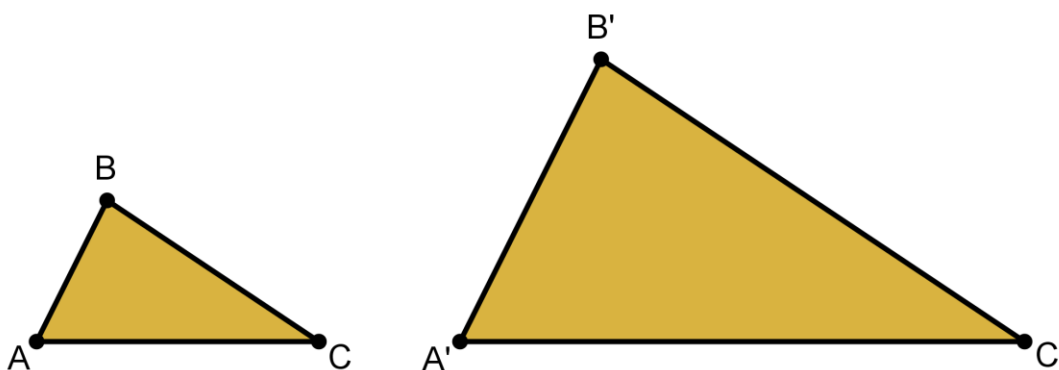
Pelo caso LAL (Lado, Ângulo, Lado) podemos afirmar que os triângulos  $ADF$ ,  $BED$  e  $CFE$  são congruentes. Daí segue que  $\overline{FD} = \overline{DE} = \overline{EF}$  e, portanto,  $DEF$  é equilátero.

## 6.2. Semelhança de Triângulos

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, for possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:

- 1º) ângulos correspondentes sejam congruentes.
- 2º) lados homólogos sejam proporcionais.

Figura 29 -  $ABC$  e  $A'B'C'$  são triângulos semelhantes.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle A'; \angle B = \angle B'; \angle C = \angle C' \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

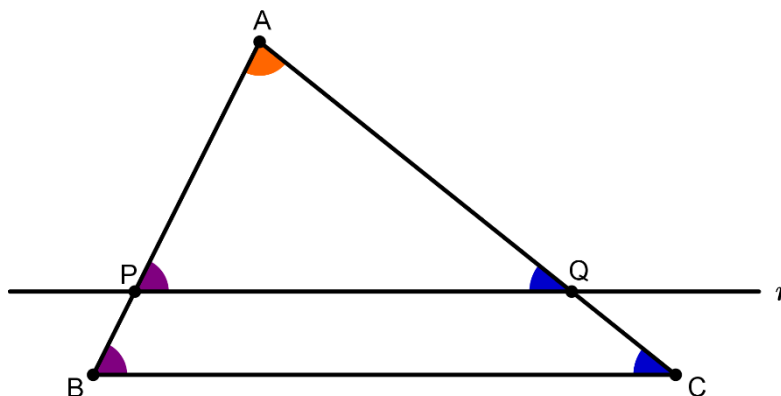
Para facilitar a identificação de ângulos correspondentes e lados homólogos, identificamos triângulos semelhantes colocando os vértices correspondentes na mesma sequência, isto é, quando dizemos  $\triangle ABC \approx \triangle DEF$ , já estamos fixando as correspondências:  $A \leftrightarrow D$ ;  $B \leftrightarrow E$  e  $C \leftrightarrow F$ .

### 6.2.1. Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos

O Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos diz que se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e encontra os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

Na sequência, trazemos uma demonstração, adaptada de Dolce & Pompeo (2013). Vamos considerar um triângulo ABC e traçar uma reta paralela ao lado BC, que encontra os lados AB e AC em dois pontos P e Q.

Figura 30 - Ilustração do Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

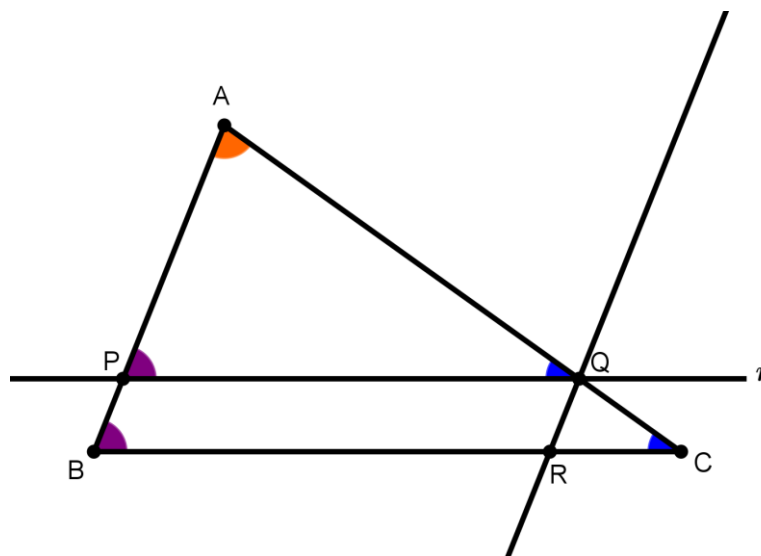
Temos que  $PQ \parallel BC \Rightarrow \angle APQ = \angle ABC$  e  $\angle AQP = \angle ACB$  (ângulos correspondentes).

Então temos os ângulos congruentes  $\angle P = \angle B$ ;  $\angle Q = \angle C$  e  $\angle A$  é ângulo comum aos dois triângulos. Assim, podemos afirmar que os ângulos dos triângulos ABC e APQ são ordenadamente congruentes. Como  $PQ \parallel BC$ , aplicando o Teorema de Tales, temos que:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} \quad [1].$$

Vamos agora considerar o ponto R pertencente a BC tal que  $QR \parallel AB$ , como na figura abaixo.

Figura 31 - Ilustração do Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Novamente aplicando o Teorema de Tales, temos que:  $\frac{AQ}{AC} = \frac{BR}{BC}$  [2].

De [1] e [2] temos que:  $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{BR}{BC}$ .

Como PQRB é um paralelogramo, então  $PQ = BR$ .

Portanto,  $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$ , ou seja, os lados homólogos dos triângulos ABC e APQ são proporcionais.

Assim, os triângulos ABC e APQ são semelhantes.

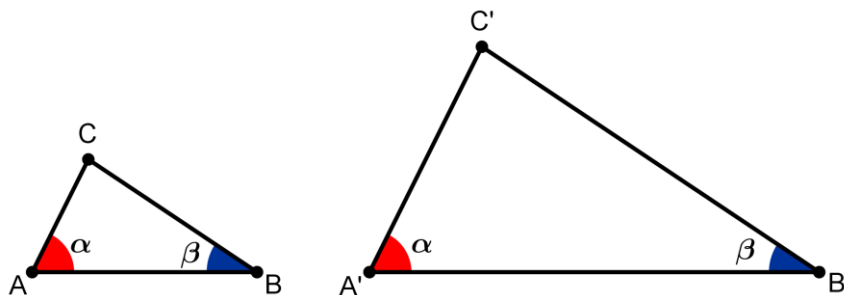
### 6.2.2. Casos de Semelhança

De acordo com a definição de triângulos semelhantes, para concluirmos que dois triângulos são semelhantes, precisamos verificar as congruências dos seus três ângulos e a proporcionalidade dos seus três lados. No entanto, existem situações em que podemos concluir a semelhança de dois triângulos sem analisarmos todas as condições exigidas pela definição, tais situações são chamadas de casos de semelhança.

- 1º caso: AA~ (ângulo, ângulo)

Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.

Figura 32 - Caso AA de Semelhança de Triângulos.



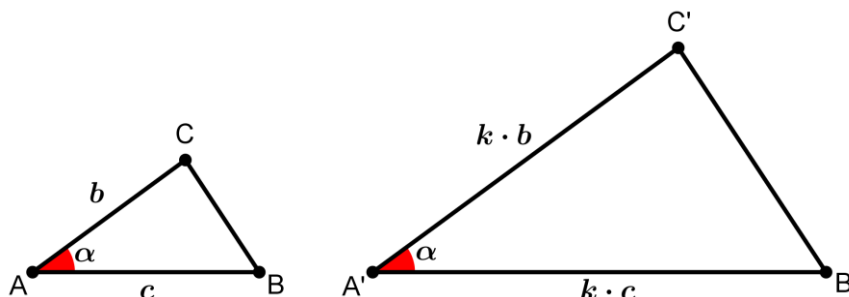
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle A' \\ e \\ \angle B = \angle B' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

- 2º caso: LAL~ (lado, ângulo, lado)

Se dois triângulos possuem dois pares de lados proporcionais e os ângulos compreendidos entre eles são congruentes, então esses dois triângulos são semelhantes.

Figura 33 - Caso LAL de Semelhança de Triângulos.



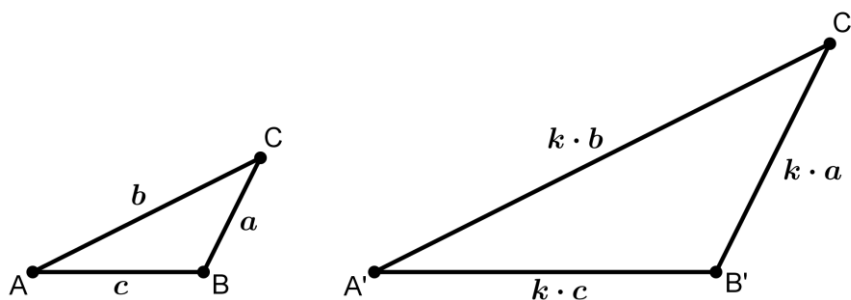
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle A' \\ e \\ \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

- 3º caso: LLL~ (lado, lado, lado)

Se dois triângulos tem os três lados correspondentes proporcionais, então esses dois triângulos são semelhantes.

Figura 34 - Caso LLL de Semelhança de Triângulos.



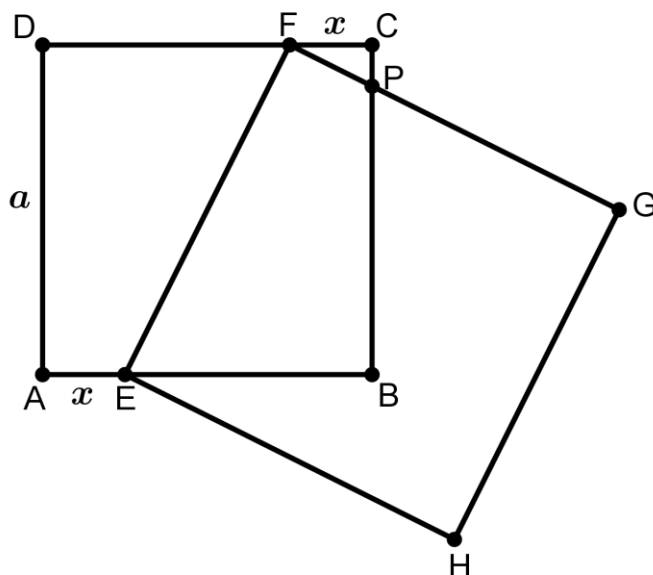
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

$$\left. \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Vejamos um exemplo de aplicação de Semelhança de Triângulos.

Seja  $ABCD$  um quadrado de lado  $a$  seja  $EFGH$  outro quadrado, construído de modo que  $E \in AB$ ,  $F \in CD$  e  $\overline{AE} = \overline{CF} = x$ . Se  $P$  é o ponto de intersecção de  $BC$  e  $FG$ , calcule a medida do segmento  $CP$ .

Figura 35 - Ilustração do exemplo de semelhança de triângulos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

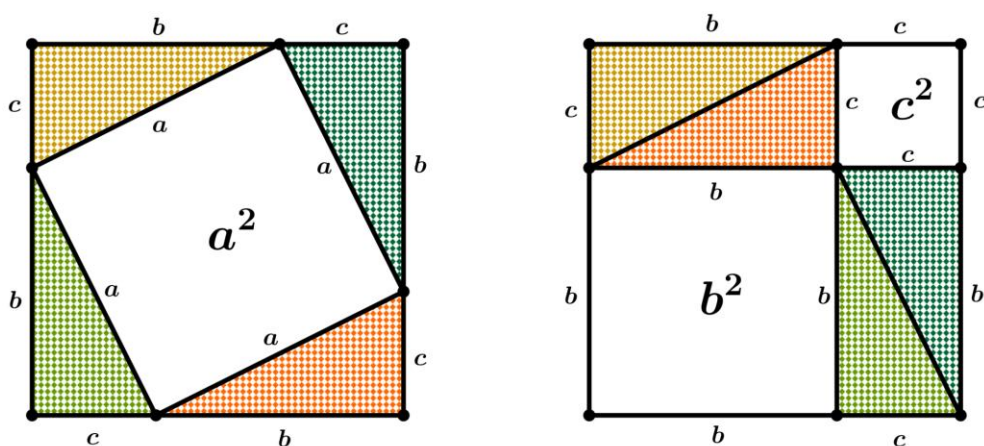
Vamos traçar uma perpendicular do ponto E até o lado CD. Seja Q o pé desta perpendicular.



Na sequência, apresentamos uma demonstração clássica que pode ter sido idealizada pelos Pitagóricos (Lima et al., 2013), e que não é muito complexa. Acreditamos que estudantes do nono ano podem compreendê-la.

O diagrama mostra um quadrado de lado de medida  $b + c$ , com quatro triângulos retângulos congruentes, de catetos de medidas  $b, c$  e hipotenusa de medida  $a$ . Na segunda figura o mesmo quadrado é apresentado, porém houve um rearranjo e os triângulos estão dispostos de forma diferente. Portanto, as regiões em branco dentro de cada um dos dois quadrados devem ter uma área igual. Equacionando as áreas das regiões brancas produz-se o teorema de Pitágoras.

Figura 38 - Demonstração clássica do Teorema de Pitágoras.

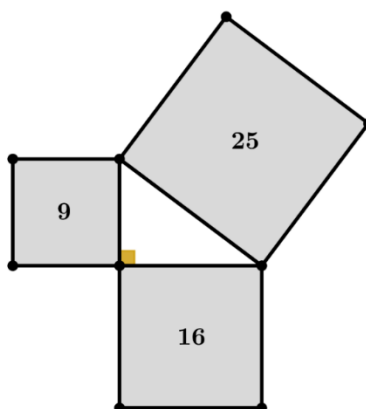


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Assim,  $a^2 = b^2 + c^2$ .

Decorre do Teorema de Pitágoras que, dado um triângulo retângulo qualquer, que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa.

Figura 39 - Quadrados construídos sobre os lados de medidas 3, 4 e 5 do triângulo retângulo.



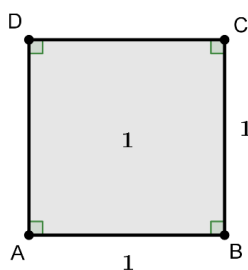
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Como exemplo, na figura acima temos o triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5. Os quadrados construídos sobre estes lados têm áreas iguais a 9, 16 e 25 unidades quadradas, respectivamente.

#### 6.4. Áreas de Figuras Planas

Definimos o quadrado de lado unitário como um quadrado de área igual a 1.

Figura 40 - Quadrado unitário



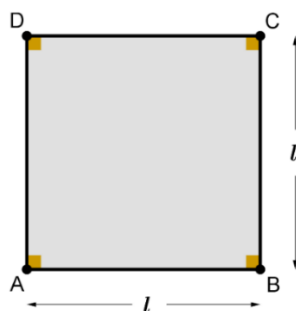
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Assim, se o quadrado tem lado de medida 1 cm, então sua área será 1 cm<sup>2</sup>, se o quadrado tem lado de medida 1 m, então sua área será 1 m<sup>2</sup>, etc.

##### 6.4.1. Área do Quadrado

Para calcular a área de um quadrado devemos medir quantos quadrados unitários cabem no interior desse quadrado.

Figura 41 - Quadrado de lado  $\ell$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

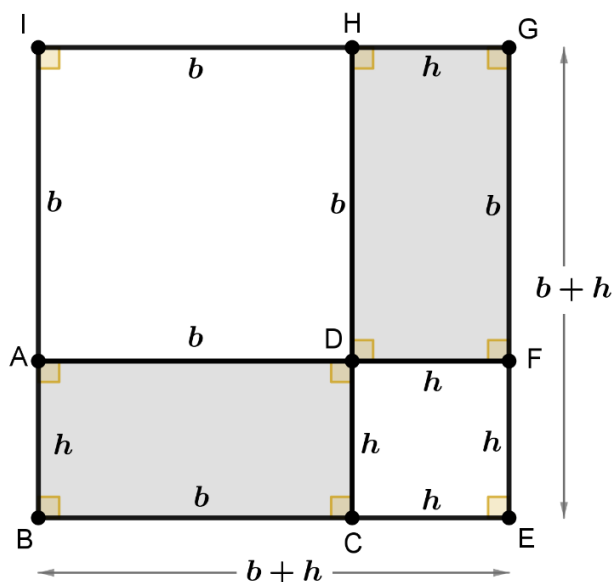
É possível mostrar que independentemente se  $\ell$  é um número racional ou irracional, sempre temos que a área de um quadrado é expressa pelo quadrado da medida de seu lado.

$$A = \ell^2$$

##### 6.4.2. Área do Retângulo

A fim de calcularmos a área de um retângulo de dimensões  $b$  (base) e  $h$  (altura), vamos observar a seguinte construção:

Figura 42 - Decomposição de um quadrado em quadrados e retângulos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Vamos justapor quatro figuras: dois retângulos congruentes: ABCD e DFGH, de dimensões  $b$  e  $h$ , e dois quadrados: CEFD de lado  $h$  e ADHI de lado  $b$ . Estas quatro figuras justapostas resultam em um quadrado maior, BEGI, de lado  $b + h$ .

Então:

$$A_{BEGI} = A_{ABCD} + A_{CEFD} + A_{DFGH} + A_{ADHI}$$

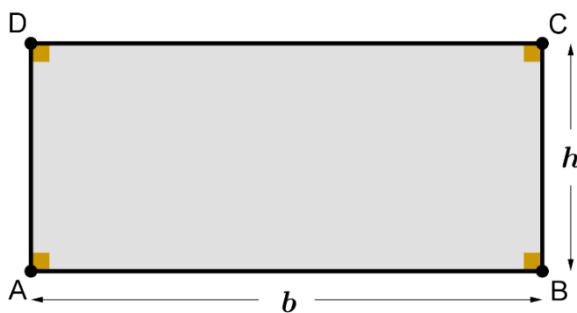
$$(b + h)^2 = 2 \cdot A_{ABCD} + h^2 + b^2$$

$$b^2 + 2bh + h^2 = 2 \cdot A_{ABCD} + h^2 + b^2$$

$$2bh = 2 \cdot A_{ABCD}$$

$$A_{ABCD} = bh$$

Figura 43 - Retângulo de base  $b$  e altura  $h$ .



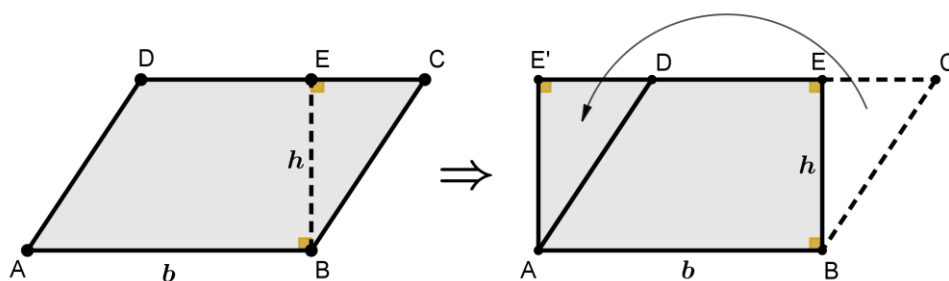
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

A área de um retângulo é expressa pelo produto da medida da base pela medida da altura. Assim,  $A = b \cdot h$ .

### 6.4.3. Área do Paralelogramo

É sempre possível fazer um rearranjo na área de um paralelogramo, de forma a transformá-lo em um retângulo. Na figura abaixo, foi traçada a altura EB, e o triângulo retângulo EBC foi transladado, se transformando no triângulo E'AD.

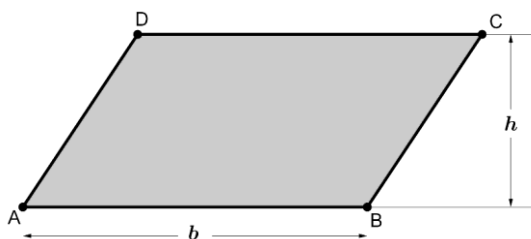
Figura 44 - Translação transforma paralelogramo em retângulo equivalente.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Assim, a área do paralelogramo ABCD é igual a área do retângulo E'ABE.

Figura 45 - Paralelogramo de base  $b$  e altura  $h$ .



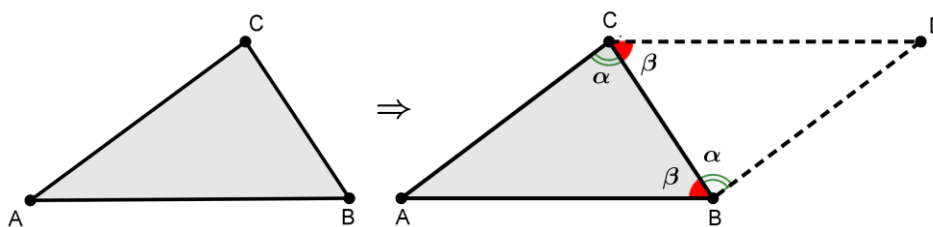
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

A área de um paralelogramo é expressa pelo produto da medida da base pela medida da altura. Assim,  $A = b \cdot h$ .

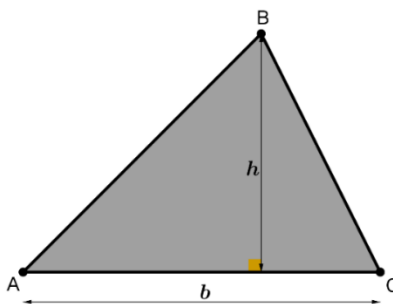
### 6.4.4. Área do Triângulo

Dado um triângulo qualquer ABC, podemos, a partir deste triângulo, construir um paralelogramo. Traçando uma reta paralela ao lado AB pelo vértice C e uma reta paralela ao lado AC pelo vértice B, encontramos o ponto D de intersecção destas retas. Desta forma, os triângulos ABC e DCB são congruentes (caso A-L-A) e, portanto, estes triângulos têm a mesma área. Como ABDC é um paralelogramo, temos que:  $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot A_{ABDC}$ .

Figura 46 - Justaposição de triângulos congruentes forma um paralelogramo.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Figura 47 - Triângulo de base  $b$  e altura  $h$ .

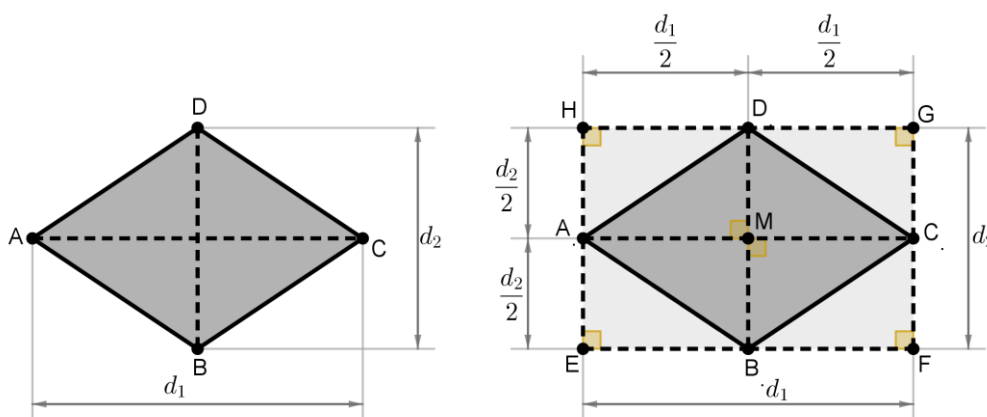
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Assim, se tomarmos como base o segmento  $AC$  de medida  $b$  e como altura relativa a esta base o segmento de medida  $h$ , então a área do triângulo é dada por  $A = \frac{b \cdot h}{2}$ .

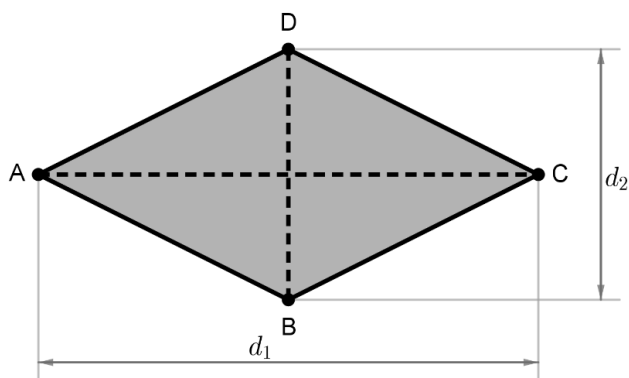
#### 6.4.5. Área do Losango

Seja  $ABCD$  um losango com diagonais  $\overline{AC} = d_1$  e  $\overline{BD} = d_2$ . Seja  $M$  o ponto de intersecção de  $AC$  e  $BD$ , então  $M$  é o ponto médio de  $AC$  e de  $BD$ . Além disso,  $AC \perp BD$ . Traçando retas paralelas às diagonais  $AC$  e  $BD$  pelos vértices do losango  $ABCD$ , obtemos o retângulo  $EFGH$  conforme a figura abaixo. Os lados deste retângulo serão congruentes às diagonais  $AC$  e  $BD$ , assim,  $EF = GH = d_1$  e  $EH = FG = d_2$  e os vértices do losango  $ABCD$  serão pontos médios dos lados do retângulo  $EFGH$ , pois temos as seguintes congruências:  $AMB \equiv AMD \equiv CMB \equiv CMD \equiv BEA \equiv BFC \equiv DGC \equiv DAH$ . Como estes oito triângulos são congruentes, então eles possuem todos a mesma área. Como a área do losango  $ABCD$  corresponde a quatro destes triângulos e a área do retângulo  $EFGH$  corresponde a oito destes triângulos, isto implica que a área do losango  $ABCD$  mede a metade da área do retângulo  $EFGH$ . Assim,  $A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot A_{EFGH} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EF} \cdot \overline{FG} = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$ .

Figura 48 - Losango pode ser inscrito em um retângulo.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Figura 49 - Losango de diagonais  $d_1$  e  $d_2$ .

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

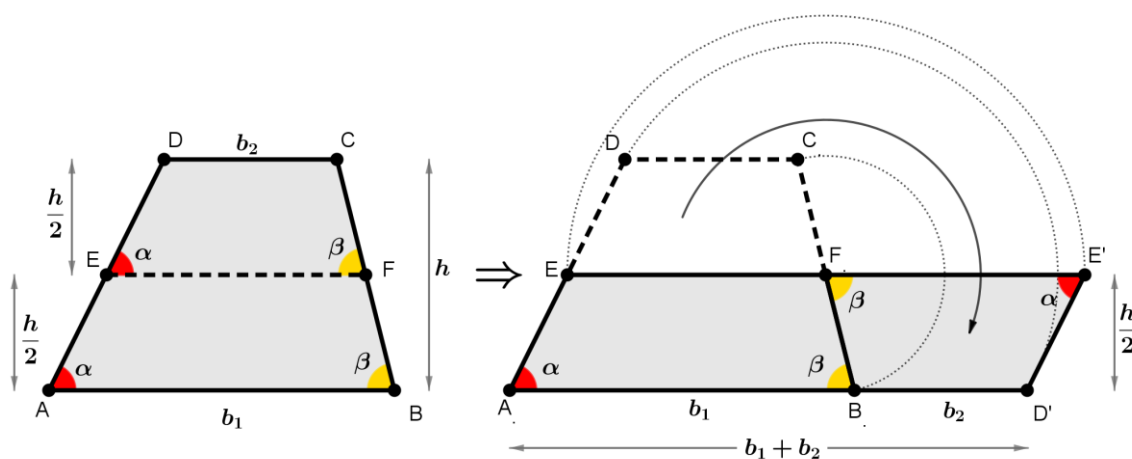
Portanto a área de um losango pode ser expressa pelo semiproduto das medidas das diagonais. Assim,  $A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ .

#### 6.4.6. Área do Trapézio

No trapézio ABCD da figura abaixo traçamos a base média EF, que divide o trapézio inicial em outros dois trapézios: ABFE e EFCD, ambos de mesma altura, que é igual à metade da altura do trapézio inicial. Então aplicamos uma rotação de  $180^\circ$ , em torno do ponto F, no trapézio EFCD transformando-o no trapézio E'FBD'. Note que os trapézios ABFE e E'FBD' juntos, formam um paralelogramo cuja base mede a soma das medidas das bases do trapézio inicial e cuja altura mede a metade da altura do trapézio inicial.

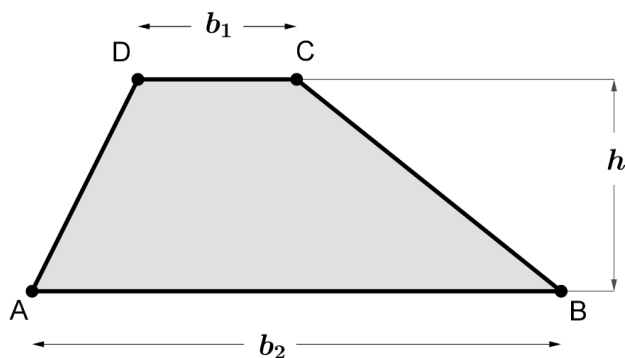
Portanto,  $A_{ABCD} = A_{AD'E'E} = (b_1 + b_2) \cdot \frac{h}{2}$ .

Figura 50 - Rotação transforma trapézio em paralelogramo equivalente.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Figura 51 - Trapézio de bases  $b_1$  e  $b_2$  e altura  $h$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Assim, a área de um trapézio pode ser expressa pelo produto da medida de sua base média pela sua altura. Portanto,  $A = \frac{(b_1+b_2) \cdot h}{2}$ .

## 6.5 Funções

A seguir, serão apresentados conceitos e noções sobre Funções, pois a proposta do trabalho é justamente unir o ensino desses dois temas: Geometria e Funções.

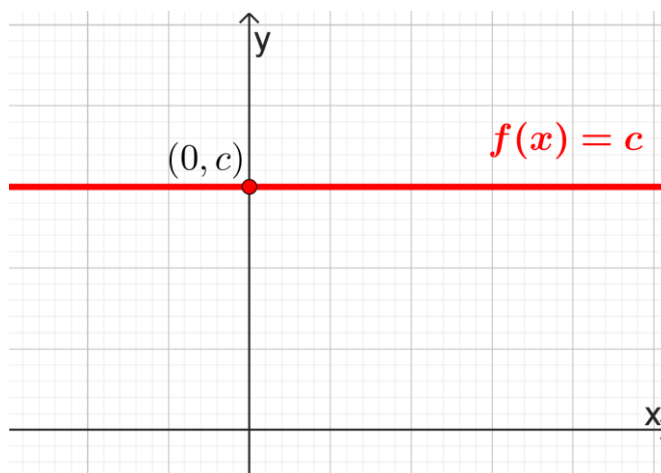
### 6.5.1 Função Constante

Uma função constante é uma função que assume apenas um valor, independentemente de sua variável. Ou seja, é uma função cujo valor da imagem é o mesmo para cada valor do domínio.

A função constante é dada por  $f(x) = c$ , onde  $c$  é um número real qualquer.

O gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo das abscissas passando, no eixo das ordenadas, pelo ponto  $(0, c)$ . A imagem da função é o conjunto  $Im(f) = \{c\}$ .

Figura 52 - Gráfico da função constante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

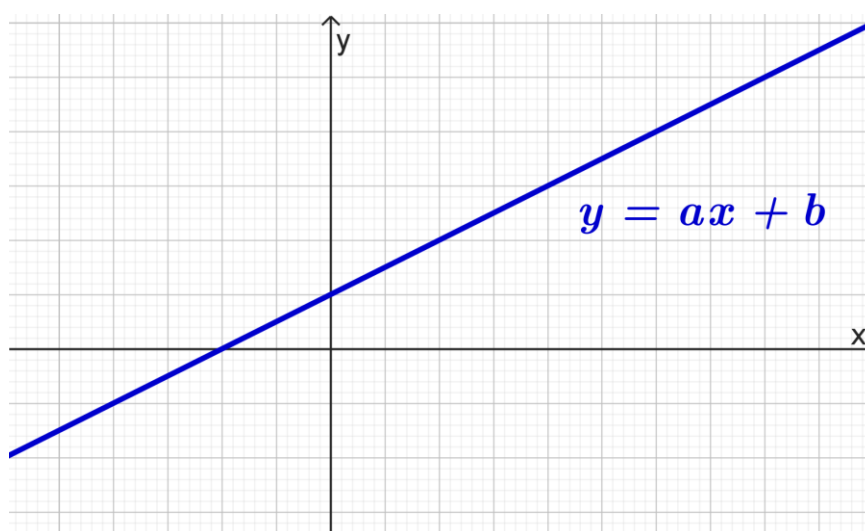
### 6.5.2 Função Afim

Função Afim é toda função da forma:  $f(x) = ax + b$ , em que  $a$  e  $b$  são números reais e  $a \neq 0$ .

Um caso particular é a chamada Função Linear ( $b = 0$ ), é toda função da forma:  $f(x) = ax$  em que  $a$  é um número real não nulo.

O gráfico cartesiano de uma função afim é uma reta.

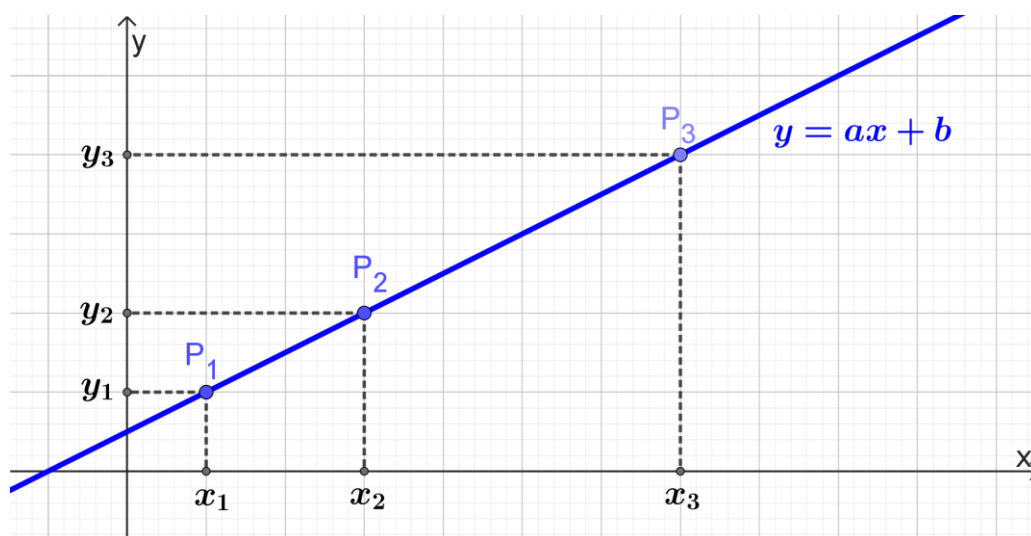
Figura 53 - Gráfico de uma função afim.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Demonstração: Sejam os pontos  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2)$  e  $P_3 = (x_3, y_3)$ , três pontos distintos pertencentes ao gráfico da função  $y = ax + b$ . Então, temos que  $y_1 = ax_1 + b$ ,  $y_2 = ax_2 + b$  e  $y_3 = ax_3 + b$ . Sem perda de generalidade, suponhamos que  $x_1 < x_2 < x_3$ , conforme gráfico cartesiano abaixo.

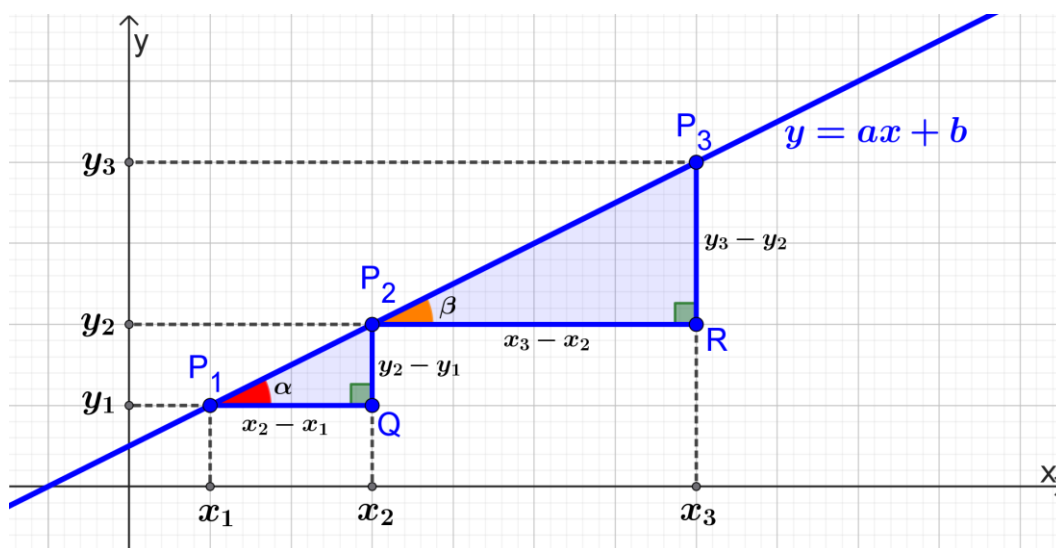
Figura 54 - Três pontos sobre o gráfico de uma função afim.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Vamos definir os pontos  $Q = (x_2, y_1)$  e  $R = (x_3, y_2)$ . Assim, temos os triângulos retângulos  $P_1QP_2$  e  $P_2RP_3$ , conforme figura abaixo.

Figura 55 - Triângulos semelhantes presentes na construção.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Considerando o triângulo  $P_1QP_2$ , vamos calcular a razão  $\frac{P_2Q}{P_1Q} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} =$   
 $\frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a \cdot (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a.$

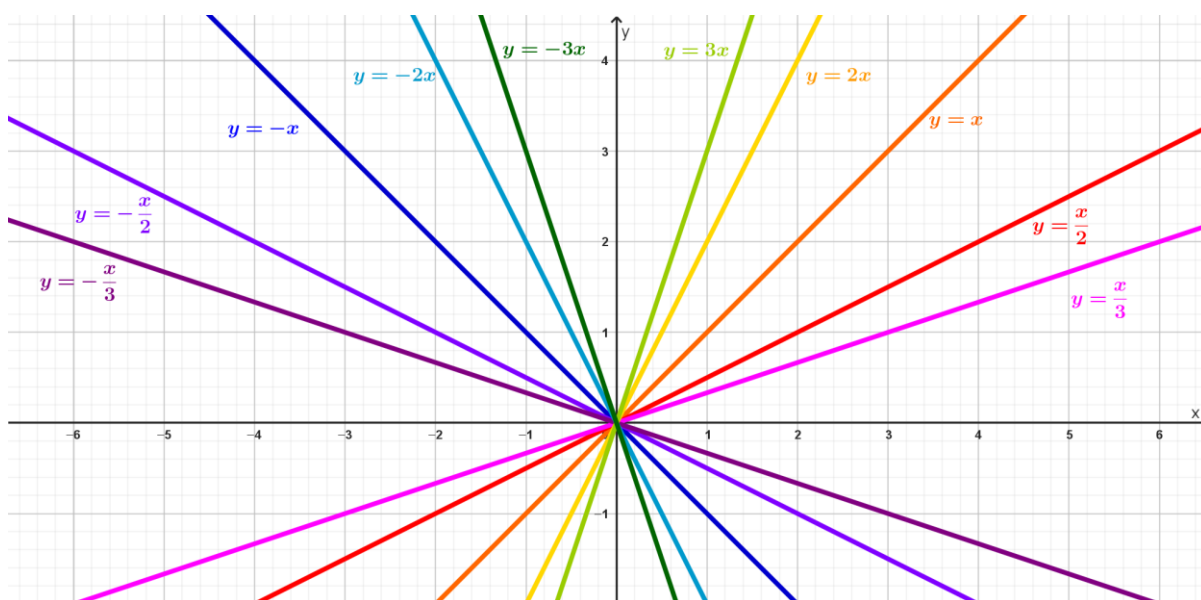
Considerando o triângulo  $P_2RP_3$ , vamos calcular a razão  $\frac{P_3R}{P_2R} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} =$   
 $\frac{ax_3 + b - (ax_2 + b)}{x_3 - x_2} = \frac{a \cdot (x_3 - x_2)}{x_3 - x_2} = a.$

Assim, sabemos que  $P_1QP_2$  e  $P_2RP_3$  são triângulos retângulos e que vale a proporção  $\frac{P_2Q}{P_1Q} = \frac{P_3R}{P_2R}$ , isto é, os triângulos  $P_1QP_2$  e  $P_2RP_3$  são semelhantes pelo caso LAL e, portanto, os ângulos correspondentes  $\widehat{QP_1P_2} = \alpha$  e  $\widehat{RP_2P_3} = \beta$  são congruentes. Daí conclui-se que os pontos  $P_1, P_2$  e  $P_3$  são colineares.

Lembramos que o gráfico de uma função afim nunca será uma reta vertical nem horizontal. A reta vertical jamais representará uma função, pois existem infinitos valores de  $y$  que correspondem a um único valor de  $x$ . A reta horizontal representa o gráfico de uma função constante.

Considerando  $f(x) = ax + b$  uma função afim qualquer, chamamos  $a$  de coeficiente angular e  $b$  de coeficiente linear da função afim. O coeficiente angular  $a$  está relacionado com a inclinação da reta em relação ao eixo  $Ox$ . Sua variação pode ser observada nos exemplos abaixo:

Figura 56 - Variação do coeficiente angular "a" em retas do tipo  $y = ax$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Perceba que se o coeficiente  $a$  da função  $f(x) = ax + b$  é positivo então  $f(x)$  é crescente. E se o coeficiente  $a$  é negativo então  $f(x)$  é decrescente. De fato, inicialmente considere o caso em que  $a > 0$ . Escolha dois elementos quaisquer do domínio:  $x_1$  e  $x_2$  tais que  $x_1 < x_2$ . Então:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow a \cdot x_1 < a \cdot x_2 \Rightarrow a \cdot x_1 + b < a \cdot x_2 + b \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Ou seja, se  $a > 0$  então  $f(x)$  é crescente.

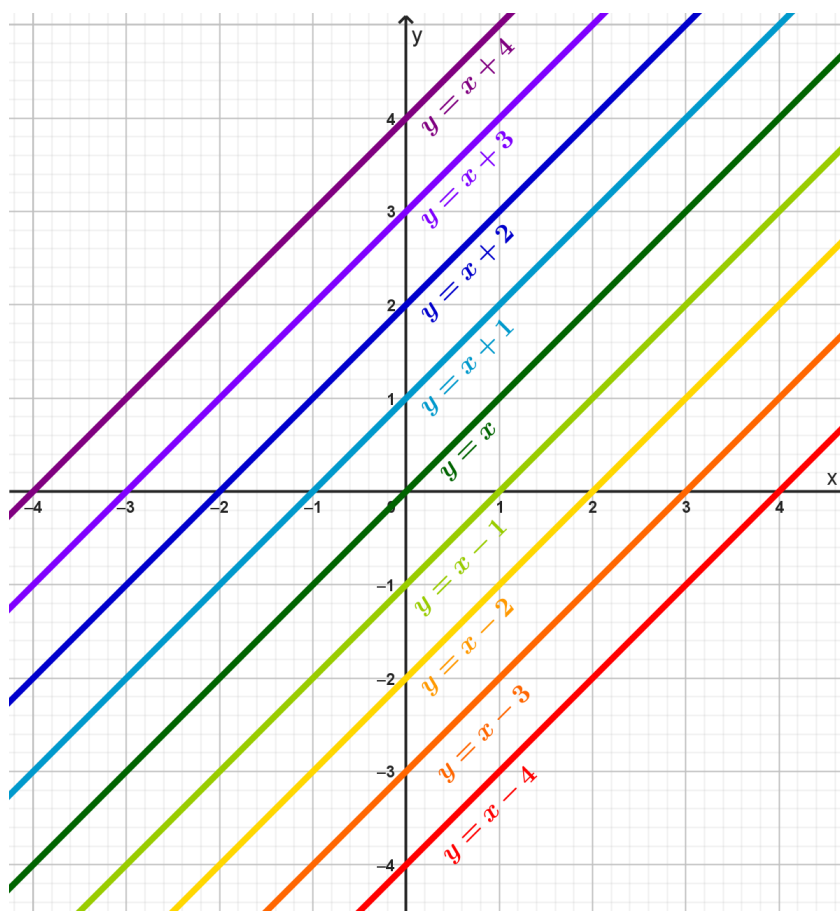
Considerando o caso em que  $a < 0$ , temos:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow a \cdot x_1 > a \cdot x_2 \Rightarrow a \cdot x_1 + b > a \cdot x_2 + b \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Ou seja, se  $a < 0$  então  $f(x)$  é decrescente.

Por fim, tratemos do coeficiente linear  $b$  da função afim  $f(x) = ax + b$ . Como  $f(0) = b$ , temos que  $b$  é a ordenada do ponto de intersecção do gráfico de  $f$  (que é uma reta) com o eixo  $Oy$  (vertical). Abaixo, o leitor encontra diversas funções afim com o mesmo coeficiente angular ( $a = 1$ , no caso) e diferentes coeficientes lineares, para conseguir visualizar o que uma variação nos coeficientes lineares pode gerar:

Figura 57 - Variação do coeficiente linear "b" em retas do tipo  $y = x + b$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

### 6.5.3 Função Quadrática

Função quadrática é toda função da forma:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais e  $a \neq 0$ .

Abaixo, desenvolvemos a forma canônica do trinômio, fazendo o completamento do quadrado:

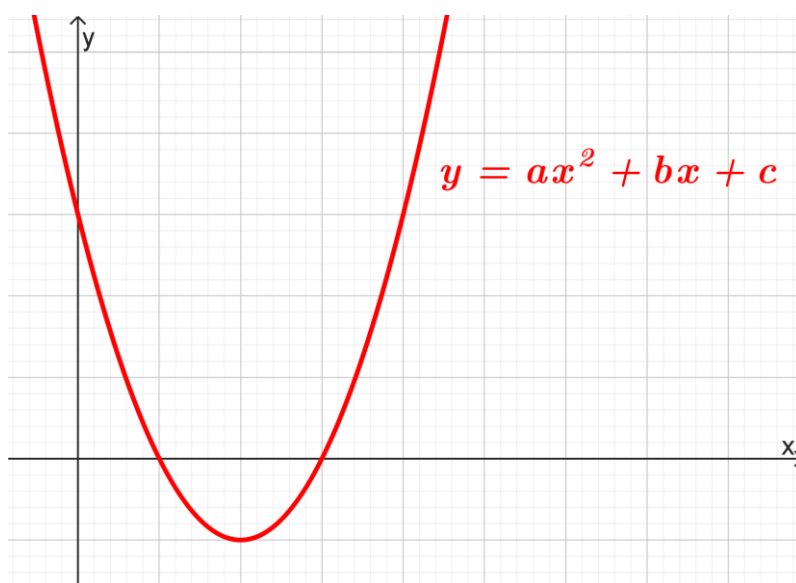
$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax^2 + bx + c \\
 &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
 &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - a \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \\
 &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + c \\
 &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c
 \end{aligned}$$

$$= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Observe que essa função pode ser expressa pela soma de duas parcelas, a primeira, dependente de  $x$  e a segunda, que é constante. O termo  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$  é sempre maior do que ou igual a zero, e seu valor mínimo ocorre quando  $x = -\frac{b}{2a}$ . Portanto, se  $a > 0$  temos que o valor mínimo da função é  $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ . Se  $a < 0$ ,  $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$  é o valor máximo de  $f(x)$  para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ .

O gráfico cartesiano de uma função quadrática é uma parábola.

Figura 58 - Gráfico cartesiano de uma função quadrática.

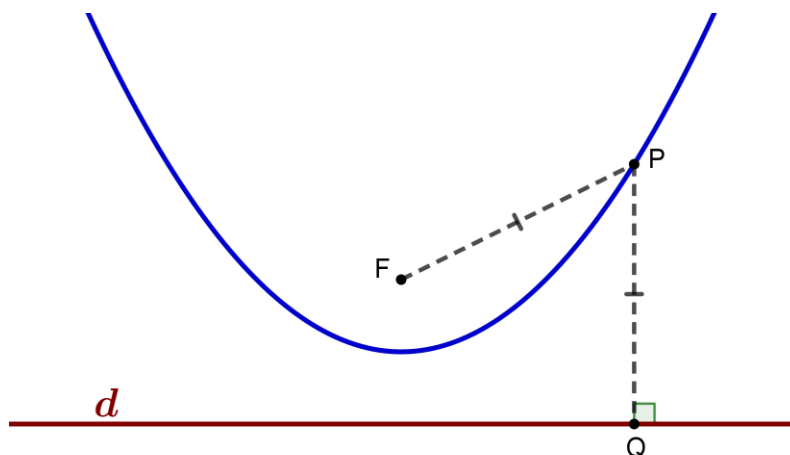


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

A demonstração de que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola foge do escopo deste trabalho, mas pode ser encontrada no 7º volume da coleção Fundamentos de Matemática Elementar (Iezzi, 2013).

A Parábola é definida como o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de um ponto fixo  $F$ , chamado foco, e de uma reta fixa  $d$ , chamada diretriz.

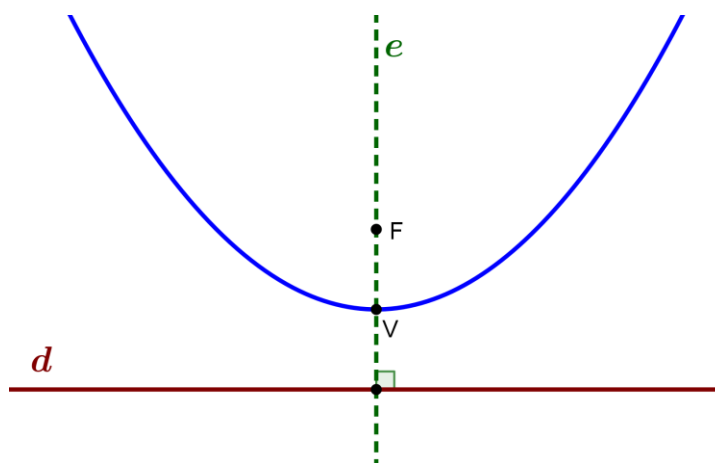
Figura 59 - Definição Geométrica da Parábola.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Quando traçamos a reta perpendicular à diretriz que passa pelo foco temos o chamado de "eixo de simetria" da parábola. O ponto de intersecção entre a parábola e seu eixo de simetria é chamado de "vértice" e é o ponto onde a parábola é mais acentuadamente curvada. Na figura abaixo, temos que  $e$  é o eixo de simetria da parábola representada.

Figura 60 - Eixo de simetria da parábola.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

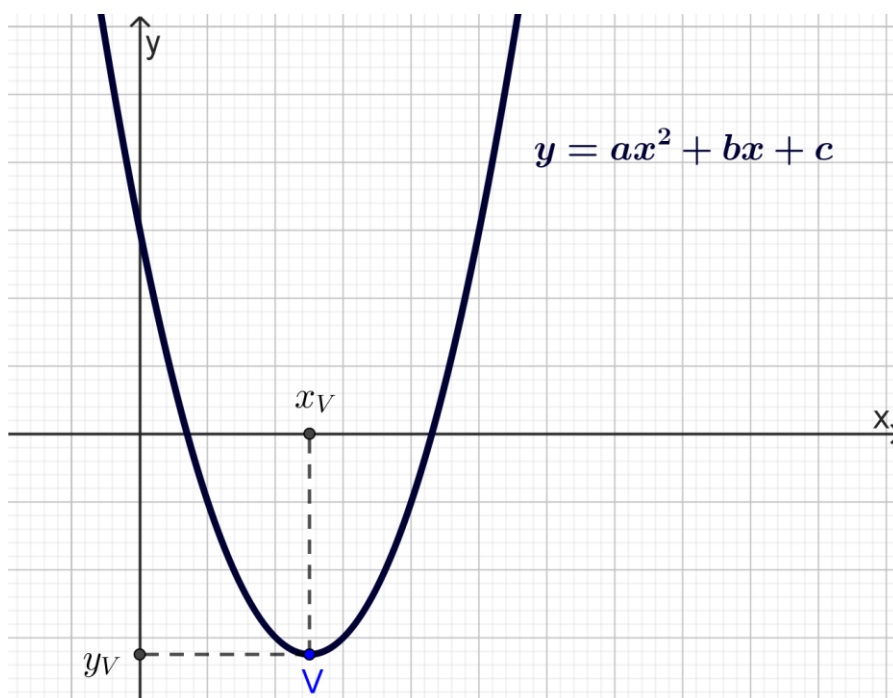
Considerando a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , o eixo de simetria de seu gráfico é a reta vertical  $x = -\frac{b}{2a}$ . Para demonstrarmos este fato basta notar que:

$$\begin{aligned} f\left(x - \frac{b}{2a}\right) &= a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(x - \frac{b}{2a}\right) + c \\ &= a\left(x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + bx - \frac{b^2}{2a} + c \\ &= ax^2 - bx + \frac{b^2}{4a} + bx - \frac{b^2}{2a} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= ax^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
 f\left(-x - \frac{b}{2a}\right) &= a\left(-x - \frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-x - \frac{b}{2a}\right) + c \\
 &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - bx - \frac{b^2}{2a} + c \\
 &= ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - bx - \frac{b^2}{2a} + c \\
 &= ax^2 - \frac{b^2}{4a} + c.
 \end{aligned}$$

Assim, temos a igualdade  $f\left(x - \frac{b}{2a}\right) = f\left(-x - \frac{b}{2a}\right)$ , o que nos permite concluir que pontos do domínio, simétricos em relação à reta  $x = -\frac{b}{2a}$ , possuem imagens iguais, ou seja, o gráfico de  $f(x)$  é simétrico em relação à reta  $x = -\frac{b}{2a}$ . Portanto, o vértice  $V = (x_V, y_V)$  da parábola que representa a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  é o ponto de coordenadas:  $x_V = -\frac{b}{2a}$  e  $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ , em que  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

Figura 61 - Coordenadas do vértice de uma parábola.

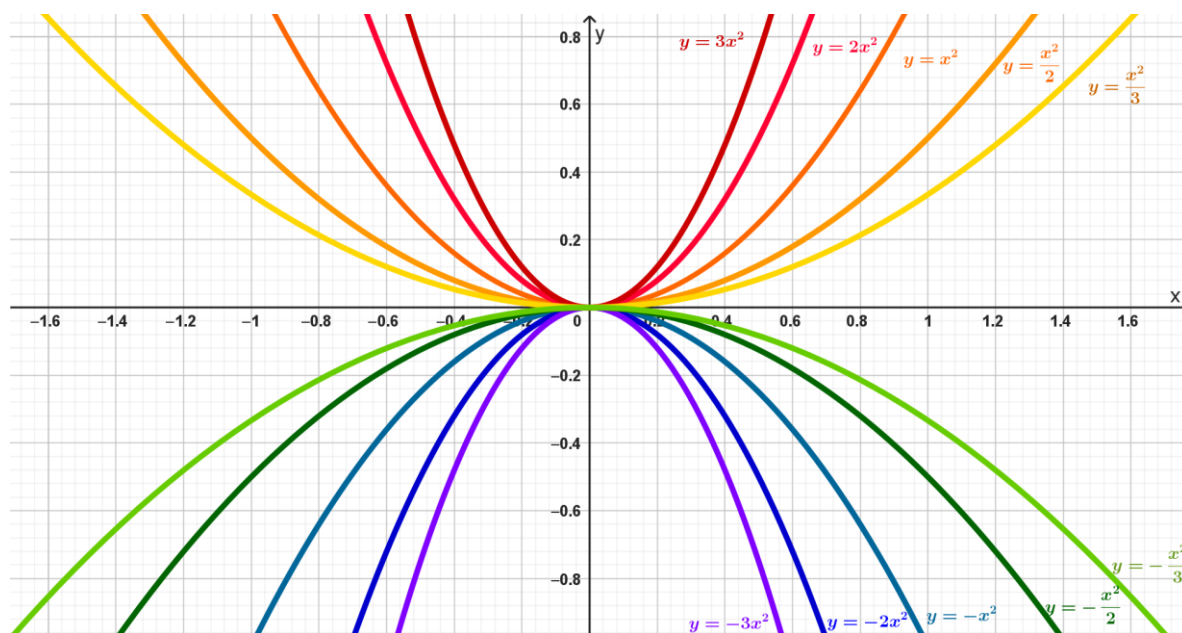


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Note que, se o gráfico de  $f(x)$  tem concavidade voltada para cima, então  $f(x)$  possui um valor mínimo e, se o gráfico de  $f(x)$  tem concavidade voltada para baixo, então  $f(x)$  possui um valor máximo.

Nos exemplos abaixo podemos observar a variação do coeficiente  $a$  em funções do tipo  $y = ax^2$ :

Figura 62 - Variação do coeficiente "a" em parábolas do tipo  $y = ax^2$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Sabe-se que se o coeficiente  $a$  da função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  é positivo então  $f(x)$  é côncava para cima, e sabe-se que se o coeficiente  $a$  da função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  é negativo então  $f(x)$  é côncava para baixo.

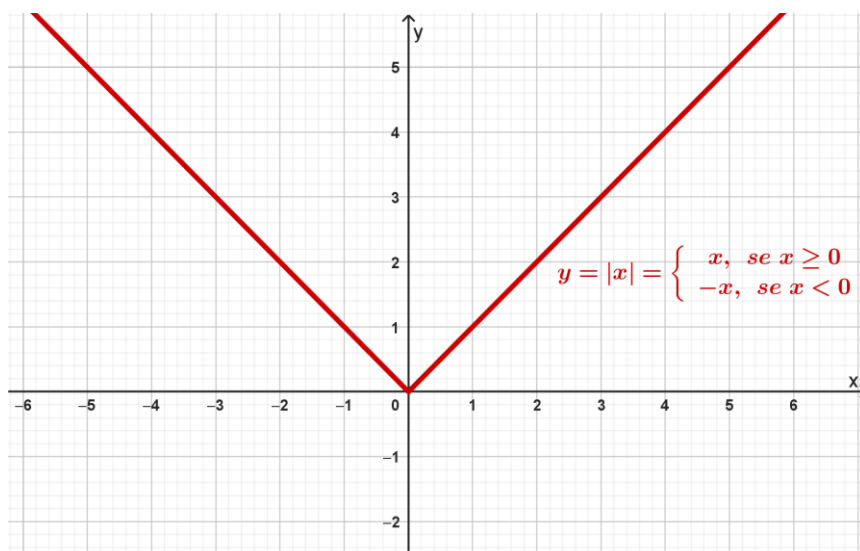
### 6.5.4 Funções de várias sentenças

Uma função definida por mais de uma sentença, também chamada de função por partes ou função segmentada, é uma função matemática composta por diferentes expressões que se aplicam a diferentes intervalos do domínio. Isso significa que, em vez de utilizar uma única fórmula para todos os valores da variável independente, a função utiliza diferentes fórmulas dependendo do intervalo em que esse valor se encontra.

Esse tipo de função é especialmente útil para modelar situações em que o comportamento de uma grandeza muda conforme certas condições. Por exemplo, tarifas que variam conforme o consumo, impostos progressivos, ou movimentos com diferentes velocidades em diferentes trechos podem ser representados por funções definidas por partes. A notação matemática geralmente envolve o uso de chaves para indicar as diferentes expressões e os respectivos intervalos aos quais se aplicam.

Como exemplo, trazemos a Função Modular:

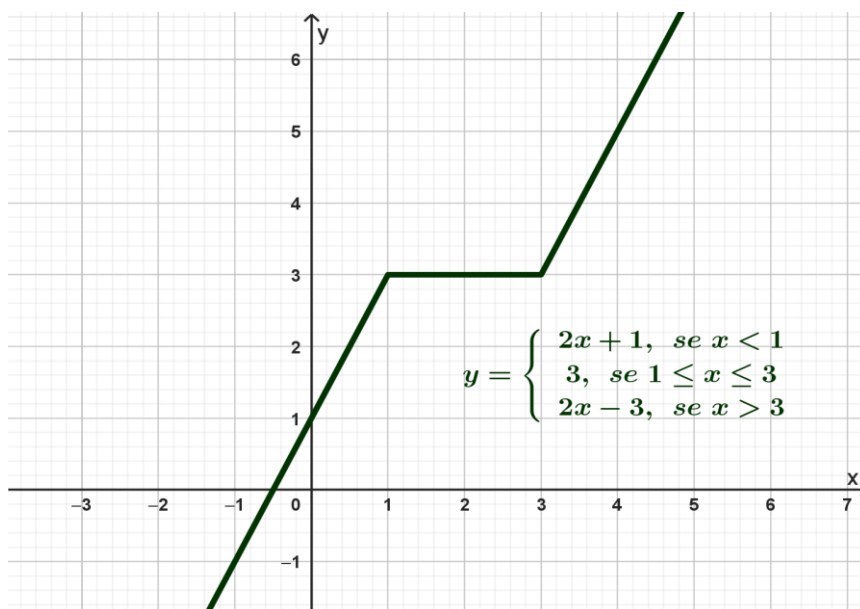
Figura 63 - Gráfico da função modular.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

E uma função definida por três sentenças:

Figura 64 - Gráfico de uma função definida em três partes.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

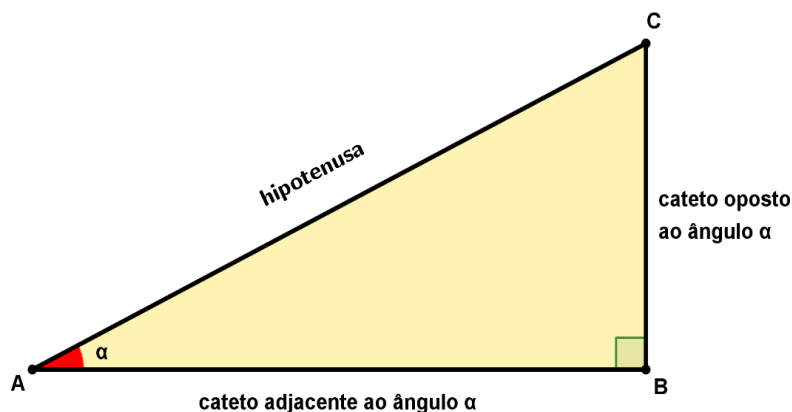
## 6.6 Trigonometria

A seguir são abordados alguns tópicos de Trigonometria, pois na segunda sequência de atividades, destinada a alunos do 3º ano do Ensino Médio, constarão problemas envolvendo Funções Trigonométricas.

### 6.6.1 Razões Trigonométricas para ângulos agudos.

Considere o triângulo retângulo ABC da figura abaixo, em que um dos ângulos agudos tem medida  $\alpha$ .

Figura 65 - Triângulo retângulo



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Chamamos de seno de  $\alpha$  a razão entre o cateto oposto ao ângulo  $\alpha$  e a hipotenusa do triângulo.

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

Chamamos de cosseno de  $\alpha$  a razão entre o cateto adjacente ao ângulo  $\alpha$  e a hipotenusa do triângulo.

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

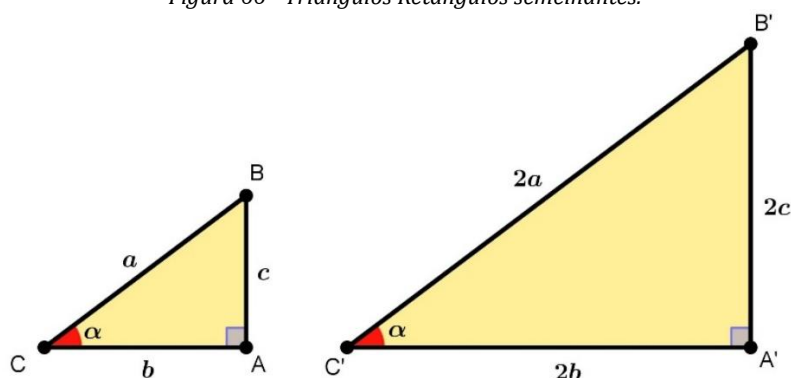
Chamamos de tangente de  $\alpha$  a razão entre o cateto oposto ao ângulo  $\alpha$  e o cateto adjacente ao ângulo  $\alpha$ .

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{cateto adjacente ao ângulo } \alpha}$$

Triângulos retângulos com ângulos congruentes são semelhantes. Triângulos semelhantes possuem lados proporcionais, o que significa que a razão entre os lados correspondentes será sempre a mesma. Se, por exemplo, duplicarmos as medidas dos lados de um triângulo retângulo, as medidas dos ângulos serão mantidas, e as razões trigonométricas para um determinado ângulo permanecerão inalteradas.

Na figura a seguir temos os triângulos retângulos semelhantes ABC e A'B'C', de modo que  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{BC} = a$  e  $\overline{AC} = b$  e  $\overline{A'B'} = 2c$ ,  $\overline{B'C'} = 2a$  e  $\overline{A'C'} = 2b$ . Assim,  $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'} = \alpha$ . Note que no triângulo ABC temos:  $\text{sen } \alpha = \frac{c}{a}$ ,  $\text{cos } \alpha = \frac{b}{a}$  e  $\text{tg } \alpha = \frac{c}{b}$ , e no triângulo A'B'C' temos:  $\text{sen } \alpha = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$ ,  $\text{cos } \alpha = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}$  e  $\text{tg } \alpha = \frac{2c}{2b} = \frac{c}{b}$ .

Figura 66 - Triângulos Retângulos semelhantes.

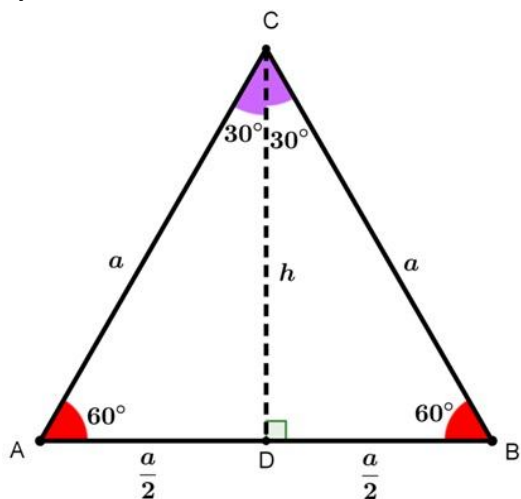


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Considerando as razões trigonométricas já definidas, vamos calcular os senos, cossenos e tangentes dos arcos notáveis, que são os arcos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ .

Vamos considerar um triângulo equilátero ABC de lado  $a$ . É importante observar que este triângulo possui três ângulos de igual medida  $60^\circ$ . Traçando a altura  $\overline{CD} = h$ , dividimos o triângulo equilátero em dois triângulos retângulos congruentes: ADC e BDC. Desta forma, CD é também bissetriz e mediana. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BDC, temos:

Figura 67 - Cálculo da medida da altura de um triângulo equilátero.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

$$\overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{BC}^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow h^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Desta forma podemos calcular as razões trigonométricas dos arcos de  $30^\circ$  e  $60^\circ$ :

$$\text{sen } 30^\circ = \text{cos } 60^\circ = \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2},$$

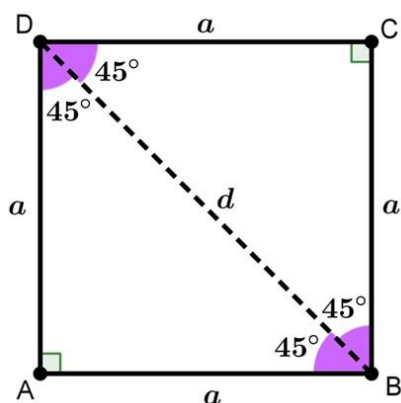
$$\text{sen } 60^\circ = \text{cos } 30^\circ = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\overline{DB}}{\overline{CD}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Vamos considerar um quadrado ABCD de lado  $a$ . É importante observar que este quadrado possui quatro ângulos de igual medida:  $90^\circ$ . Traçando a diagonal  $\overline{BD} = d$ , dividimos o quadrado em dois triângulos retângulos congruentes: ABD e BCD. Desta forma, BD é também bissetriz. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABD, temos:

Figura 68 - Cálculo da medida da diagonal de um quadrado.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

$$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{BD}^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + a^2 = d^2$$

$$\Leftrightarrow d^2 = 2a^2$$

$$\Leftrightarrow d = \sqrt{2a^2}$$

$$\Leftrightarrow d = a\sqrt{2}$$

Desta forma podemos calcular as razões trigonométricas do arco de  $45^\circ$ :

$$\text{sen } 45^\circ = \text{cos } 45^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{a}{a} = 1$$

Tabela dos Arcos Notáveis:

	Seno	Cosseno	Tangente
$30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

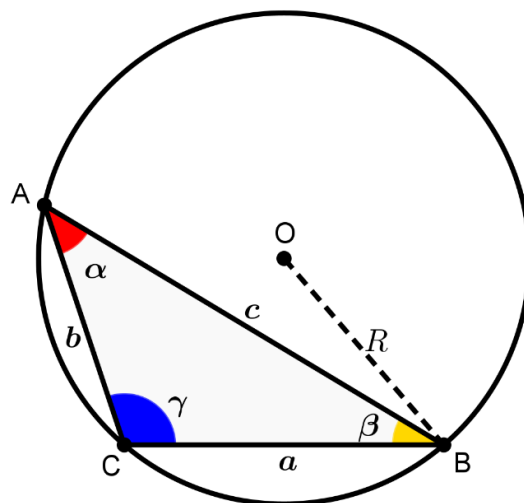
### 6.6.2 Lei dos Senos

A Lei dos Senos diz que dado um triângulo qualquer ABC, em que  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{AC} = b$  e  $\overline{BC} = a$  e  $B\hat{A}C = \alpha$ ,  $A\hat{B}C = \beta$  e  $A\hat{C}B = \gamma$ . Então:

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma} = 2R$$

Em outras palavras: em todo triângulo, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos, e a razão de proporcionalidade é a medida do diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo.

Figura 69 - Triângulo ABC e seu círculo circunscrito.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

### 6.6.3 Lei dos Cossenos

A Lei dos Cossenos diz que dado um triângulo qualquer  $ABC$ , em que  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{AC} = b$  e  $\overline{BC} = a$  e  $B\hat{A}C = \alpha$ ,  $A\hat{B}C = \beta$  e  $A\hat{C}B = \gamma$ .

Então:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

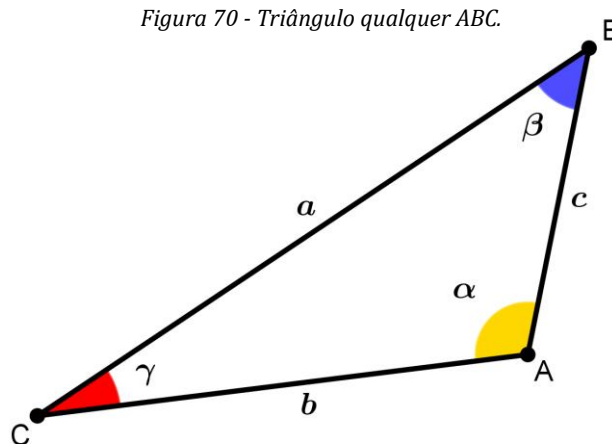


Figura 70 - Triângulo qualquer  $ABC$ .

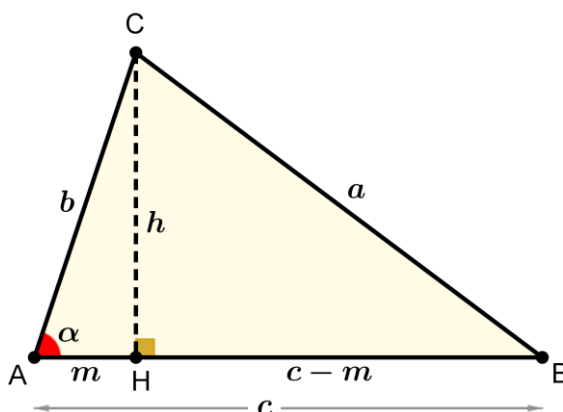
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Dito de outra forma: em todo triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros lados, menos o dobro do produto destas medidas pelo cosseno do ângulo que eles formam.

Demonstração: Vamos dividir a prova em dois casos: quando o triângulo é acutângulo, ou quando o triângulo é obtusângulo.

1º caso: Seja  $ABC$  um triângulo acutângulo. Seja  $\overline{CH} = h$  a altura relativa à base  $AB$ .

Figura 71 - Triângulo Acutângulo



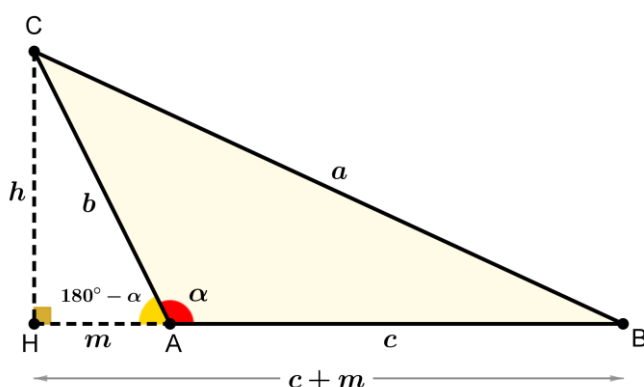
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Seja  $\overline{AH} = m$ , logo  $\overline{HB} = c - m$ . Como  $AHC$  e  $BHC$  são triângulos retângulos, vamos aplicar o Teorema de Pitágoras. Assim,  $m^2 + h^2 = b^2$  e  $(c - m)^2 + h^2 = a^2$ . Isso implica que  $h^2 = b^2 - m^2 = a^2 - (c - m)^2$ . Logo,  $b^2 - m^2 = a^2 - c^2 + 2cm - m^2$ , o que equivale a:  $b^2 = a^2 - c^2 + 2cm$ , isto é,  $a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$ . Lembramos que no triângulo

retângulo AHC temos  $\cos \alpha = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{m}{b}$ , o que implica que  $m = b \cdot \cos \alpha$ . Desta forma,  $a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot b \cdot \cos \alpha$ , ou seja,  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$ .

2º caso: Seja ABC um triângulo obtusângulo com  $B\hat{A}C = \alpha > 90^\circ$ . Seja  $\overline{CH} = h$  a altura relativa à base AB.

Figura 72 - Triângulo Obtusângulo

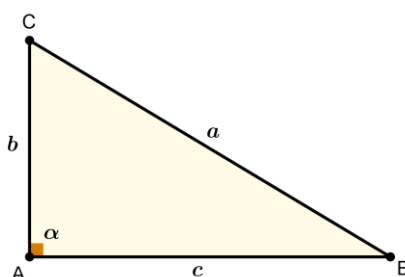


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Seja  $\overline{HA} = m$ , logo  $\overline{HB} = c + m$ . Como AHC e BHC são triângulos retângulos, vamos aplicar o Teorema de Pitágoras. Assim,  $m^2 + h^2 = b^2$  e  $(c + m)^2 + h^2 = a^2$ . Isso implica que  $h^2 = b^2 - m^2 = a^2 - (c + m)^2$ . Logo,  $b^2 - m^2 = a^2 - c^2 - 2cm - m^2$ , o que equivale a:  $b^2 = a^2 - c^2 - 2cm$ , isto é,  $a^2 = b^2 + c^2 + 2cm$ . Lembramos que no triângulo retângulo AHC temos  $\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{\overline{HA}}{\overline{AC}} = \frac{m}{b}$ , o que implica que  $m = b \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$ . Como  $\alpha$  e  $180^\circ - \alpha$  são arcos simétricos em relação ao eixo vertical, então  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ . Assim,  $m = b \cdot (-\cos \alpha) = -b \cdot \cos \alpha$ . Substituindo este valor de  $m$  na equação  $a^2 = b^2 + c^2 + 2cm$ , temos  $a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot (-b \cdot \cos \alpha)$ , o que é equivalente a:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$ .

Observação: No caso em que  $\alpha = 90^\circ$ , a Lei dos Cossenos se resume particularmente no Teorema de Pitágoras.

Figura 73 - Triângulo Retângulo.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

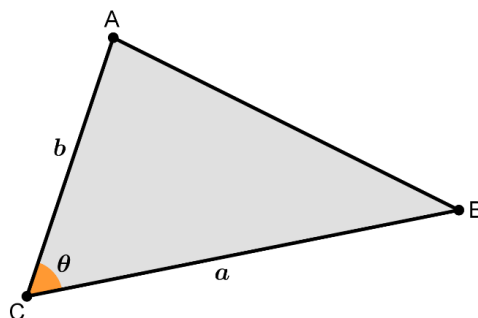
Assim, a lei dos cossenos é válida para um triângulo qualquer.

### 6.6.4 Fórmula Trigonométrica para a Área de um Triângulo

Seja  $ABC$  um triângulo qualquer. Se são conhecidos dois lados ( $\overline{AC} = b$  e  $\overline{BC} = a$ ) e o ângulo formado entre eles ( $\widehat{ACB} = \theta$ ), então a área do triângulo é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen } \theta.$$

Figura 74 - Triângulo qualquer  $ABC$ .

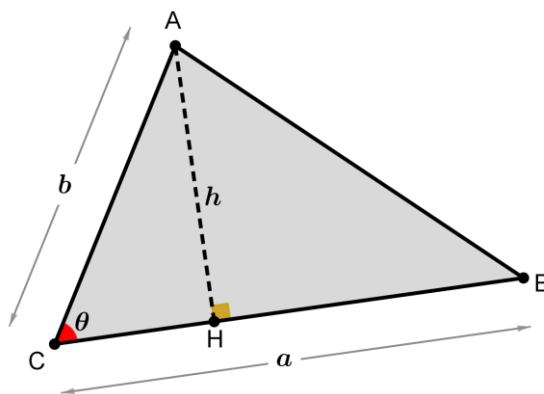


Fonte: Elaborado pelo autor, (2024).

Demonstração.

1º Caso: Seja  $ABC$  um triângulo acutângulo. Seja  $\overline{AH} = h$  a medida da altura relativa à base  $BC$ .

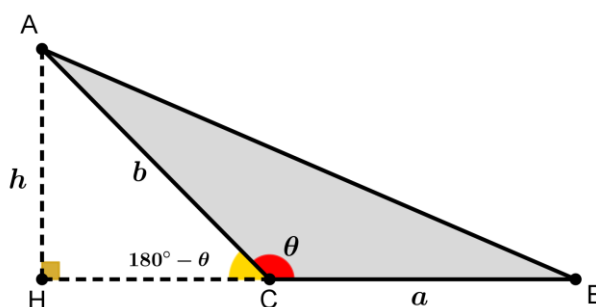
Figura 75 -  $ABC$  é triângulo acutângulo.



Fonte: Elaborado pelo autor, (2025).

2º Caso: Seja  $ABC$  um triângulo obtusângulo com  $\widehat{ACB} > 90^\circ$ . Seja  $\overline{AH} = h$  a medida da altura relativa à base  $BC$ . Como  $AHC$  é triângulo retângulo, temos que  $\text{sen } \theta = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{h}{b}$ , logo,  $h = b \cdot \text{sen } \theta$ . Portanto,  $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen } \theta$ .

Figura 76 -  $ABC$  é triângulo obtusângulo.



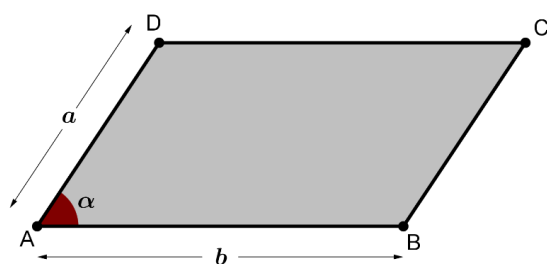
Fonte: Elaborado pelo autor, (2025).

Como  $AHC$  é triângulo retângulo, temos que  $\sin(180^\circ - \theta) = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{h}{b}$ , logo,  $h = b \cdot \sin(180^\circ - \theta)$ . Como  $\theta$  e  $180^\circ - \theta$  são arcos simétricos em relação ao eixo vertical, então  $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ . Portanto,  $h = b \cdot \sin \theta$  e  $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \theta$ .

No caso em que  $B\hat{A}C = 90^\circ$  temos que  $AC$  e  $BC$  são catetos, logo  $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin 90^\circ$ , já que  $\sin 90^\circ = 1$ .

Assim, a fórmula  $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \theta$  é válida para um triângulo qualquer.

Figura 77 -  $ABCD$  é um paralelogramo.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

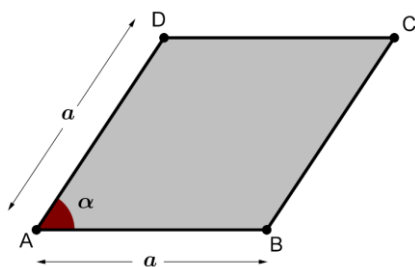
*Consequência 1:* A área do paralelogramo pode ser expressa pelo produto das medidas de dois lados consecutivos pelo seno do ângulo formado entre eles.

$$A = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

Se traçarmos a diagonal  $BD$  teremos que  $ABCD$  é decomposto nos triângulos  $ABD$  e  $CDB$ , que são congruentes. Desta forma, temos:

$$A = 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha \right) = a \cdot b \cdot \sin \alpha .$$

Figura 78 -  $ABCD$  é um losango.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

*Consequência 2:* A área do losango pode ser expressa pelo produto do quadrado da medida de seu lado pelo seno de um de seus ângulos.

$$A = a^2 \cdot \sin \alpha$$

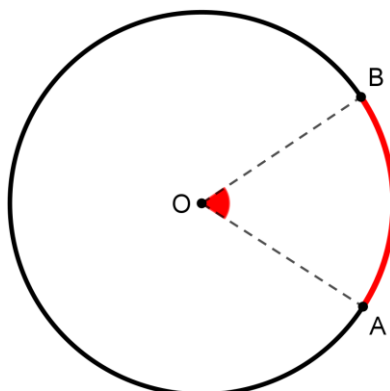
Como o losango é um paralelogramo que possui os quatro lados congruentes, basta fazermos  $a = b$  na expressão  $A = a \cdot b \cdot \sin \alpha = a \cdot a \cdot \sin \alpha = a^2 \cdot \sin \alpha$ .

### 6.6.5 Medidas de Arcos e Ângulos

Considere uma circunferência de centro  $O$  e dois pontos distintos,  $A$  e  $B$ , marcados sobre ela. Assim ficam definidos dois arcos com extremidades em  $A$  e  $B$ : um arco será referente à parte assinalada na figura abaixo (o percurso mais curto entre  $A$  e  $B$ ) e o outro arco será relativo à parte não assinalada (o percurso mais longo entre  $A$  e  $B$ ). Nessa construção fica implícita a existência de um ângulo central correspondente a cada arco

tomado. Consideraremos que um arco tem a mesma medida de seu ângulo central correspondente.

*Figura 79 - Arco AB definido na circunferência.*

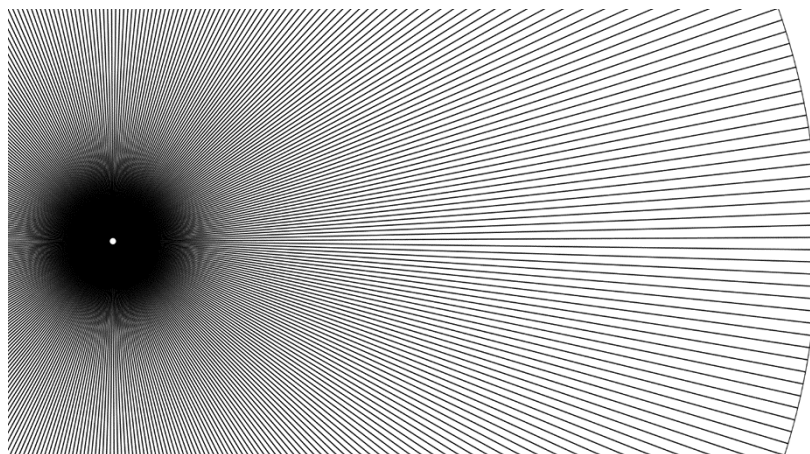


*Fonte: Elaborado pelo autor (2024).*

Para medir um arco, devemos compará-lo a outro, de medida unitária. Para isto, utilizamos, por exemplo, os seguintes sistemas de medidas:

Grau: um arco unitário de  $1^\circ$  (grau) corresponde a  $\frac{1}{360}$  de uma circunferência, isto é, se dividirmos uma circunferência em 360 partes iguais, cada parte está associada ao ângulo de  $1^\circ$  (grau).

*Figura 80 - Detalhe de um círculo dividido em 360 partes.*



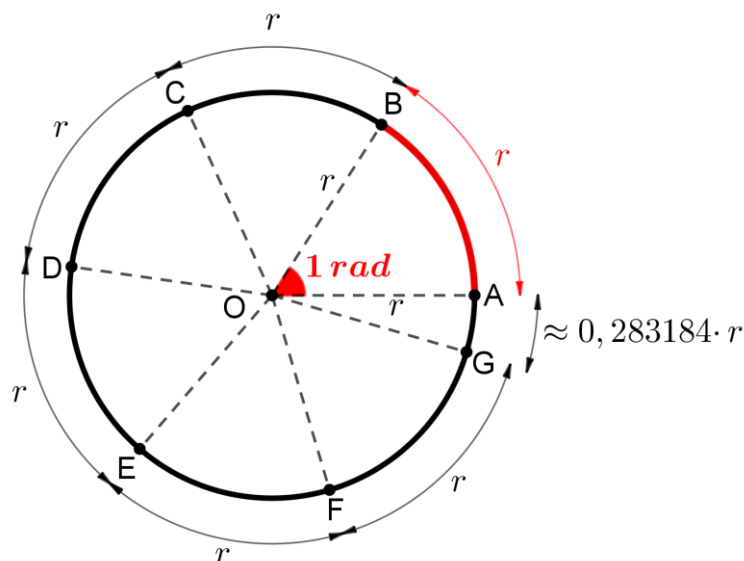
*Fonte: Elaborado pelo autor (2024).*

Por definição, o ângulo de uma volta completa é um ângulo de  $360^\circ$ .

O grau admite submúltiplos: minutos e segundos de forma que  $1 \text{ grau} = 60 \text{ minutos}$  e  $1 \text{ minuto} = 60 \text{ segundos}$ . Exemplo:  $48^\circ 16' 28''$ , se lê: quarenta e oito graus, dezesseis minutos e vinte e oito segundos.

Radiano: é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio  $r$  da circunferência que contém o arco a ser medido.

Figura 81 - Arco cuja medida é 1 radiano.



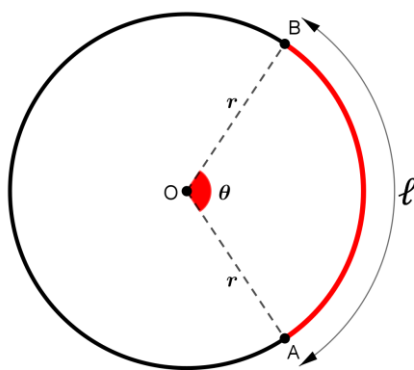
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Um arco de uma volta completa mede  $2\pi$  radianos  $\approx 6,283184$  rad, ou ainda  $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$ , logo  $1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,295779^\circ$ .

Uma medida angular em radianos é uma grandeza adimensional, pois trata-se da razão entre o comprimento do arco e o raio. As mesmas unidades no numerador e no denominador se cancelam, produzindo uma quantidade sem unidade, isto é, um número real. Por esta razão raramente se usa o símbolo rad para expressar ângulos em radianos.

Comprimento de um arco: dada uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$  sobre a qual está definido um arco  $AB$  cujo ângulo central correspondente tem medida  $A\hat{O}B = \theta$ , em radianos.

Figura 82 - Comprimento de um arco.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

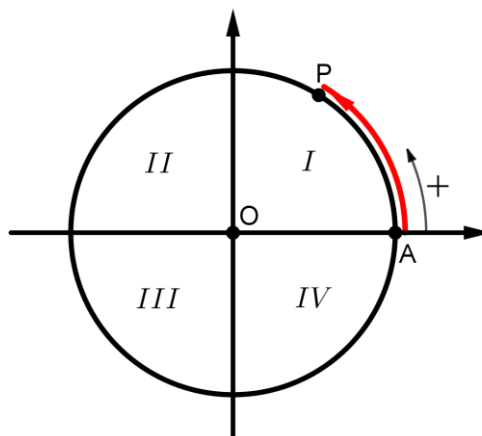
Se  $\ell$  é a medida do comprimento do arco  $AB$ , então:

$$\frac{\ell}{\text{Comprimento da circunferência}} = \frac{\theta}{2\pi}. \text{ Então, temos } \frac{\ell}{2\pi r} = \frac{\theta}{2\pi} \text{ e, portanto, } \ell = \theta \cdot r.$$

### 6.6.6 Ciclo Trigonométrico

Vamos considerar uma circunferência de raio unitário e de centro  $O$ . Vamos fixar dois eixos perpendiculares entre si, passando por  $O$ : um eixo horizontal com sentido positivo para a direita, e o outro eixo vertical, com sentido positivo para cima. Os algarismos romanos especificam os quadrantes, que são as quatro partes em que o círculo fica dividido. Vamos associar a cada número real um ponto desta circunferência, começando pelo número zero, que será associado ao ponto  $A$  que chamaremos de origem dos arcos. A este sistema de eixos e círculo unitário orientado denominamos Ciclo Trigonométrico. Vamos imaginar um ponto  $P$  se deslocando sobre esta circunferência no sentido anti-horário, considerado positivo. Então teremos o arco  $AP$ , com origem em  $A$  e extremidade em  $P$ .

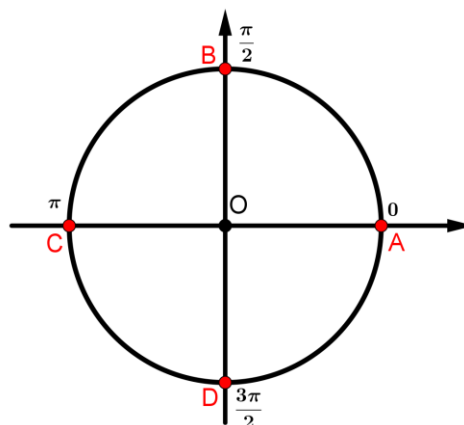
Figura 83 - Ciclo Trigonométrico e arco marcado no sentido anti-horário.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Como o raio deste círculo é igual a 1, o comprimento da circunferência é  $2\pi$ , o que garante que a cada número real  $x$ , com  $0 \leq x < 2\pi$ , podemos associar uma posição de  $P$  sobre a circunferência. Assim, temos como exemplos os pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$  associados respectivamente aos números reais  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  e  $\frac{3\pi}{2}$ .

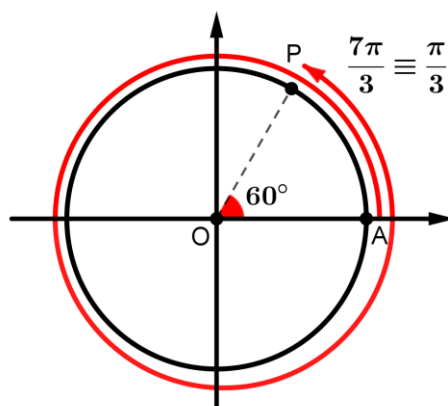
Figura 84 - Ciclo Trigonométrico: extremidades dos quadrantes.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Para qualquer outro valor de  $x \geq 2\pi$ , o ponto descreve um percurso (arco) no sentido anti-horário, cujo comprimento é  $x$ , e na extremidade deste arco se marca o ponto P como imagem do número  $x$ . Por exemplo, se desejamos marcar a imagem do número real  $\frac{7\pi}{3}$ , então o ponto P descreve uma volta completa,  $360^\circ$  ( $2\pi$ ), mais um arco de  $60^\circ$  ( $\frac{\pi}{3}$ ), conforme imagem abaixo. Portanto os arcos  $\frac{7\pi}{3}$  e  $\frac{\pi}{3}$  têm a mesma extremidade P, quando marcados no ciclo trigonométrico.

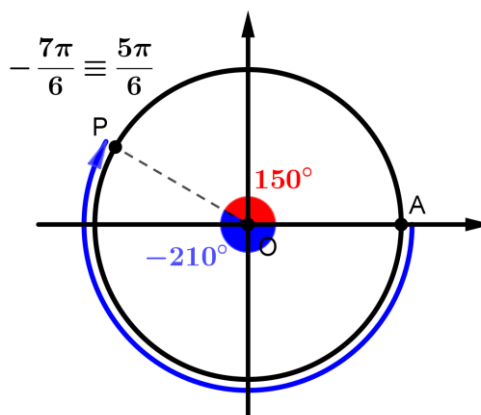
Figura 85 - Exemplo de um arco de mais de uma volta.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Para valores negativos de  $x$ , o percurso descreve um movimento de comprimento  $|x|$  em sentido horário e, na extremidade deste percurso, marca-se o ponto P como imagem de  $x$ . Por exemplo, se quisermos marcar a imagem do número real  $-\frac{7\pi}{6}$ , então o ponto P descreve um arco de  $210^\circ$  em sentido horário, o que é equivalente a descrever um arco de  $360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$  no sentido anti-horário. Portanto os arcos  $-\frac{7\pi}{6}$  e  $\frac{5\pi}{6}$  têm a mesma extremidade P, quando marcados no ciclo trigonométrico.

Figura 86 - Exemplo de arco negativo.

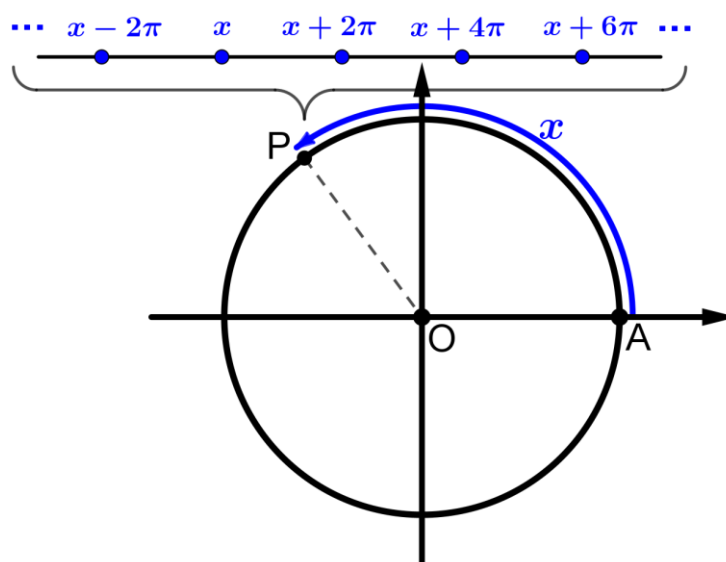


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Assim, de acordo com os exemplos apresentados, percebemos que cada número real está associado a um ponto P do ciclo trigonométrico, no entanto, um mesmo ponto P do ciclo trigonométrico está associado a mais de um número real.

Em realidade, cada ponto P do ciclo trigonométrico está associado a todos os arcos de origem A e extremidade P, e estes arcos diferem apenas por um número inteiro  $k$  de voltas. Assim temos que a expressão geral dos arcos  $AP$  é dada por:  $\widehat{AP} = x + 2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , em que  $x$  é chamado primeira determinação positiva dos arcos  $AP$ , caso  $0 \leq x < 2\pi$ . Todos estes infinitos arcos que possuem a mesma origem e a mesma extremidade no ciclo trigonométrico são ditos Arcos Côngruos.

Figura 87 - O arco  $AP$  está associado a uma família de arcos côngruos.



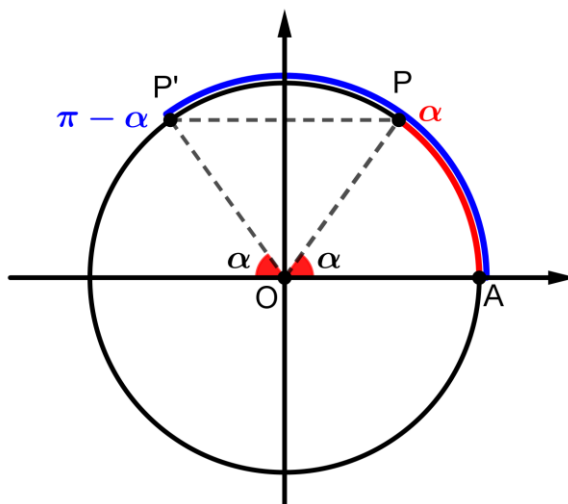
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

### 6.6.7 Simetrias no Ciclo Trigonométrico

#### 1. Simetria em relação ao eixo vertical

Considere um ciclo trigonométrico e um ponto  $P$  do primeiro quadrante tal que  $\widehat{AP} = \alpha$ . Perceba que se  $P'$  for o ponto simétrico de  $P$  em relação ao eixo vertical então  $\widehat{AP'} = \pi - \alpha$ , pois os ângulos centrais assinalados na figura são congruentes. Logo os arcos com extremidade em  $P'$  tem expressão geral  $(\pi - \alpha) + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Figura 88 - Arcos simétricos em relação ao eixo vertical.

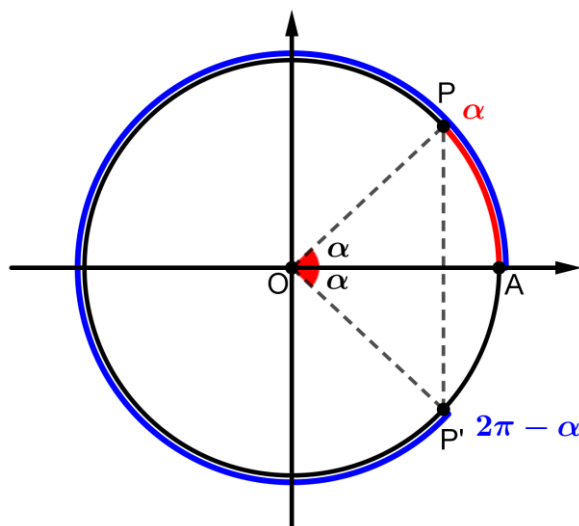


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

#### 2. Simetria em relação ao eixo horizontal

Considere um ciclo trigonométrico e um ponto  $P$  do primeiro quadrante tal que  $\widehat{AP} = \alpha$ . Perceba que se  $P'$  for o ponto simétrico de  $P$  em relação ao eixo horizontal então  $\widehat{AP'} = 2\pi - \alpha$ , ou simplesmente  $\widehat{AP'} = -\alpha$ , pois os ângulos centrais assinalados na figura são congruentes. Logo os arcos com extremidade em  $P'$  tem expressão geral  $-\alpha + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Figura 89 - Arcos simétricos em relação ao eixo horizontal.

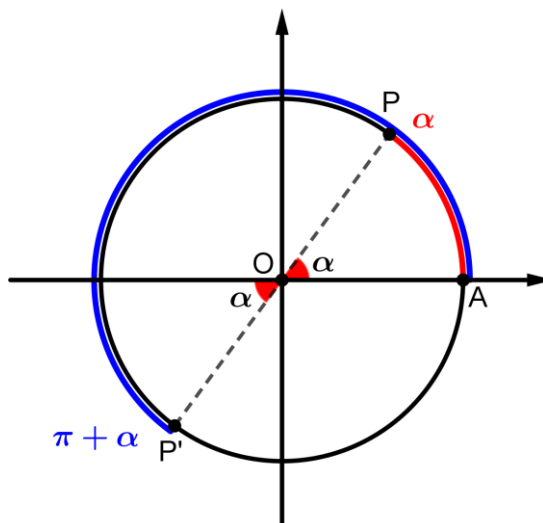


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

### 3. Simetria em relação ao centro

Considere um ciclo trigonométrico e um ponto P do primeiro quadrante tal que  $\widehat{AP} = \alpha$ . Perceba que se P' for o ponto simétrico de P em relação ao centro então  $\widehat{AP'} = \pi + \alpha$ , pois os ângulos centrais assinalados na figura são ângulos opostos pelo vértice, logo são congruentes. Desta forma, os arcos com extremidade em P' tem expressão geral  $(\pi + \alpha) + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

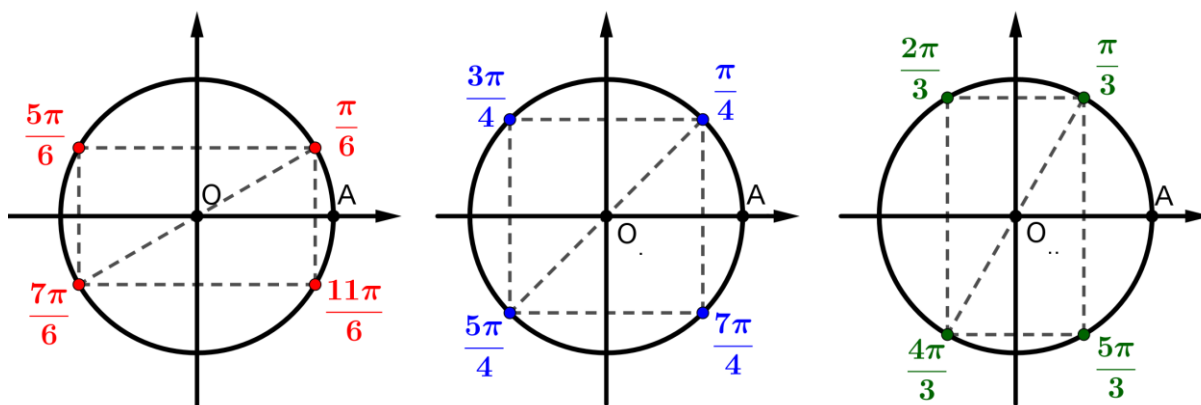
Figura 90 - Arcos simétricos em relação ao centro.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Na figura abaixo podemos observar três famílias de arcos notáveis simétricos. A primeira família é composta pelos arcos  $\frac{\pi}{6}$  ( $30^\circ$ ),  $\frac{5\pi}{6}$  ( $150^\circ$ ),  $\frac{7\pi}{6}$  ( $210^\circ$ ) e  $\frac{11\pi}{6}$  ( $330^\circ$ ). A segunda família é composta pelos arcos  $\frac{\pi}{4}$  ( $45^\circ$ ),  $\frac{3\pi}{4}$  ( $135^\circ$ ),  $\frac{5\pi}{4}$  ( $225^\circ$ ) e  $\frac{7\pi}{4}$  ( $315^\circ$ ). A terceira família é composta pelos arcos  $\frac{\pi}{3}$  ( $60^\circ$ ),  $\frac{2\pi}{3}$  ( $120^\circ$ ),  $\frac{4\pi}{3}$  ( $240^\circ$ ) e  $\frac{5\pi}{3}$  ( $300^\circ$ ).

Figura 91 - Três famílias de arcos notáveis simétricos.

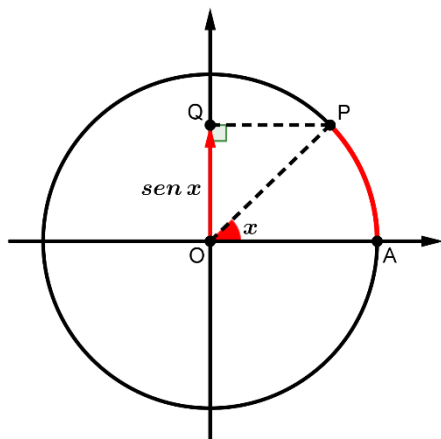


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

## 6.6.8 Funções Trigonométricas

### 6.6.8.1 Função Seno

Figura 92 - Função Seno



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Vamos considerar um ciclo trigonométrico de centro  $O$  e origem  $A$ . Seja  $P$  inicialmente um ponto qualquer do  $1^\circ$  quadrante tal que  $A\hat{O}P = x$ . Seja  $Q$  a projeção ortogonal de  $P$  sobre o eixo vertical.

Podemos notar que  $A\hat{O}P$  e  $O\hat{P}Q$  são ângulos alternos internos e, portanto, são congruentes. Logo  $O\hat{P}Q = x$ . Então  $\sin x = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OQ}}{1} = \overline{OQ}$ . Assim, denominamos  $\sin x$  a medida do segmento orientado  $OQ$ . Desta forma, para encontrarmos o seno de um ângulo, devemos projetar ortogonalmente sua extremidade  $P$  sobre o eixo vertical e medir a distância entre essa projeção  $Q$  e o centro  $O$  do ciclo, sempre considerando a orientação do eixo (para cima).

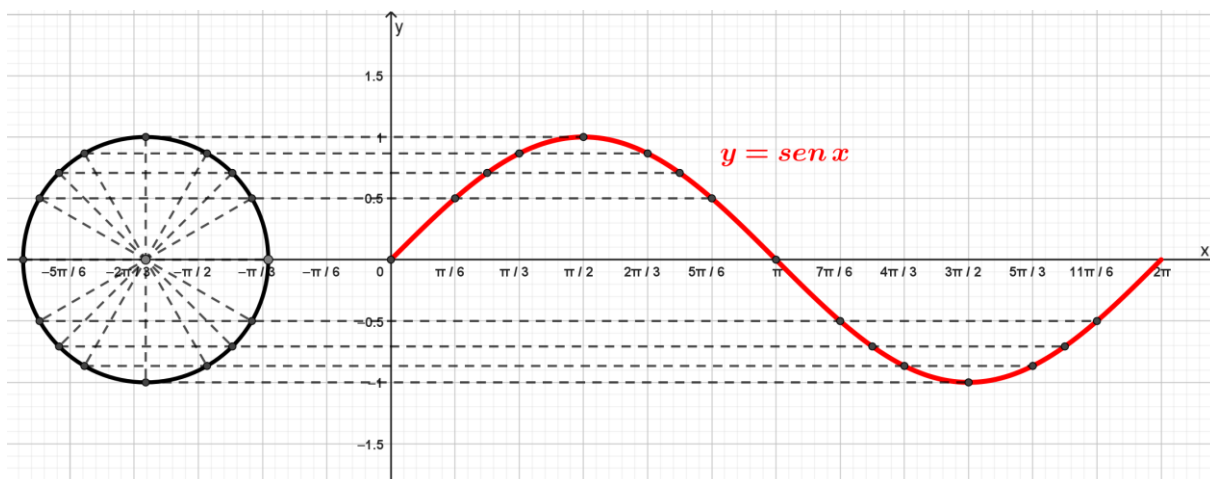
Fazendo construções análogas para situações em que  $P$  está localizado nos outros quadrantes podemos chegar à conclusão que: se  $P \in 1^\circ Q$  ou  $P \in 2^\circ Q$  então o segmento  $OQ$  é orientado para cima, logo  $\sin x > 0$ , e se  $P \in 3^\circ Q$  ou  $P \in 4^\circ Q$ , então o segmento  $OQ$  é orientado para baixo, logo  $\sin x < 0$ . Nos pontos da forma  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , o seno será nulo, já que os pontos  $O$  e  $Q$  serão coincidentes.

A função  $f(x) = \sin x$  possui domínio  $D = \mathbb{R}$ , pois já vimos que a medida  $x$  do ângulo  $A\hat{O}P$  não possui restrição alguma, ou seja, trata-se de um número real qualquer. Além disso, Como o segmento orientado  $OQ$  é sempre interno ao círculo unitário, a função  $f(x) = \sin x$  é limitada e seu conjunto imagem é  $Im = [-1; 1]$ .

A função seno é periódica de período  $p = 2\pi$ .

Abaixo, temos um ciclo de seu gráfico cartesiano representado no intervalo  $[0; 2\pi]$ .

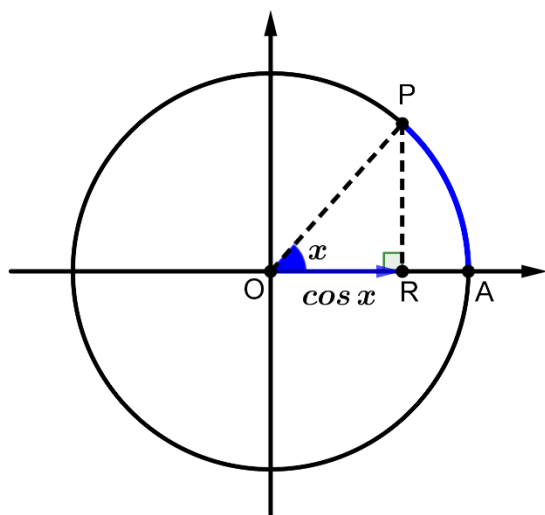
Figura 93 - Gráfico cartesiano da Senoide.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

### 6.6.8.2 Função Cosseno

Figura 94 - Função Cosseno.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Vamos considerar um ciclo trigonométrico de centro  $O$  e origem  $A$ . Seja  $P$  inicialmente um ponto qualquer do  $1^\circ$  quadrante tal que  $\widehat{AOP} = x$ . Seja  $R$  a projeção ortogonal de  $P$  sobre o eixo horizontal.

Logo,  $\cos x = \frac{\overline{OR}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OR}}{1} = \overline{OR}$ . Assim, denominamos  $\cos x$  a medida do segmento orientado  $OR$ . Desta forma, para encontrarmos o cosseno de um ângulo, devemos projetar ortogonalmente sua extremidade  $P$  sobre o eixo horizontal e medir

a distância entre essa projeção  $R$  e o centro  $O$  do ciclo, sempre considerando a orientação do eixo (para a direita).

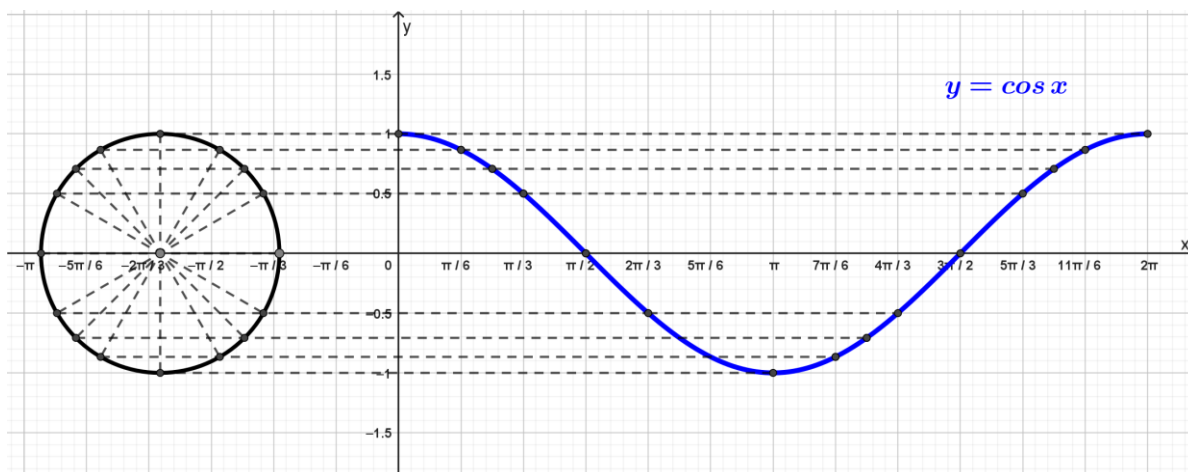
Fazendo construções análogas para situações em que  $P$  está localizado nos outros quadrantes podemos chegar à conclusão que: se  $P \in 1^\circ Q$  ou  $P \in 4^\circ Q$  então o segmento  $OR$  é orientado para a direita, logo  $\cos x > 0$ , e se  $P \in 2^\circ Q$  ou  $P \in 3^\circ Q$ , então o segmento  $OR$  é orientado para a esquerda, logo  $\cos x < 0$ . Nos pontos da forma  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , o cosseno será nulo, já que os pontos  $O$  e  $R$  serão coincidentes.

A função  $f(x) = \cos x$  possui domínio  $D = \mathbb{R}$  e conjunto imagem  $Im = [-1; 1]$ .

A função cosseno é periódica de período  $p = 2\pi$ .

Abaixo, temos um ciclo de seu gráfico representado no intervalo  $[0; 2\pi]$ .

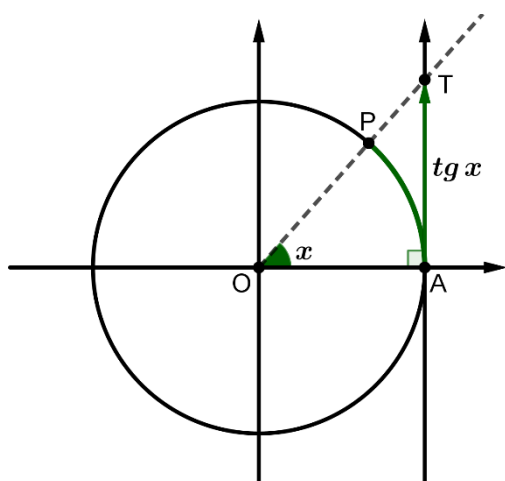
Figura 95 - Gráfico cartesiano da Cossenoide.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

### 6.6.8.3 Função Tangente

Figura 96 - Função Tangente

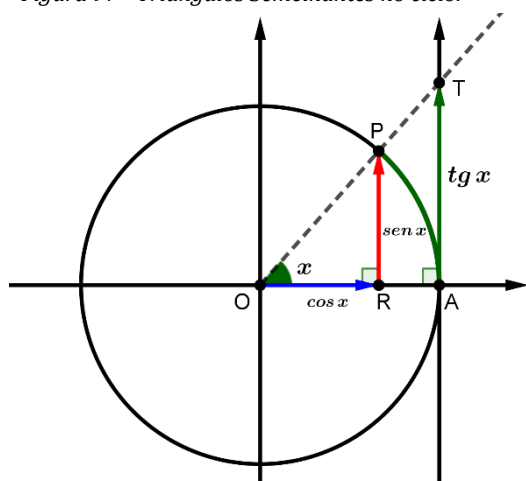


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Vamos considerar o eixo tangente como o eixo perpendicular ao eixo horizontal que passa pelo ponto A.

A função  $f(x) = \operatorname{tg} x$  é definida geometricamente da seguinte forma: considere um ciclo trigonométrico de centro O e origem A. Seja P um ponto qualquer do ciclo tal que  $\widehat{AOP} = x$ . Seja T a intersecção do prolongamento de OP com o eixo tangente. Vamos mostrar que  $\operatorname{tg} x$  é a medida do segmento orientado AT.

Figura 97 - Triângulos Semelhantes no ciclo.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Marcando o ponto R, projeção ortogonal de P sobre o eixo horizontal, temos que  $RP = \operatorname{sen} x$  e que  $OR = \operatorname{cos} x$ . Como os triângulos ORP e OAT são semelhantes (caso AA), temos que  $\frac{\overline{RP}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}}$ , isto é,  $\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = \frac{\overline{AT}}{1}$ , o que é equivalente a  $\overline{AT} = \operatorname{tg} x$ .

Desta forma, para encontrarmos a tangente de um ângulo, devemos prolongar o raio OP até que interseccione o eixo das

tangentes no ponto T e medir a distância entre a origem dos arcos A e o ponto T de intersecção, sempre considerando a orientação do eixo (para cima).

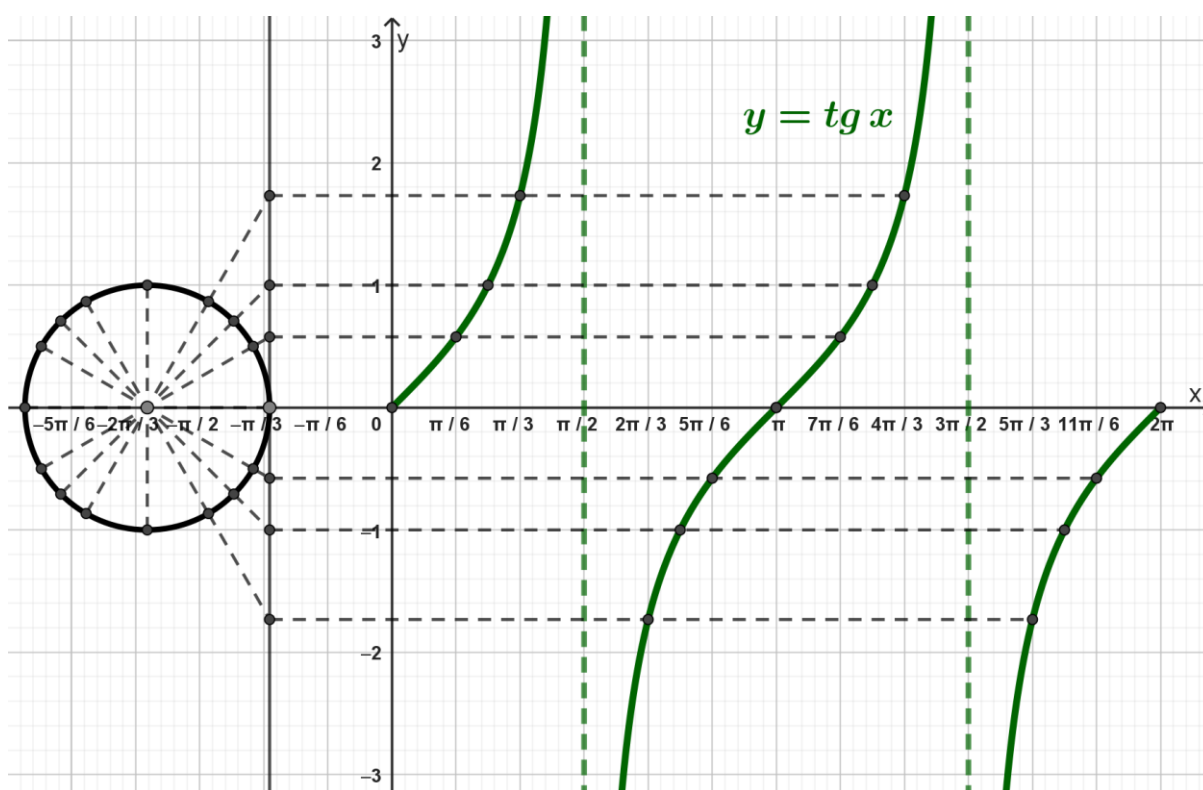
Fazendo construções análogas para situações em que P está localizado nos outros quadrantes podemos chegar à conclusão que: se  $P \in 1^\circ Q$  ou  $P \in 3^\circ Q$  então o segmento AT é orientado para cima, logo  $\operatorname{tg} x > 0$ , e se  $P \in 2^\circ Q$  ou  $P \in 4^\circ Q$ , então o segmento AT é orientado para baixo, logo  $\operatorname{tg} x < 0$ . Nos pontos da forma  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , a tangente será nula, já que os pontos A e T serão coincidentes. Nos pontos da forma  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  a tangente não está definida, pois não existirá o ponto T de intersecção, já que o raio OP será vertical, paralelo ao eixo das tangentes, e não há intersecção entre duas retas paralelas não coincidentes. Assim, a função  $f(x) = \operatorname{tg} x$  possui domínio  $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$  e conjunto imagem  $Im = \mathbb{R}$ .

A função tangente é periódica de período  $p = \pi$ .

Abaixo, temos dois ciclos de seu gráfico cartesiano representado no intervalo  $[0; 2\pi]$ .

Este gráfico possui assíntotas verticais nos pontos da forma  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Figura 98 - Gráfico cartesiano da Tangentoide.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Observação: Para um maior aprofundamento destes conteúdos recomendamos a leitura de alguns exemplares da coleção Fundamentos da Matemática Elementar, a saber: Iezzi e Murakami (2013), Dolce e Pompeo (2013) e Iezzi (2013).

## 7 Sequências Didáticas

Apresentamos aqui duas sequências didáticas. Ambas trazem um conjunto de problemas geométricos relacionados às Áreas de Figuras Planas. As construções geométricas propostas incluem um ponto móvel, ou seja, um ponto que percorre um segmento, uma reta ou um círculo. O movimento desse ponto provoca transformações na figura inicial. O objetivo principal é fazer com que o aluno investigue a variação da área definida inicialmente e associe esta variação com uma função real de variável real. Importante ressaltar que os próprios estudantes realizarão as construções geométricas propostas por meio do software GeoGebra, desenvolvendo assim um papel ativo e participante.

Cada um dos problemas destas sequências segue o seguinte roteiro básico, com poucas variações: (1) Apresentação do problema; (2) Construção geométrica; (3) Perguntas norteadoras; (4) Construção do gráfico cartesiano, (5) Dedução algébrica da lei da função e (6) Análise da função.

Cada problema é apresentado por meio de um enunciado textual, no qual são definidas as características geométricas da construção. É também apresentada uma figura que ilustra o problema a fim de tornar sua interpretação inicial mais imediata.

A construção geométrica segue o princípio de “estabilidade sob ação de movimento”, em que a construção dos objetos geométricos está relacionada às suas propriedades. Assim, são utilizados pontos, retas, segmentos, retas perpendiculares e paralelas, círculos etc. com o objetivo de auxiliarem a definir as características da figura a ser construída.

Depois de concluída a construção geométrica, são propostas perguntas sobre a figura construída, de forma a incentivar o estudante a calcular sua área para valores particulares da variável independente. Para realizar estes cálculos, o estudante deverá relembrar os conhecimentos de Geometria Plana e/ou Trigonometria. Para que o aluno possa compreender como se dá variação da área da figura proposta em função da medida de um segmento cuja extremidade é móvel, a segunda etapa da construção trata de gerarmos um gráfico cartesiano diretamente relacionado à figura construída. Para isto deverá ser criado um ponto móvel  $P$  tal que sua abscissa seja a medida do segmento que representa a variável independente e sua ordenada seja o valor da área da figura a ser estudada. Uma vez criado este ponto móvel  $P$ , vamos habilitar o seu rastro, por meio do comando do GeoGebra que permite a exibição do caminho percorrido pelo ponto durante

a ação de movimento. Este rastro representa graficamente a relação entre variável dependente e variável independente, isto é, trata-se do gráfico cartesiano da função que modela o problema. A partir desta experiência e de acordo com o desenho descrito pelo rastro do ponto móvel P (gráfico citado acima), espera-se que os estudantes utilizem seus conhecimentos prévios para conjecturarem sobre o tipo de função que expressa a variação da área a ser investigada. A seguir, novas perguntas são apresentadas ao estudante, direcionando-o a deduzir a expressão algébrica que representa a área da figura proposta. Para isto, deverá recorrer aos mesmos procedimentos numericamente utilizados em passo anterior. Agora se pede que em vez de um número, utilize em seus cálculos a variável  $x$ , que representa a medida do segmento com extremidade móvel. Finalizados os cálculos, pede-se que o aluno reflita sobre o resultado alcançado. A função encontrada é condizente com o gráfico cartesiano gerado pelo ponto P? Em caso afirmativo, novas perguntas podem ser realizadas: quais são os conjuntos que representam o domínio e a imagem da função encontrada? Essa função apresenta máximo ou mínimo? Como calcular estes pontos? Estes são exemplos de perguntas que podem despertar o interesse do aluno no sentido de explorar o modelo gráfico construído.

### **7.1. Primeira Sequência de atividades – para estudantes do 1º ano do Ensino Médio**

Esta sequência é composta por um conjunto de nove problemas geométricos sobre áreas de figuras planas, todos eles resultando em funções dos seguintes tipos: função constante, função afim, função quadrática ou função de várias sentenças. Estas atividades foram planejadas para estudantes do 1º ano do Ensino Médio.

Sugerimos que, durante a aplicação da sequência didática, os nove problemas sejam vistos na ordem em que aparecem, um após o outro, pois eles seguem uma ordem crescente de dificuldade. Sugere-se também que as questões dentro de cada problema sejam resolvidas na ordem em que aparecem; e que as construções dentro de cada problema sejam feitas pelo estudante, na ordem em que aparecem.

#### **7.1.1. Problema nº 01.**

Objetivos de aprendizagem:

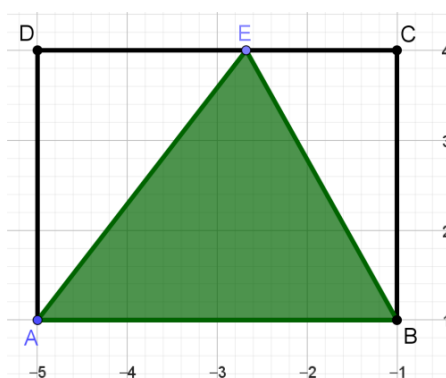
- Reconhecer propriedades de retângulos e triângulos a partir de suas definições e características.
- Utilizar software de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.

- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de retângulos e triângulos.
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função constante no plano cartesiano.

Duração: 2 horas/aula.

**Problema nº 01:** *Construir um retângulo de dimensões 4 e 3 unidades de comprimento. Marcar um ponto arbitrário em um dos lados maiores. Determinar a área do triângulo cujos vértices são o ponto arbitrário e as extremidades do lado oposto do retângulo.*

Figura 99 – Ilustração do Problema nº 01.

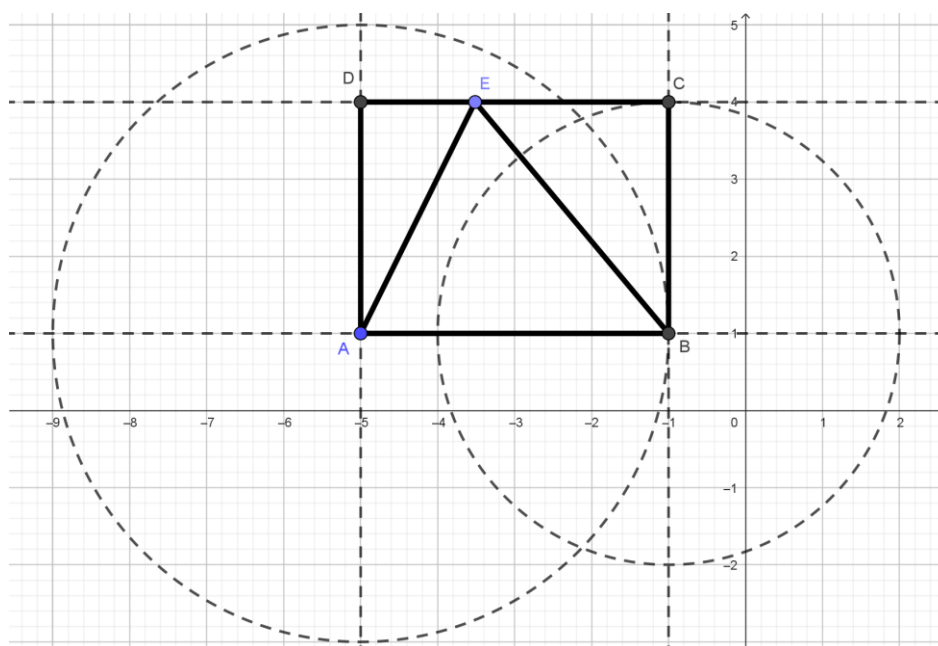


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª etapa

Por um ponto A traçamos duas retas perpendiculares entre si. Traçamos um círculo de centro A e raio medindo 4 unidades. Marcamos o ponto B em uma das intersecções deste círculo com uma das perpendiculares. Por B traçamos uma perpendicular ao segmento AB. Traçamos um círculo de centro B e raio medindo 3 unidades. Marcamos o ponto C em uma das intersecções deste círculo com a última perpendicular traçada. Por C traçamos uma perpendicular ao segmento BC e marcamos o ponto D de intersecção entre esta perpendicular e a perpendicular ao segmento AB que passa por A. Assim, ABCD é um retângulo. Marcamos um ponto E arbitrário sobre CD e traçamos os lados do triângulo AEB, do qual queremos investigar a variação da área em função da medida do segmento DE.

Figura 100 - Construção geométrica do Problema nº 01.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Questões propostas:

1. Calcule a área do retângulo ABCD.
2. Caso o ponto E coincida com o ponto médio de CD, como classificamos o triângulo ABE em relação aos lados?
3. Caso o ponto E coincida com o ponto C, ou com o ponto D, como classificamos o triângulo ABE em relação aos ângulos?

As respostas esperadas para estas questões são:

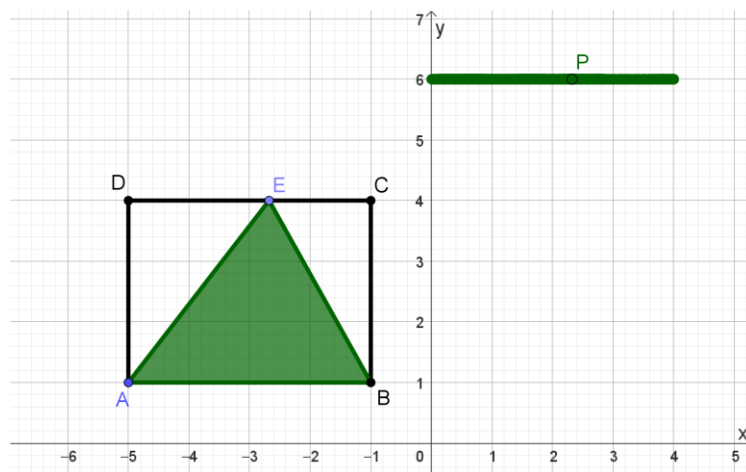
1. A área do retângulo ABCD é dada por:  $A_{ABCD} = AB \cdot BC = 4 \cdot 3 = 12$  unidades quadradas.
2. Caso E coincida com o ponto médio de CD, temos que  $CE = ED$  e assim os triângulos ADE e BCE são congruentes pelo caso LAL. Portanto,  $AE = BE$  e assim, o triângulo ABE é isósceles.
3. Caso E coincida com C, temos que  $BE \perp AB$ . Caso E coincida com D, temos que  $AE \perp AB$ . Nos dois casos temos que ABE é um triângulo retângulo.

Construção: 2ª etapa.

Pretendemos construir um gráfico cartesiano que represente a variação da área do triângulo ABE em função da medida do segmento DE. Este gráfico será relacionado à figura construída na 1ª etapa. Para isto, digitamos no campo de entrada as coordenadas de um ponto P móvel, tal que a abscissa de P é igual a medida do segmento DE (Figura

100), e a ordenada de P é igual a medida da área do triângulo ABE. Ao movimentarmos o ponto E sobre o segmento DC, o aluno poderá perceber que o ponto P descreve uma trajetória horizontal, o que sugere que a área do triângulo não varia, independentemente da escolha do ponto E sobre o segmento DC.

Figura 101 - Construção do gráfico dinâmico do Problema nº 01.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

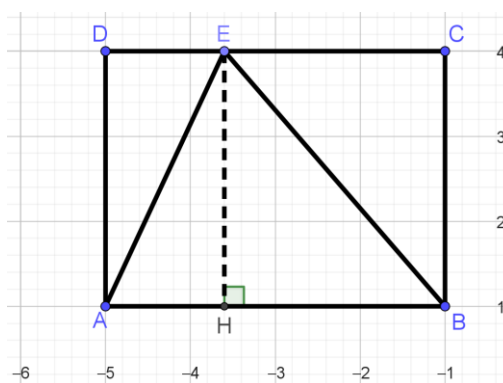
Questões propostas:

4. Sendo ABCD um retângulo, e sendo E um ponto sobre DC, mostre que a área do triângulo ABE não varia, independentemente da escolha do ponto E.
5. Considerando  $DE = x$  e a função  $f(x) = A_{ABE}$ , determine o domínio e o conjunto imagem desta função.

As soluções esperadas são:

4. Pode-se traçar a altura EH relativa ao lado AB e analisar o seu comprimento.

Figura 102 - Traçado Auxiliar da altura do triângulo ABE.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Como AHED é um retângulo, os lados opostos EH e AD são congruentes, logo,  $\overline{EH} = 3$  unidades, independentemente da posição escolhida para o ponto E.

Outro argumento que poderia ser utilizado é que a distância entre retas paralelas é sempre constante, e AB e CD são segmentos paralelos, logo, como EH é uma altura, temos  $EH \perp AB$ , e conseqüentemente,  $EH \perp CD$ , assim,  $\overline{EH} = 3$  unidades. Assim  $A_{ABE} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{EH}}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$  unidades quadradas.

5. O aluno deve perceber que  $f(x) = A_{ABE} = 6$  é uma função constante, isto é, seus valores independem da medida  $x$ . Dessa forma, o domínio é o conjunto dos possíveis valores de  $x = \overline{DE}$ , isto é,  $D(f) = [0; 4]$  e o conjunto imagem é um conjunto unitário  $Im(f) = \{6\}$ .

### 7.1.2. Problema nº 02.

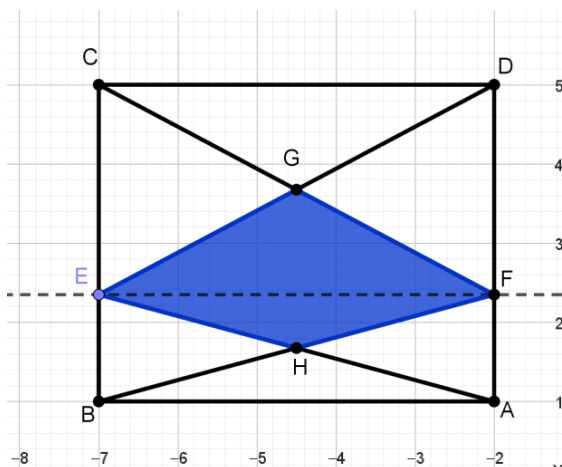
Objetivos de aprendizagem:

- Reconhecer propriedades de retângulos e triângulos a partir de suas definições e características.
- Utilizar software de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de retângulos e triângulos.
- Compreender e aplicar conceitos de proporcionalidade em figuras semelhantes.
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função constante no plano cartesiano.

Duração: 2 horas/aula.

**Problema nº 02:** *Construir um retângulo cujos lados têm medidas 5 e 4 unidades de comprimento. Por um ponto arbitrário de um dos lados menores, traçar uma reta perpendicular a este lado, reta esta que dividirá o retângulo inicial em dois retângulos cujas diagonais serão traçadas. Determinar a área do quadrilátero que é limitado pelas quatro diagonais.*

Figura 103 - Ilustração do Problema nº 02.

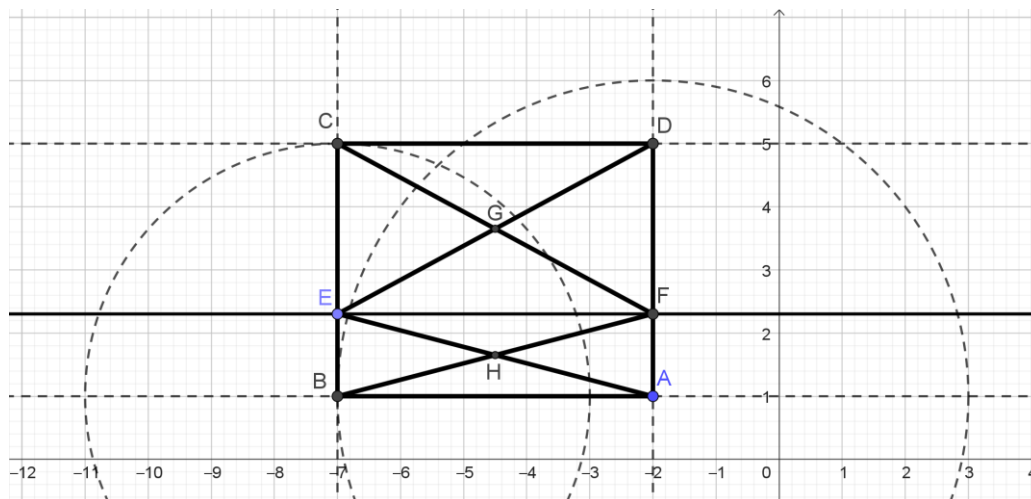


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

### Construção: 1ª Etapa.

Por um ponto A construímos duas retas perpendiculares entre si, retas estas que serão retas suporte de dois lados do retângulo. Traçamos um círculo de centro A e raio medindo 5 unidades e marcamos o ponto B, que é intersecção deste círculo com uma das retas. Agora traçamos um novo círculo, com centro em B e raio medindo 4 unidades. Por B traçamos uma nova reta, que é perpendicular à AB e interseccionará o círculo menor em C. Por fim, traçamos por C uma perpendicular à BC, que interseccionará a primeira reta em D. Unindo os vértices A, B, C e D, temos o retângulo procurado. Marcamos um ponto E qualquer sobre o segmento BC. Por E traçamos uma reta perpendicular à BC, que interseccionará o lado AD no ponto F. Traçamos as diagonais AE, BF, CF e DE. Marcamos os pontos G e H de intersecção dos pares de diagonais dos retângulos ABEF e ECDF. Assim temos o quadrilátero procurado, de vértices EGFH.

Figura 104 - Construção geométrica do problema nº 02.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Algumas questões são propostas:

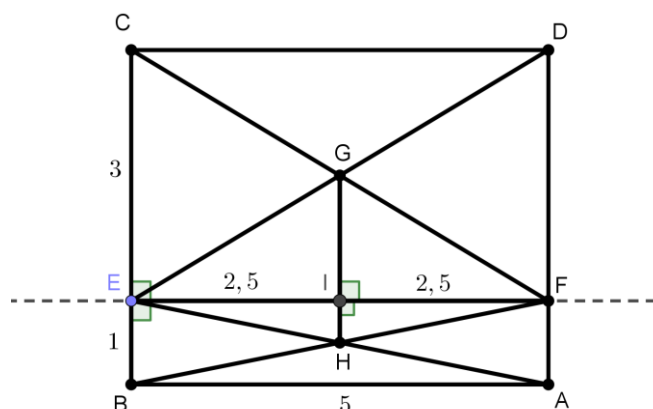
1. Qual a área do retângulo ABCD?
2. Supondo que  $BE = 1$  unidade, qual a área do quadrilátero EHFG?

As soluções esperadas são:

1. Pode-se empregar a fórmula da área do retângulo:  $A = b \cdot h$ , onde  $b$  é a medida da base e  $h$  é a medida da altura. Assim,  $A = 5 \cdot 4 = 20$  unidades quadradas.
2. Pode-se dividir o quadrilátero EHFG em dois triângulos: EGF e EHF. Ambos com mesma base  $EF = 4$  unidades. Resta então calcular as alturas destes triângulos em relação à base EF. Estamos partindo do princípio de que, em um retângulo, as diagonais são congruentes e interceptam-se em seu ponto médio. Portanto  $\overline{EG} = \overline{GD} = \overline{CG} = \overline{GF}$  e  $\overline{EH} = \overline{HA} = \overline{BH} = \overline{HF}$ . Como EGF e EHF são triângulos isósceles as alturas relativas à base EF serão também medianas. Logo, se I é ponto médio de EF então GI e HI são as alturas procuradas. Temos as semelhanças dos triângulos:  $CEF \sim GIF$  e  $BEF \sim HIF$ . Logo:

$$\frac{CE}{GI} = \frac{EF}{IF} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{GI}{2,5} \Rightarrow GI = \frac{3}{2} \text{ e } \frac{BE}{HI} = \frac{EF}{IF} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{HI}{2,5} \Rightarrow HI = \frac{1}{2}.$$

Figura 105 - Solução particular, considerando  $BE = 1$  unidade.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Assim,  $A_{EGF} = \frac{EF \cdot GI}{2} = \frac{5 \cdot \frac{3}{2}}{2} = \frac{15}{4}$  e  $A_{EHF} = \frac{EF \cdot HI}{2} = \frac{5 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$  e, finalmente:

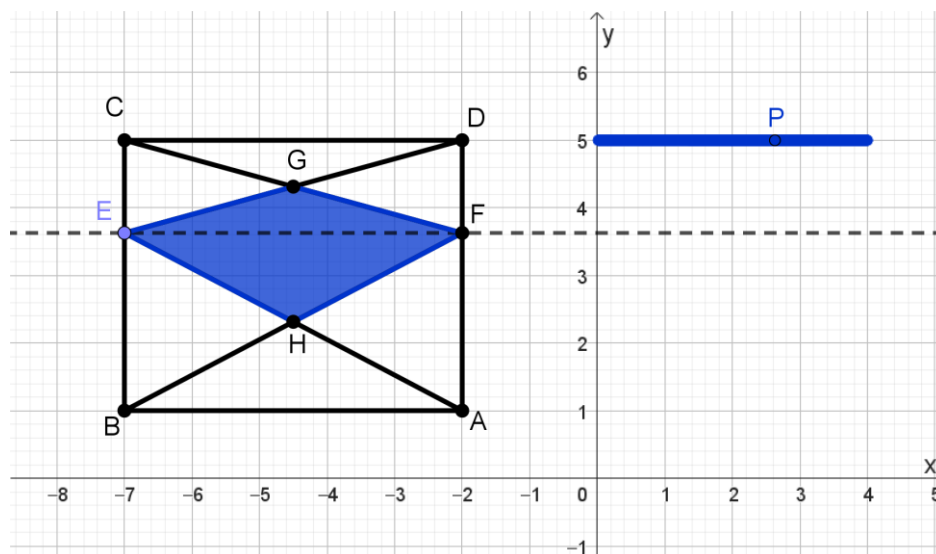
$$A_{EGFH} = A_{EGF} + A_{EHF} = \frac{15}{4} + \frac{5}{4} = \frac{20}{4} = 5 \text{ unidades quadradas.}$$

Construção: 2ª Etapa.

Desejamos investigar a variação da área do quadrilátero EHFG em função do comprimento do segmento BE. Para isto, criamos um ponto móvel de coordenadas  $P = (k, q1)$ , em que  $k$  é a medida do segmento BE e  $q1$  é o valor da área do quadrilátero EHFG,

variáveis estas que foram atribuídas pelo próprio software quando da criação dos objetos. Selecionamos o ponto P e com a ferramenta “Habilitar rastro” passamos a exibir as sucessivas posições de P quando o ponto E é movimentado sobre o segmento BC.

Figura 106 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 02.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Novas questões são propostas:

3. Considerando  $BE = x$ , calcule a área do quadrilátero EFGH em função de  $x$ .
4. Escreva o Domínio e o Conjunto Imagem da função encontrada no item anterior.
5. Descreva a interpretação sobre a variação da área de EFGH que o modelo encontrado fornece.

As soluções esperadas são:

3. Deve-se fazer a dedução de uma fórmula para a área procurada. Para isso, o estudante deverá refazer os mesmos passos da questão nº 2, porém utilizando a incógnita  $x$  que representa a medida do segmento  $BE$ . Assim, temos as semelhanças dos triângulos:  $BEF \sim HIF$  e  $CEF \sim GIF$ .

$$\text{Logo } \frac{\overline{BE}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{IF}} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{\overline{HI}}{2,5} \Rightarrow \overline{HI} = \frac{x}{2} \text{ e } \frac{\overline{CE}}{\overline{GI}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{IF}} \Rightarrow \frac{4-x}{5} = \frac{\overline{GI}}{2,5} \Rightarrow \overline{GI} = \frac{4-x}{2}.$$

$$\text{Assim, } A_{EHF} = \frac{\overline{EF} \cdot \overline{HI}}{2} = \frac{5 \cdot \frac{x}{2}}{2} = \frac{5x}{4} \text{ e } A_{EGF} = \frac{\overline{EF} \cdot \overline{GI}}{2} = \frac{5 \cdot \frac{4-x}{2}}{2} = \frac{20-5x}{4} \text{ e, finalmente,}$$

$$A_{EGFH} = A_{EHF} + A_{EGF} = \frac{5x}{4} + \frac{20-5x}{4} = \frac{20}{4} = 5 \text{ unidades quadradas.}$$

4. O aluno deve refletir sobre os valores do domínio e do conjunto imagem da função encontrada. Considerando a função  $f(x) = 5$ . Como  $x = \overline{BE} \leq \overline{BC} = 4$  unidades, temos:  $D(f) = [0; 4]$  e  $Im(f) = \{5\}$ .

5. O aluno deve fazer a interpretação do modelo encontrado. A função  $f(x) = 5$  não depende da variável  $x$ , e é denominada função constante justamente pelo fato de que todas as imagens apresentam o mesmo valor, independentemente do valor do domínio escolhido. Dessa forma, conclui-se que a área do quadrilátero EGFH não varia, pois para qualquer valor de  $\overline{BE} = x$  escolhido, temos sempre que  $A_{EGFH} = 5$ .

### 7.1.3. Problema nº 03.

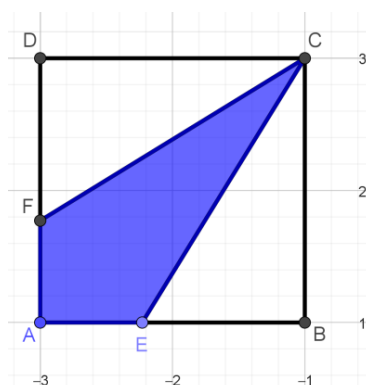
Objetivos de aprendizagem:

- Reconhecer propriedades de quadrados e triângulos a partir de suas definições e características.
- Utilizar software de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de quadrados e triângulos.
- Compreender e aplicar conceitos de congruência em figuras simétricas.
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função linear no plano cartesiano.

Duração: 2 horas/aula.

**Problema nº 03:** *Construir um quadrado ABCD cujos lados medem 2 unidades de comprimento. Marcar um ponto arbitrário E do lado AB, e determinar o ponto F sobre o lado AD, tal que  $AE = AF$ . Determinar a área do quadrilátero AECF, em função da medida de AE.*

Figura 107 - Ilustração do problema nº 03.

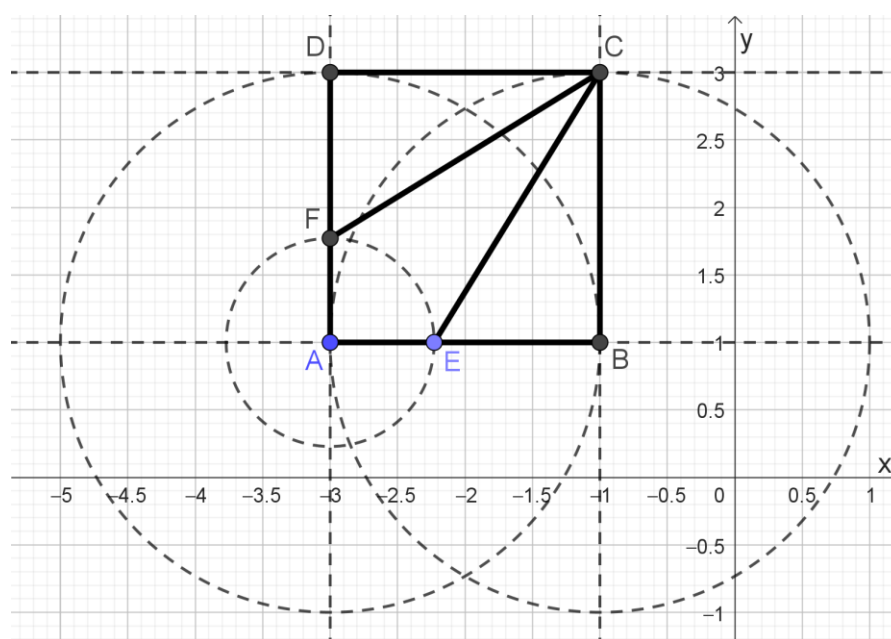


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª Etapa.

Traçamos duas retas perpendiculares entre si, ambas passando por um ponto A. Traçamos um círculo de centro A e raio medindo 2 unidades e marcamos um ponto B de intersecção deste círculo com uma das retas anteriores. Pelo ponto B, traçamos uma reta perpendicular ao segmento AB e, com centro em B e raio medindo 2 unidades traçamos outro círculo. Marcamos um ponto C de intersecção desta perpendicular com o último círculo e, por este ponto, traçamos uma perpendicular ao segmento BC. Marcamos o ponto D de intersecção desta perpendicular com a perpendicular ao segmento AB e que passa por A. Assim temos o quadrado ABCD construído. Marcamos agora um ponto E qualquer sobre o segmento AB. Traçamos um círculo de centro A e raio AE e marcamos o ponto F de intersecção deste círculo com o lado AD. Assim fica determinado o quadrilátero AECF.

Figura 108 - Construção geométrica do problema nº 03.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Algumas questões:

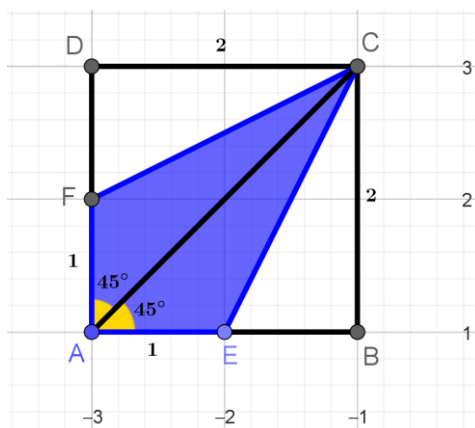
1. Qual a área do quadrado ABCD?
2. Considerando  $\overline{AE} = 1$  unidade, calcule a área do quadrilátero AECF.

As soluções esperadas são:

1. Pode-se utilizar a fórmula  $A = \ell^2 = 2^2 = 4$  unidades quadradas.
2. O estudante deve perceber que o quadrilátero é simétrico, isto é, a diagonal AC é um eixo de simetria e os triângulos AFC e AEC são congruentes (caso LAL),

portanto  $A_{AEC} = A_{AFC}$  e  $A_{AEFC} = 2 \cdot A_{AEC}$ . Segue daí que  $A_{AEFC} = 2 \cdot \left(\frac{\overline{AE} \cdot \overline{BC}}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right) = 2$  unidades quadradas.

Figura 109 - Solução particular, para  $AE = 1$  unidade.

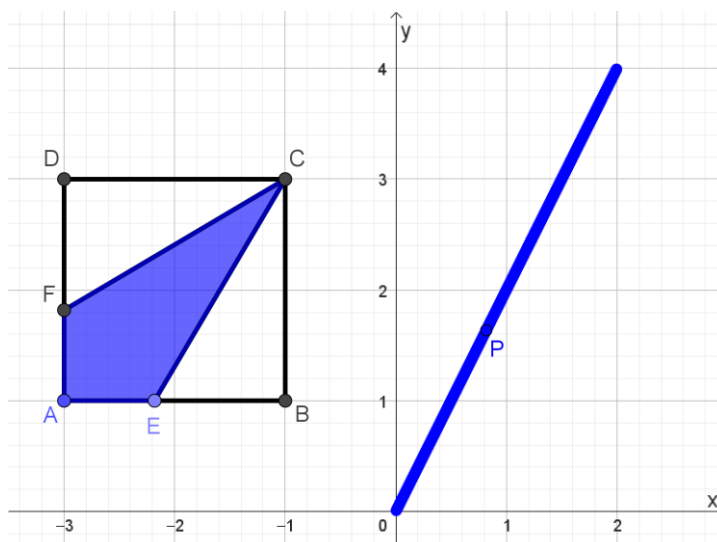


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 2ª Etapa.

Para gerar o gráfico cartesiano que representa a variação da área de AECF, criamos o ponto móvel  $P = (j, q1)$ , em que  $AE = j$  e  $A_{AEFC} = q1$ . Habilitando o rasto do ponto P, temos o resultado apresentado abaixo.

Figura 110 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 03.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Algumas questões:

3. Considerando  $\overline{AE} = x$ , obtenha a expressão da área do quadrilátero AECF em função de  $x$ .
4. Escreva o domínio e o conjunto imagem desta função.
5. Qual é o tipo de função encontrada neste problema?

As soluções esperadas são:

3. O estudante deve seguir o mesmo raciocínio utilizado na questão nº2, e sendo  $\overline{AE} = x$ , então  $A_{AEFC} = 2 \cdot \left(\frac{\overline{AE} \cdot \overline{BC}}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{x \cdot 2}{2}\right) = 2x$ .
4. Sabe-se que  $x$  pode assumir qualquer valor real entre 0 e a medida do lado AB do quadrado ABCD. Assim, temos o domínio  $D(f) = [0, 2]$  e a imagem  $Im(f) = [0, 4]$ .
5. A função encontrada neste problema é do tipo linear, um caso particular da função afim  $f(x) = ax + b$ , quando  $b = 0$ .

#### 7.1.4. Problema nº 04.

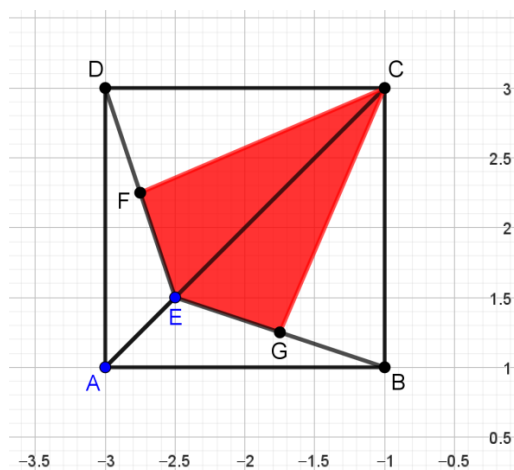
Objetivos de aprendizagem:

- Reconhecer propriedades de quadrados e triângulos a partir de suas definições e características.
- Utilizar software de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de quadrados e triângulos.
- Compreender e aplicar conceitos de congruência em figuras simétricas.
- Compreender e aplicar conceitos de proporcionalidade em figuras semelhantes.
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função afim no plano cartesiano.

Duração: 2 horas/aula.

**Problema nº 04:** *Construir um quadrado ABCD cujos lados medem 2 unidades de comprimento. Por um ponto arbitrário E da diagonal AC, traçar os segmentos ED e EB, e seus pontos médios, F e G, respectivamente. Determinar a área do quadrilátero EGCF, em função da medida de AE.*

Figura 111 - Ilustração do problema n° 04.

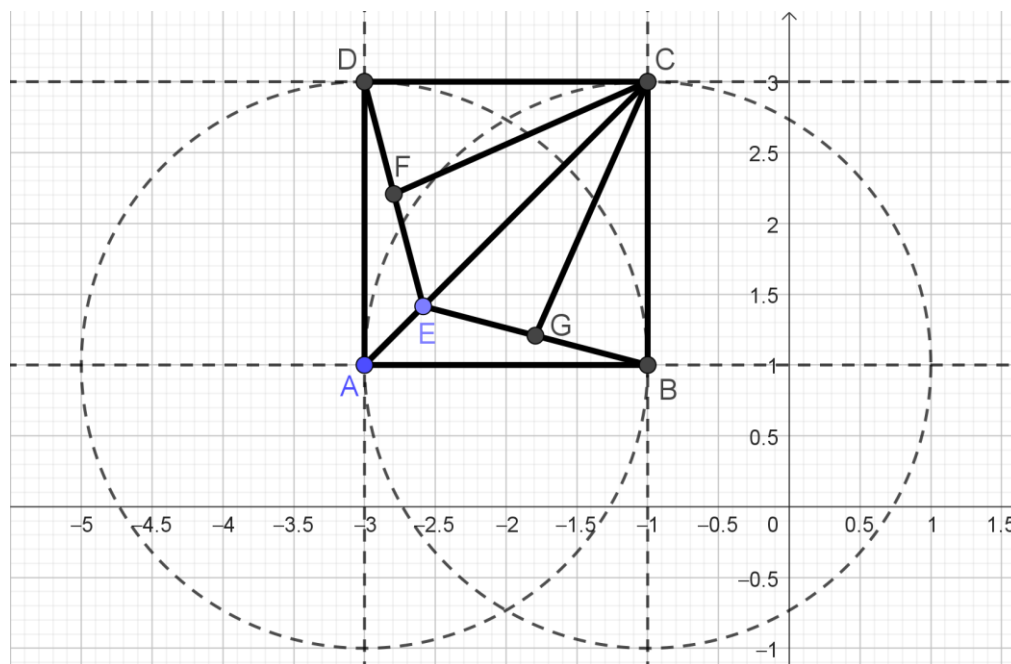


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª Etapa.

Construímos o quadrado ABCD exatamente como no problema anterior. Traçamos agora a diagonal AC e marcamos sobre ela um ponto qualquer E. Traçamos os segmentos AE, DE e EB e, destes dois últimos, marcamos os seus respectivos pontos médios, F e G. Assim fica determinado o quadrilátero EGCF.

Figura 112 - Construção geométrica do problema n° 04.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Algumas questões são propostas:

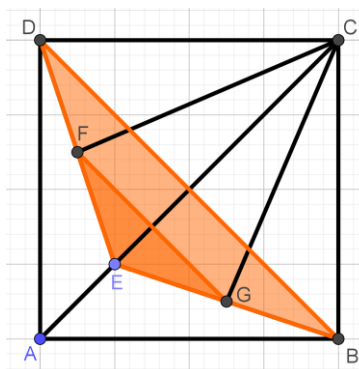
1. Qual a área do quadrado ABCD?
2. Qual a medida da diagonal AC?
3. Qual a distância entre os pontos F e G?

4. Supondo que  $AE = \frac{\sqrt{2}}{2}$  unidades, qual a área do quadrilátero EFCG?

As soluções esperadas são:

1. Pode-se utilizar a fórmula  $A = \ell^2 = 2^2 = 4$  unidades quadradas.
2. Aplica-se o Teorema de Pitágoras. Assim,  $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ , logo  $\overline{AC} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$  unidades.
3. Aplica-se a semelhança de triângulos:  $DEB \sim FEG$  (caso LAL). Assim  $\frac{\overline{FG}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{EB}} = \frac{1}{2}$  e, portanto,  $\overline{FG} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ . Observe que a medida de  $FG$  não depende da escolha do ponto  $E$ .

Figura 113 - Triângulos semelhantes presentes na construção.



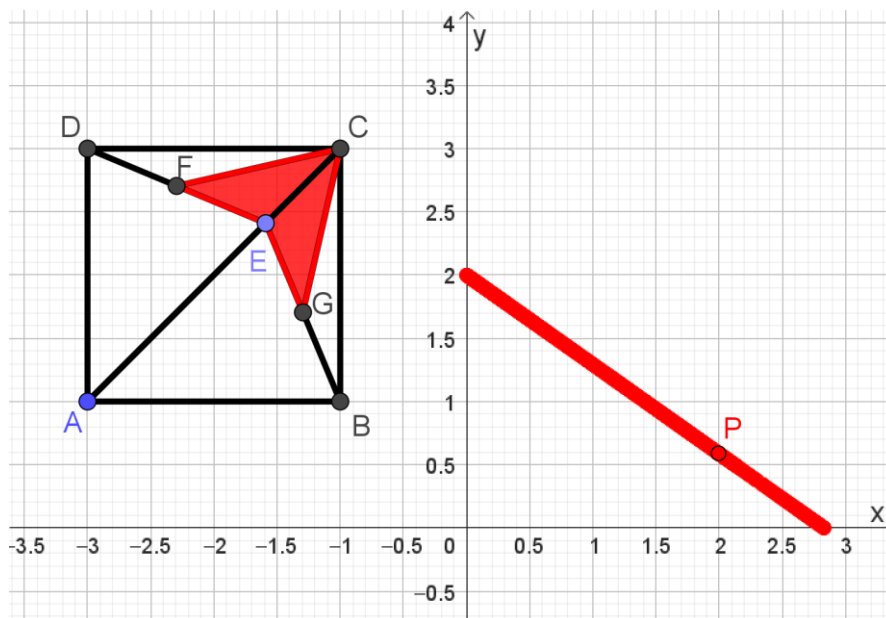
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

4. Divide-se a área de EFCG em dois triângulos: EFC e EGC, ambos de base  $\overline{EC} = \overline{AC} - \overline{AE} = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ . Podemos mostrar que  $\overline{ED} = \overline{EB}$ , já que  $AED \equiv AEB$  (caso LAL). Daí segue que  $\overline{EF} = \overline{EG}$  e assim temos  $EFC \equiv EGC$  (caso LAL). Como  $FG \parallel BD$  e  $BD \perp AC$ , então  $FG \perp AC$ . Isso implica que as alturas dos triângulos EFC e EGC, ambas relativas à base EC, têm medida  $\frac{\overline{FG}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Daí concluímos que  $A_{EFCG} = 2 \cdot A_{EFC} = 2 \cdot \left( \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \right) = \frac{3 \cdot 2}{4} = \frac{3}{2}$  unidades quadradas.

Construção: 2ª etapa.

Com o objetivo de gerar um gráfico cartesiano de uma função que represente a variação da área do quadrilátero EFCG, criamos um ponto cujas coordenadas são:  $P = (p, q_1)$ , em que  $AE = p$  e  $A_{EFCG} = q_1$ . Habilitando o rastro de P e movimentando o ponto E sobre AC, é possível observar que P percorre o trajeto ilustrado a seguir.

Figura 114 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 04.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Mais questões são propostas:

5. Considerando  $\overline{AE} = x$ , calcule a área do quadrilátero EFCG em função de  $x$ .
6. Escreva o domínio e o conjunto imagem desta função.
7. Escreva os valores máximo e mínimo desta função.

As soluções esperadas são:

5. Utiliza-se os mesmos princípios utilizados na questão nº 4, considerando que se  $\overline{AE} = x$  então  $\overline{EC} = 2\sqrt{2} - x$ . Já foi mostrado que  $\overline{FG} = \sqrt{2}$  é uma medida invariante em relação ao movimento do ponto E. Isso implica que as alturas dos triângulos EFC e EGC, ambas relativas à base EC, têm medida  $\frac{\overline{FG}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$A_{EFCG} = 2 \cdot A_{EFC} = 2 \cdot \left( \frac{(2\sqrt{2} - x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \right) = \frac{(2\sqrt{2} - x) \cdot \sqrt{2}}{2} = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x$$

6. Considera-se que os possíveis valores de  $x$  variam de 0 ( $E \equiv A$ ), até  $2\sqrt{2}$ , ( $E \equiv C$ ). Assim,  $D(f) = [0; 2\sqrt{2}]$ . Analisando o gráfico, temos que  $Im(f) = [0; 2]$ .
7. O valor máximo de  $f$  é 2 e o valor mínimo de  $f$  é 0.

### 7.1.5. Problema nº 05.

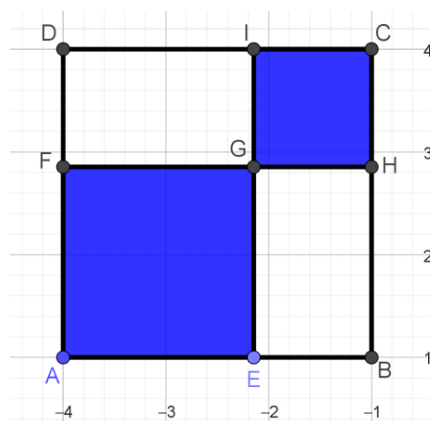
Objetivos de aprendizagem:

- Reconhecer propriedades de quadrados a partir de suas definições e características.
- Utilizar software de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de quadrados.
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função quadrática no plano cartesiano.
- Explorar o comportamento da função quadrática (crescimento, decréscimo, máximo ou mínimo).

Duração: 2 horas/aula.

**Problema nº 05:** *Construir um quadrado  $ABCD$  cujos lados medem 3 unidades de comprimento. Marcar um ponto  $E$  arbitrário no segmento  $AB$ . Construir o quadrado  $AEGF$ , tal que  $F \in AD$ . Prolongar  $EG$  até obter o ponto de intersecção  $I$  com o lado  $CD$  e prolongar  $FG$  até obter o ponto de intersecção  $H$  com o lado  $BC$ . Determinar a soma das áreas de  $AEGF$  e  $GHCI$  em função da medida do segmento  $AE$ .*

Figura 115 - Ilustração do problema nº 05.



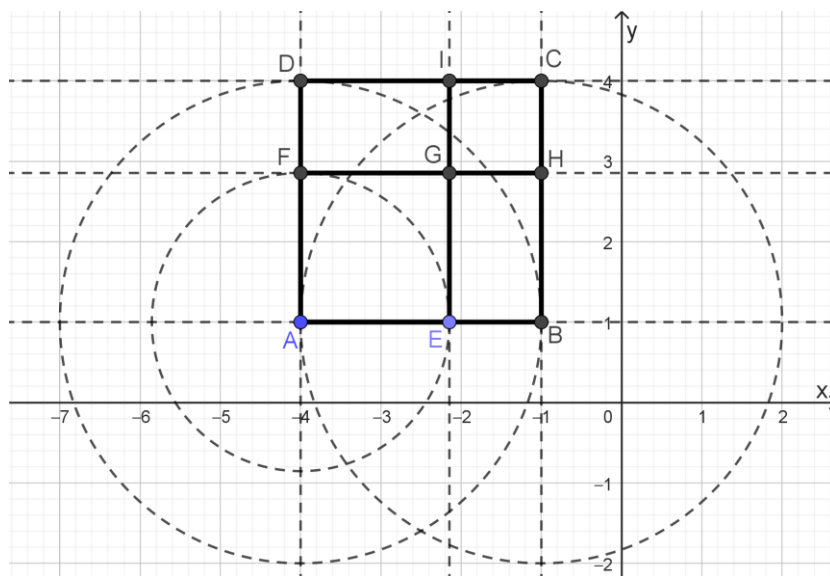
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª Etapa.

Construímos o quadrado  $ABCD$  tal como fizemos no problema nº 03 com a única diferença que os círculos centrados em  $A$  e  $B$  agora possuem raio medindo 3 unidades, pois desejamos neste caso que o quadrado tenha essa medida para o lado. Marcamos um ponto  $E$  qualquer sobre o segmento  $AB$ . Construímos um círculo de centro  $A$  passando

pelo ponto E. Marcamos o ponto de intersecção F deste círculo com o segmento AD. Por E traçamos uma reta perpendicular a AB e por F traçamos uma reta perpendicular a AD. Marcamos o ponto G de intersecção destas duas perpendiculares. Além disso marcamos os pontos de intersecção H e I, tais que  $\overline{FG} \cap BC = \{H\}$  e  $\overline{EG} \cap CD = \{I\}$ . Assim, ficam determinados os quadriláteros AEGF e GHCI, como ilustra a figura abaixo.

Figura 116 - Construção geométrica do problema nº 05.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

São propostas as seguintes questões:

1. Qual a área do quadrado ABCD?
2. Mostre que GHCI é também um quadrado.
3. Considerando  $AE = 2$  unidades, calcule a soma das áreas dos quadrados AEGF e GHCI.
4. O que ocorre com a soma das áreas dos quadrados AEGF e GHCI quando o ponto E coincide com o ponto A? E quando o ponto E coincide com o ponto B?

As soluções esperadas são:

1.  $A = \ell^2 = 3^2 = 9$  unidades quadradas.
2. Por construção, as perpendiculares traçadas garantem que  $\widehat{GHC}$  e  $\widehat{CIG}$  são ângulos retos. Como  $\widehat{HCI} = \widehat{BCD} = 90^\circ$  (ângulo interno do quadrado ABCD), então necessariamente  $\widehat{IGH}$  também é ângulo reto. Assim, GHCI é retângulo. Analisando agora as medidas dos lados deste retângulo: Temos que  $\overline{AE} = \overline{FG} = \overline{DI} = x$  e, portanto,  $\overline{EB} = \overline{GH} = \overline{IC} = 3 - x$ . Analogamente  $\overline{AF} = \overline{EG} = \overline{BH} = x$  implica em  $\overline{FD} = \overline{GI} = \overline{CH} = 3 - x$ . Como  $\overline{GH} = \overline{IC} = \overline{GI} = \overline{CH}$ , então GHCI é

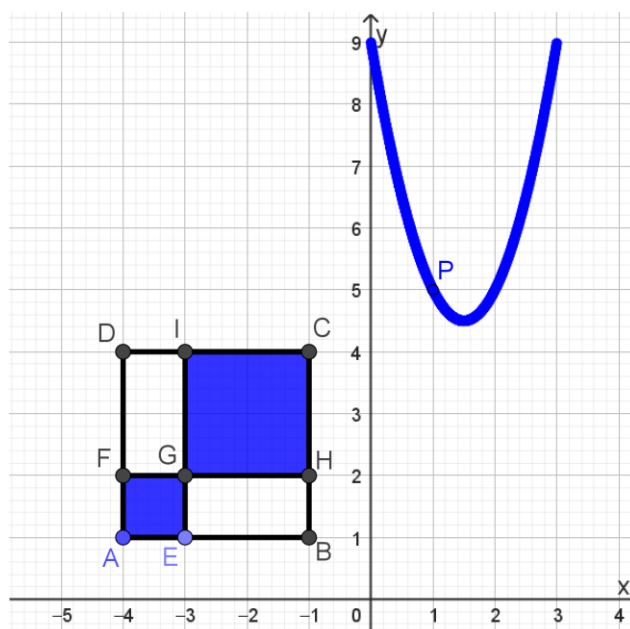
losango. Daí segue que GHCI é simultaneamente retângulo e losango, portanto GHCI é quadrado.

- Como  $AE = 2$ , AEGF é um quadrado de área  $A_{AEGF} = 2^2 = 4$  unidades quadradas. Daí segue que GHCI é um quadrado cujo lado mede 1 unidade. Assim,  $A_{GHCI} = 1^2 = 1$  unidade quadrada. Logo,  $A_{AEGF} + A_{GHCI} = 4 + 1 = 5$  unidades quadradas.
- Quando o ponto E coincide com o ponto A, o quadrado AEGF degenera-se em um único ponto. Assim sua área é nula. O quadrado GHCI coincide com o quadrado ABCD, logo sua área é 9 unidades quadradas. Assim,  $A_{AEGF} + A_{GHCI} = 0 + 9 = 9$  unidades quadradas. Quando o ponto E coincide com o ponto B, o quadrado AEGF coincide com o quadrado ABCD, logo sua área é 9 unidades quadradas. O quadrado GHCI degenera-se em um único ponto. Assim sua área é nula. Logo,  $A_{AEGF} + A_{GHCI} = 9 + 0 = 9$  unidades quadradas.

Construção: 2ª Etapa.

Criamos um ponto móvel P e atribuímos às suas coordenadas  $(x, y)$  os valores  $(q, q^2 + q)$  em que  $q$  representa a medida do segmento AE e  $q^2$  e  $q^2 + q$  são as áreas dos quadrados AEGF e GHCI, respectivamente. Movimentando o ponto E sobre AB, é perceptível o movimento parabólico do ponto P. Habilitando-se o rastro deste ponto os alunos podem intuir que a curva desenhada é uma parábola com concavidade para cima, como na figura abaixo.

Figura 117 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 05.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Mais algumas questões são propostas:

5. Calcular a soma das áreas dos quadrados AEGF e GHCI em função da medida  $x$  do segmento AE.
6. Qual é o valor de  $x$  que minimiza a soma das áreas de AEGF e GHCI e qual o valor mínimo desta soma?
7. Sendo  $f(x)$  a função que representa a soma das áreas de AEGF e GHCI, determine o domínio e a imagem desta função.

Algumas possíveis respostas:

5. Como o lado do quadrado AEGF mede  $x$ , e como o lado do quadrado ABCD mede 3, então o lado do quadrado GHCI é dado por  $3 - x$ . Assim a soma das áreas dos quadrados AEGF e GHCI é dada por:

$$A_{AEGF} + A_{GHCI} = x^2 + (3 - x)^2 = x^2 + 9 - 6x + x^2 = 2x^2 - 6x + 9.$$

Isto é, a função que modela este problema é do tipo quadrática.

6. Para determinar as coordenadas do ponto que minimiza a soma das áreas é necessário determinar as coordenadas do vértice desta parábola, a saber:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2 \cdot 2} = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad y_V = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 9 = \frac{9}{2} - 9 + 9 = \frac{9}{2}.$$

Isto é, quando  $AE = 1,5$  unidades, a soma das áreas atinge seu valor mínimo de 4,5 unidades quadradas. Portanto, quando o ponto E está situado no ponto médio de AB, os quadrados AEGF e GHCI são congruentes e a soma de suas áreas é mínima.

7. Os possíveis valores de  $x = AE$  variam de 0 até 3, logo, o domínio é  $D(f) = [0; 3]$  e o conjunto imagem é  $Im(f) = \left[\frac{9}{2}, 9\right]$ .

#### 7.1.6. Problema nº 06

Objetivos de aprendizagem:

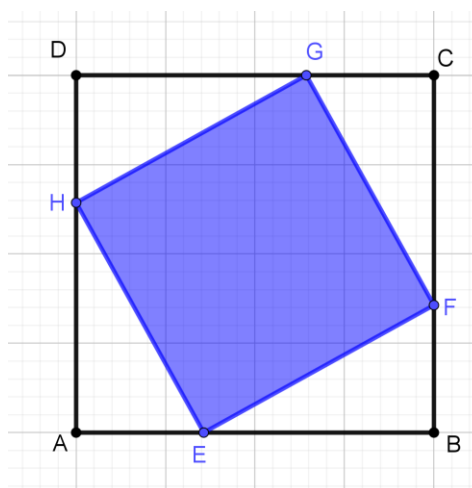
- Reconhecer propriedades de quadrados e triângulos a partir de suas definições e características.
- Utilizar software de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de quadrados e triângulos.
- Compreender e aplicar conceitos de congruência em figuras simétricas.

- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função quadrática no plano cartesiano.
- Explorar o comportamento da função quadrática (crescimento, decréscimo, máximo ou mínimo).

Duração: 2 horas/aula.

**Problema nº 06:** Construir um quadrado  $ABCD$  com lado medindo 2 unidades e marcar os pontos  $E, F, G$  e  $H$ , com  $E \in AB, F \in BC, G \in CD$  e  $H \in DA$ , de maneira tal que  $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH}$ , conforme figura abaixo.

Figura 118 - Ilustração do problema nº 06.

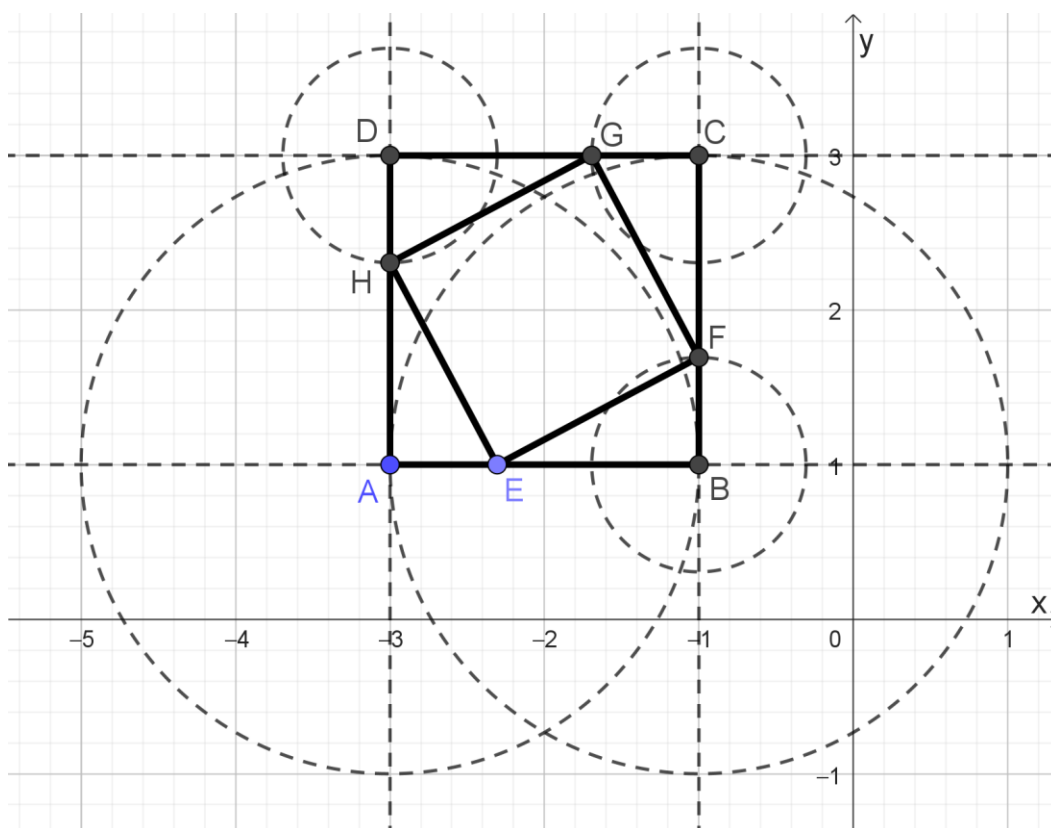


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª Etapa.

A construção do quadrado  $ABCD$  se dá de forma idêntica à construção feita no problema nº 03. Sobre o segmento  $AB$  marcamos um ponto  $E$  arbitrário. Com a ferramenta “Compasso”, clicamos nos pontos  $A$  e  $E$  e criamos círculos de centros  $B, C$  e  $D$ , todos congruentes, e cuja medida do raio é igual a medida do segmento  $AE$ . Desta forma, se movimentarmos  $E$  sobre  $AB$  percebemos a alteração simultânea nas dimensões destes três últimos círculos. Marcamos o ponto  $F$  de intersecção do círculo centrado em  $B$  com o segmento  $BC$ . Marcamos o ponto  $G$  de intersecção do círculo centrado em  $C$  com o segmento  $CD$ . Marcamos o ponto  $H$  de intersecção do círculo centrado em  $D$  com o segmento  $DA$ . Traçando os segmentos  $EF, FG, GH$  e  $HE$ , fica determinado o quadrilátero  $EFGH$ .

Figura 119 - Construção geométrica do problema n° 06.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

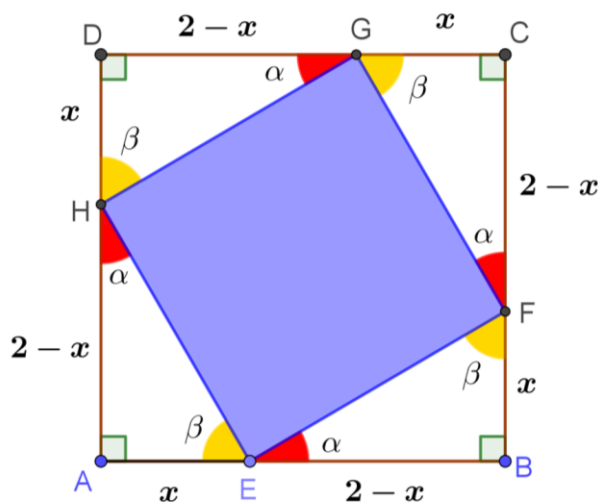
São apresentadas algumas questões:

1. Mostre que o quadrilátero EFGH é um quadrado.
2. Calcule a área do quadrado EFGH considerando que  $\overline{AE} = 0,5$  unidades.
3. Qual a área de EFGH quando E coincide com o ponto A? E com o ponto B?

As soluções esperadas são:

1. Como  $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = x$ , segue que  $\overline{EB} = \overline{FC} = \overline{GD} = \overline{HA} = 2 - x$ . E, como os quatro triângulos são retângulos, logo são congruentes pelo caso LAL. Daí conclui-se que  $\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE}$ . Logo EFGH é um losango. Destas congruências também deduzimos que  $\widehat{A\hat{H}E} = \widehat{B\hat{F}E} = \widehat{C\hat{G}F} = \widehat{D\hat{H}G} = \alpha$  e  $\widehat{A\hat{E}H} = \widehat{B\hat{E}F} = \widehat{C\hat{F}G} = \widehat{D\hat{G}H} = \beta$ . Cada ângulo interno do quadrilátero EFGH tem medida  $180^\circ - \alpha - \beta$ . Como  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , então cada ângulo interno mede  $90^\circ$ . Portanto, EFGH é também um retângulo e, conseqüentemente, um quadrado.

Figura 120 - Triângulos congruentes presentes na construção.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

2. Se  $\overline{AE} = 0,5 = \frac{1}{2}$ , então  $\overline{EB} = 2 - 0,5 = 1,5 = \frac{3}{2}$ . Assim, temos:  $A_{AEH} = A_{BFE} = A_{CGF} = A_{DHG} = \frac{1 \cdot \frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{8}$ . Então:  $A_{EFGH} = A_{ABCD} - 4 \cdot A_{AEH} = 2^2 - 4 \cdot \frac{3}{8} = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$  unidades quadradas.

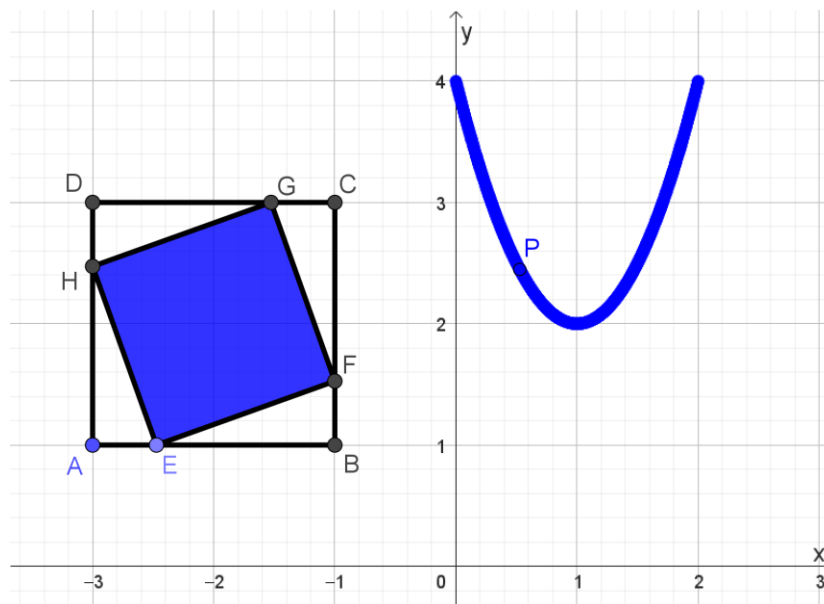
Outra maneira de encontrarmos este resultado seria aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AEH, por exemplo. Assim temos  $\overline{EH}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AH}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$  unidades quadradas, que é o valor da área procurada.

3. Quando E coincide com o ponto A temos que os quadrados EFGH e ABCD são coincidentes. Quando E coincide com o ponto B, temos que os quadrados EFGH e BCDA são coincidentes. Portanto, nestas duas situações temos a área máxima que é igual a  $2^2 = 4$  unidades quadradas.

Construção: 2ª Etapa.

Para investigarmos a variação da área de EFGH em função da medida  $x$  do segmento AE, criamos o ponto P cuja abscissa  $x$  é a distância entre os pontos A e E, e cuja ordenada é igual à área de EFGH. Movimentando o ponto E sobre o segmento AB, obtemos o gráfico que é resultado da trajetória do ponto P no plano.

Figura 121 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 06.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

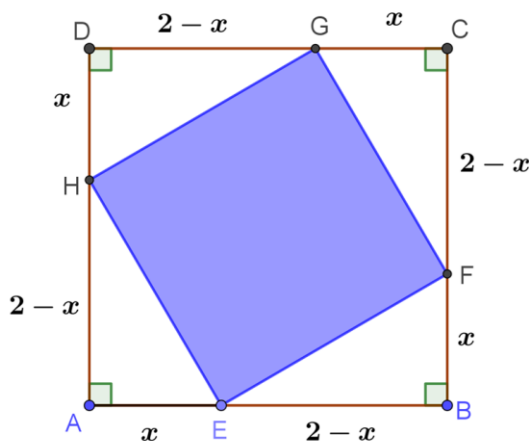
Mais algumas questões:

4. Considerando  $\overline{AE} = x$ , determine uma expressão para a área do quadrado EFGH.
5. Determine as coordenadas do ponto P que minimizam a área de EFGH.
6. Escreva o domínio e o conjunto imagem da função  $f(x) = A_{EFGH}$ .

Algumas possibilidades de respostas:

4. Para deduzir a expressão da área do quadrilátero EFGH pode-se operar por meio de uma decomposição de áreas, isto é, pode-se subtrair da área do quadrado ABCD as áreas dos triângulos congruentes AEH, BFE, CGF e DHG.

Figura 122 - Decomposição do quadrado ABCD.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Portanto, fazendo a dedução algébrica, temos:

$$A_{EFGH} = A_{ABCD} - (A_{AEH} + A_{BFE} + A_{CFG} + A_{DGH})$$

$$A_{EFGH} = 2^2 - 4 \cdot \left( \frac{x \cdot (2 - x)}{2} \right)$$

$$A_{EFGH} = 4 - 2 \cdot (2x - x^2)$$

$$A_{EFGH} = 2x^2 - 4x + 4.$$

5. Sobre o ponto que minimiza esta função, é esperado o cálculo das coordenadas do vértice:  $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2 \cdot 2} = 1$  e  $y_V = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 2$ . Assim, os alunos podem constatar que a área do quadrado EFGH é mínima quando o ponto E está situado sobre o ponto médio de AB.
6. O domínio é  $D(f) = [0; 2]$  e o conjunto imagem é  $Im(f) = [2; 4]$ .

### 7.1.7. Problema nº 07

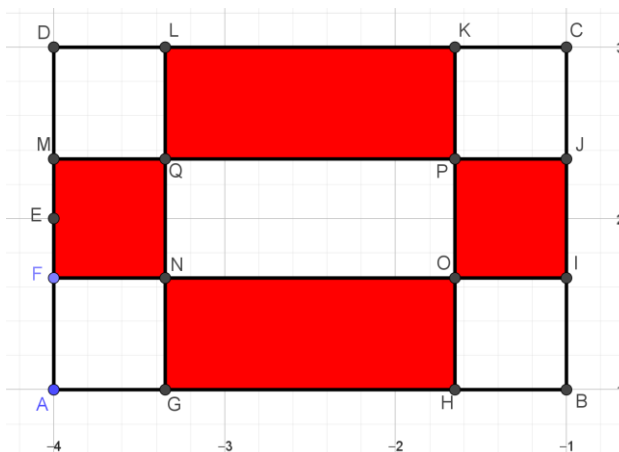
Objetivos de aprendizagem:

- Reconhecer propriedades de retângulos e quadrados a partir de suas definições e características.
- Utilizar softwares de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de retângulos e quadrados.
- Compreender e aplicar conceitos de congruência em figuras simétricas.
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função quadrática no plano cartesiano.
- Explorar o comportamento da função quadrática (crescimento, decrescimento, máximo ou mínimo).

Duração: 2 horas/aula.

**Problema nº 07:** *Construir um retângulo ABCD tal que  $\overline{AB} = 3$  unidades e  $\overline{BC} = 2$  unidades. Nos quatro vértices A, B, C e D, construa quadrados congruentes, cuja medida do lado seja menor do que a metade da medida de BC. Assim, serão criados os quadrados AGNF, BIOH, CKPJ e DMQL, conforme figura abaixo. Determinar a variação da soma das áreas dos quadriláteros GHON, IJPO, KLQP e MFNQ em função da medida do segmento AF.*

Figura 123 - Ilustração do problema nº 07.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

### Construção: 1ª Etapa.

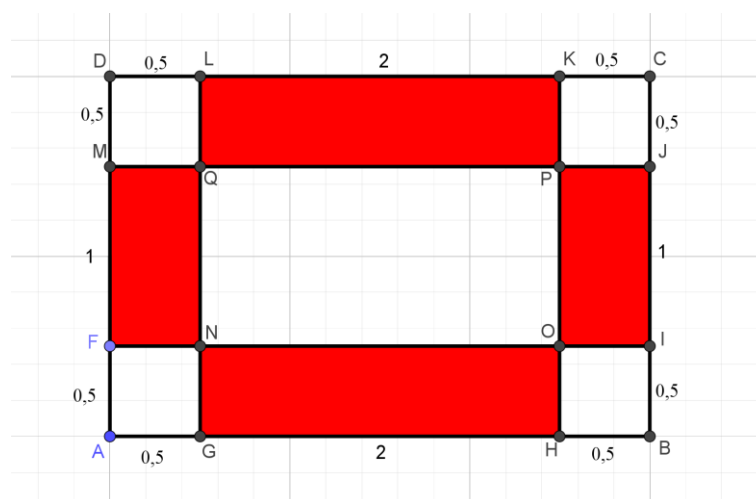
Para a construção do retângulo ABCD utilizaremos os mesmos procedimentos adotados no Problema nº 01, com o círculo de centro A de raio medindo 3 unidades e o círculo de centro B de raio medindo 2 unidades. Construído o retângulo ABCD, vamos marcar o ponto E, que é ponto médio do segmento AD. Traçamos o segmento AE, sobre o qual marcamos um ponto arbitrário F. Desta forma, a medida de AF não será maior do que a metade da medida do menor lado do retângulo. Traçamos um círculo de centro A e raio AF e marcamos o ponto G de intersecção deste círculo com AB. Com a ferramenta compasso, criamos mais um círculo, congruente a este último, mas com centro no ponto B. Marcamos os pontos de intersecção H e I deste círculo com os segmentos AB e BC, respectivamente. Procedendo de forma análoga nos vértices C e D, obtemos os pontos J, K, L e M. Note que quando movimentamos o ponto F sobre o segmento AE, os quatro pequenos círculos variam suas dimensões, mas permanecem sempre congruentes. Traçamos os segmentos FI, MJ, GL e HK e marcamos os seus pontos de intersecção:  $FI \cap GL = \{N\}$ ,  $FI \cap HK = \{O\}$ ,  $MJ \cap HK = \{P\}$  e  $MJ \cap GL = \{Q\}$ . Assim ficam determinados os quadriláteros GHON, IJPO, KLQP e MFNQ, cuja variação da soma das áreas pretende-se investigar.



Analogamente, podemos mostrar que HBCK, MJCD e AGLD são também retângulos. Daí segue que  $AB \parallel FI \parallel MJ \parallel DC$  e  $AD \parallel GL \parallel HK \parallel BC$  e, portanto, GHON, IJPO, KLQP e MFNQ são paralelogramos. Analisando os ângulos internos destes quadriláteros temos que certos ângulos são correspondentes aos ângulos internos do retângulo ABCD, portanto também são retos. Logo GHON, IJPO, KLQP e MFNQ são retângulos.

$$\begin{aligned}
 2. \quad A_{GHON} + A_{IJPO} + A_{KLQP} + A_{MFNQ} &= 2 \cdot A_{GHON} + 2 \cdot A_{IJPO} \\
 &= 2 \cdot (GH \cdot HO) + 2 \cdot (IJ \cdot JP) \\
 &= 2 \cdot (2 \cdot 0,5) + 2 \cdot (1 \cdot 0,5) = 2 + 1 = 3 \text{ unidades quadradas.}
 \end{aligned}$$

Figura 126 – Solução particular para  $AF = 0,5$  unidades.

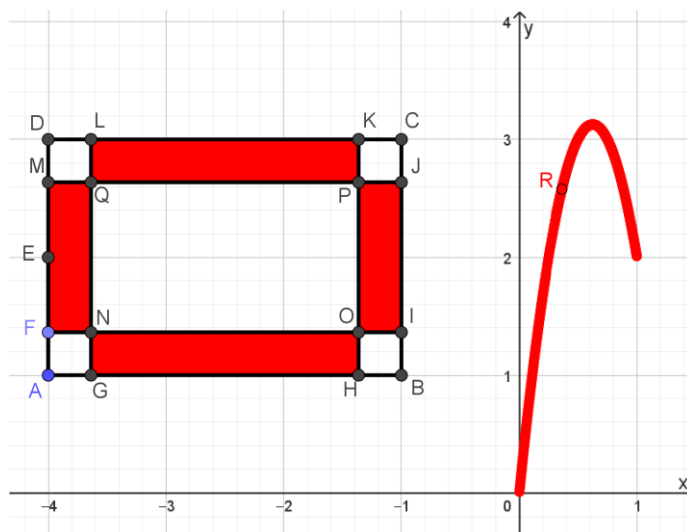


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 2ª Etapa.

Explorando a variação da soma das áreas dos retângulos GHON, IJPO, KLQP e MFNQ, desejamos gerar um gráfico cartesiano que represente a variação desta soma em função da medida  $x$  do segmento AF. Então vamos criar um ponto móvel cujas coordenadas sejam  $R = (r_1; q_1 + q_2 + q_3 + q_4)$ , em que  $r_1$  representa a medida do segmento AF e  $q_1, q_2, q_3$  e  $q_4$  representam as áreas dos retângulos GHON, IJPO, KLQP e MFNQ. Habilitando o rastro do ponto R e movimentando o ponto F, é possível observar o movimento de R, conforme ilustração abaixo:

Figura 127 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 07.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

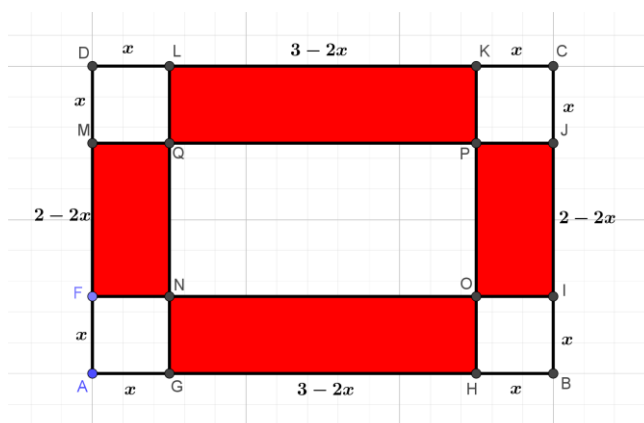
Algumas questões são propostas:

3. Deduza uma expressão algébrica para a soma das áreas dos retângulos GHON, IJPO, KLQP e MFNQ, em função da medida  $x$  do segmento AF.
4. Determine as coordenadas de R que maximizam a soma das áreas dos retângulos GHON, IJPO, KLQP e MFNQ.
5. Sendo  $f(x) = A_{GHON} + A_{IJPO} + A_{KLQP} + A_{MFNQ}$ , determine o domínio e o conjunto imagem de  $f(x)$ .

Algumas possíveis soluções:

3. A fim de deduzirmos uma fórmula para a soma das áreas em vermelho, devemos perceber que  $\overline{AG} = \overline{HB} = x$  implica em  $\overline{GH} = 3 - 2x$ . Da mesma forma, temos que  $\overline{AF} = \overline{MD} = x$  implica em  $\overline{FM} = 2 - 2x$ . Além disso, temos que GHON e KLQP são congruentes, assim como IJPO e MFNQ.

Figura 128 - Análise das dimensões dos retângulos vermelhos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Desta forma, a soma das áreas dos retângulos vermelhos em função da medida  $x$  do segmento AF é:

$$\begin{aligned} f(x) &= A_{GHON} + A_{IJPO} + A_{KLQP} + A_{MFNQ} = 2 \cdot A_{GHON} + 2 \cdot A_{IJPO} \\ &= 2 \cdot (3 - 2x) \cdot x + 2 \cdot x \cdot (2 - 2x) \\ &= 6x - 4x^2 + 4x - 4x^2 \\ &= 10x - 8x^2 \end{aligned}$$

4. Sobre o ponto que maximiza a soma das áreas em vermelho, sabe-se que se trata do vértice da parábola que representa a função quadrática encontrada.

$$\text{Então: } x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2 \cdot (-8)} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \text{ e } y_V = 10 \cdot \left(\frac{5}{8}\right) - 8 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{25}{8} = \frac{25}{8}.$$

Portanto, quando  $AF = \frac{5}{8} = 0,625$  unidades temos a soma máxima das áreas em vermelho que é igual a  $\frac{25}{8} = 3,125$  unidades quadradas.

5. Sobre o domínio da função, são os possíveis valores da medida  $x$  dos lados dos quadrados construídos nos vértices do retângulo ABCD. Então  $x$  pode variar entre 0, no mínimo e a metade da medida BC, isto é, 1, no máximo. Assim,  $D(f) = [0; 1]$ . A imagem desta função é o conjunto  $Im(f) = \left[0; \frac{25}{8}\right]$ .

### 7.1.8. Problema nº 08

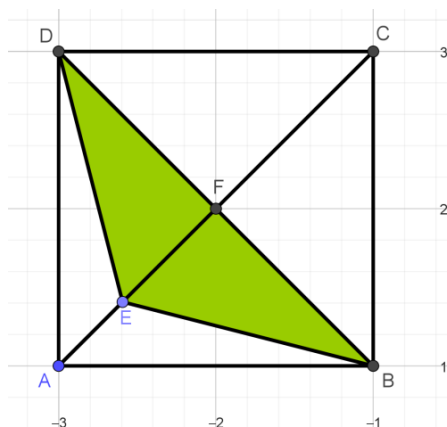
Objetivos de aprendizagem:

- Reconhecer propriedades de quadrados e triângulos a partir de suas definições e características.
- Utilizar software de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de quadrados e triângulos.
- Resolver problemas que envolvam relações métricas em triângulos retângulos.
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função de várias sentenças no plano cartesiano.
- Explorar o comportamento da função de várias sentenças (crescimento, decrescimento, máximo ou mínimo).

Duração: 2 horas/aula.

**Problema nº 08:** *Construir um quadrado ABCD cujos lados medem 2 unidades. Traçar suas diagonais AC e BD. Marcar um ponto E qualquer sobre a diagonal AC. Determinar a área do triângulo EBD em função da medida do segmento AE.*

Figura 129 - Ilustração do problema nº 08.

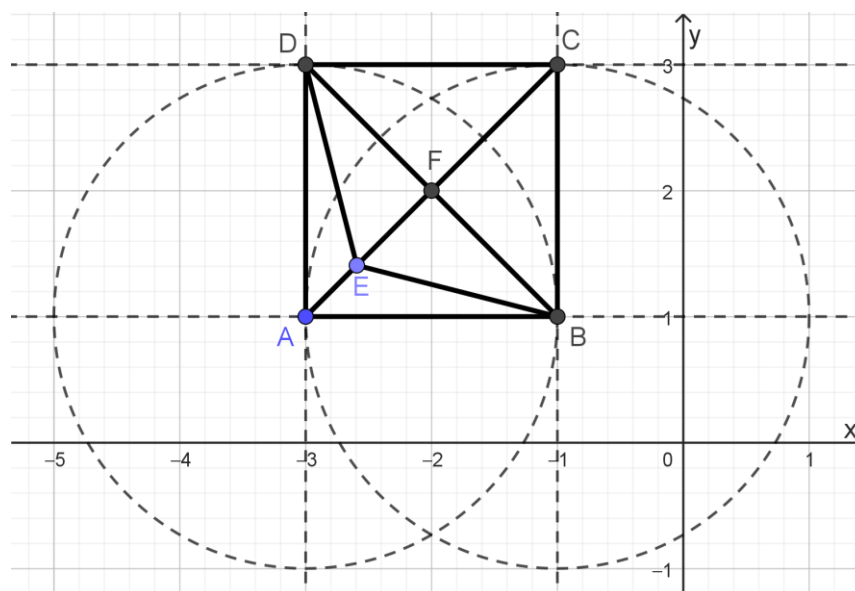


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª Etapa.

Para construir o quadrado ABCD, basta seguir os mesmos procedimentos adotados no problema nº 03. Depois de construir o quadrado, traçamos as diagonais AC e BD. Marcamos um ponto E qualquer sobre a diagonal AC e assim fica determinado o triângulo EBD, do qual desejamos investigar a variação da área em função da medida do segmento AE. Marcamos também o ponto F, de intersecção entre as diagonais AC e BD.

Figura 130 - Construção geométrica do problema nº 08.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Algumas questões são propostas:

1. Calcule a medida da diagonal AC do quadrado ABCD.
2. Mostre que EBD é um triângulo isósceles ou um segmento.
3. Calcule a área do triângulo EDB quando  $\overline{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  unidades.
4. Calcule a área do triângulo EDB quando  $\overline{AE} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$  unidades.

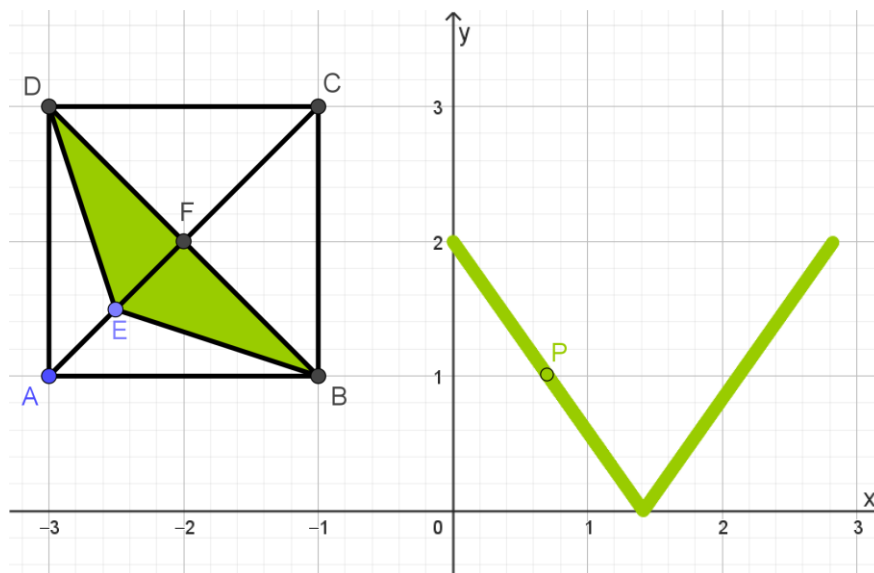
Algumas possíveis soluções:

1. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, temos:  $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$ . Logo,  $\overline{AC} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$  unidades.
2. Seja F o ponto de intersecção das diagonais AC e BD. Sabemos que em um quadrado as diagonais são perpendiculares entre si e interceptam-se em seu ponto médio. Dessa forma, temos  $DF = FB$  e  $E\hat{F}B = E\hat{F}D = 90^\circ$ . Portanto os triângulos EFB e EFD são congruentes pelo caso LAL. Daí segue que  $EB = ED$  e, portanto, EBD é um triângulo isósceles. No caso em que E coincide com F, temos que E, B e D são colineares e, portanto, o triângulo EBD se degenera no segmento BD.
3. Da primeira questão temos que  $\overline{AC} = 2\sqrt{2}$  e como F é ponto médio de AC, então  $\overline{AF} = \frac{AC}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ . Se  $\overline{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , então  $E \in AF$  e  $\overline{EF} = \overline{AF} - \overline{AE} = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Logo,  $A_{EBD} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{EF}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = \frac{2}{2} = 1$  unidade quadrada.
4. Se  $\overline{AE} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ , então  $E \in FC$  e  $\overline{EF} = \overline{AE} - \overline{AF} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Logo,  $A_{EBD} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{EF}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = \frac{2}{2} = 1$  unidade quadrada.

Construção: 2ª Etapa.

Com o objetivo de gerar um gráfico cartesiano diretamente a partir da construção geométrica realizada na 1ª Etapa, vamos criar um ponto móvel  $P = (n; t1)$ , em que  $n = \overline{AE}$  e  $t1 = A_{EBD}$ . Dessa forma, movimentando o ponto E sobre AC, o ponto P descreve uma trajetória que representa a variação da área de EBD em função da medida de AE, como ilustra a figura abaixo.

Figura 131 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 08.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Mais algumas questões são propostas:

- Determine expressões para a altura  $EF$  relativa à base  $BD$  do triângulo  $EBD$  em função da medida  $x$  do segmento  $AE$ .
- Determine expressões para a área do triângulo  $EBD$  em função da medida  $x$  do segmento  $AE$ .
- Seja  $f(x) = A_{EBD}$  determine o domínio e o conjunto imagem de  $f(x)$ .

Algumas possíveis soluções:

- Sabemos que  $\overline{AC} = 2\sqrt{2}$  e que  $\overline{AF} = \sqrt{2}$ . Se  $E \in AF$  então  $\overline{EF} = \overline{AF} - \overline{AE} = \sqrt{2} - x$ . Se  $E \in FC$  então  $\overline{EF} = \overline{AE} - \overline{AF} = x - \sqrt{2}$ .
- Se  $E \in AF$  então  $\overline{EF} = \sqrt{2} - x$ . Logo,  $A_{EBD} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{EF}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - x)}{2} = 2 - \sqrt{2} \cdot x$  unidades quadradas. Se  $E \in FC$  então  $\overline{EF} = x - \sqrt{2}$ . Logo,  $A_{EBD} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{EF}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot (x - \sqrt{2})}{2} = \sqrt{2} \cdot x - 2$  unidades quadradas. Desta forma, podemos escrever a função  $f(x)$  que representa a área do triângulo  $EBD$  em função da medida  $x$  do segmento  $AE$ :  $f(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{2} \cdot x, & \text{se } 0 \leq x \leq \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \cdot x - 2, & \text{se } \sqrt{2} < x \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$ . Utilizando o conceito de função modular, poderíamos escrever mais resumidamente que a função  $f$  é dada por  $f(x) = |\sqrt{2} \cdot x - 2|$ .
- O domínio da função  $f$  é o conjunto de todas as possíveis medidas do segmento  $AE$ , que variam entre 0 e  $2\sqrt{2}$ . Assim,  $D(f) = [0; 2\sqrt{2}]$ . O conjunto imagem é o

conjunto de todos os possíveis valores para a área de EBD que varia de 0 (quando o triângulo se degenera em um segmento) até 2 unidades quadradas (metade da área do quadrado, quando E coincide com os vértices B ou D).

### 7.1.9. Problema nº 09

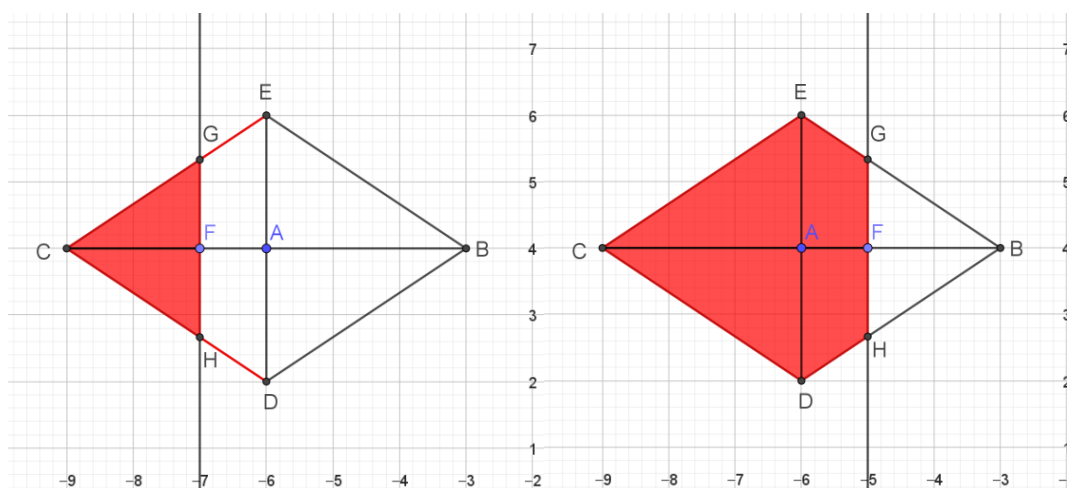
Objetivos de aprendizagem:

- Reconhecer propriedades de losangos e triângulos a partir de suas definições e características.
- Utilizar softwares de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de losangos e triângulos.
- Compreender e aplicar conceitos de proporcionalidade em figuras semelhantes.
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função de várias sentenças no plano cartesiano.
- Explorar o comportamento da função de várias sentenças (crescimento, decrescimento, máximo e mínimo).

Duração: 2 horas/aula.

**Problema nº 09:** *Construir um losango  $BECD$  de centro  $A$ , traçando suas duas diagonais de medidas  $\overline{BC} = 6$  e  $\overline{DE} = 4$  unidades de comprimento. Por um ponto arbitrário  $F$  da diagonal maior, traçar uma reta perpendicular a esta e determinar a área da região que é interior ao losango e que se situa à esquerda da reta construída, em função da medida do segmento  $CF$ .*

Figura 132 - Ilustração do problema n° 09.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

### Construção: 1ª Etapa.

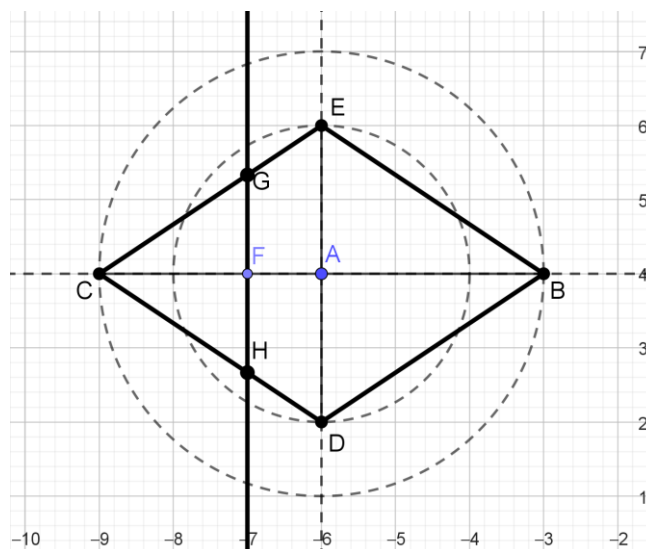
A construção do losango a partir das medidas de suas diagonais baseia-se em duas propriedades do losango, a saber:

1. As diagonais de um losango são perpendiculares entre si;
2. As diagonais de um losango interceptam-se em seu ponto médio.

Considerando os conceitos acima, marca-se o ponto A e, por ele, traçam-se duas retas perpendiculares entre si, retas estas que serão as retas-suporte das diagonais. Constrói-se um círculo de centro A e raio 3 e marca-se seus dois pontos de intersecção (B e C) com uma das retas, obtendo-se a diagonal maior. Constrói-se um outro círculo de centro A e raio 2 e marca-se seus dois pontos de intersecção (D e E) com a outra reta, obtendo-se a diagonal menor. Traçamos os caminhos poligonais CEB e CDB, obtendo o losango procurado. Marca-se um ponto qualquer F pertencente à diagonal maior. Por este ponto traça-se uma reta perpendicular à diagonal maior, marcando-se os dois pontos de intersecção desta com os lados do losango (G e H). A região definida no interior do losango e situada à esquerda da reta apresenta dois comportamentos: quando F pertence ao segmento CA, então a região é o triângulo CGH e, quando F pertence ao segmento AB, então a região é o pentágono CEGHD. É importante esclarecer a razão pela qual optamos por construir os lados do losango com caminhos poligonais, em vez de utilizar segmentos de reta. Caso os vértices fossem unidos por segmentos, os pontos G e H deixariam de existir de forma contínua ao longo do movimento do ponto F sobre a diagonal CB, pois haveria uma descontinuidade quando F cruzasse a posição do ponto A. Por outro lado, a construção dos caminhos poligonais CEB e CDB assegura a continuidade geométrica da

figura, garantindo que as interseções G e H permaneçam bem definidas durante toda a trajetória de F.

Figura 133 - Construção geométrica do problema nº 09.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

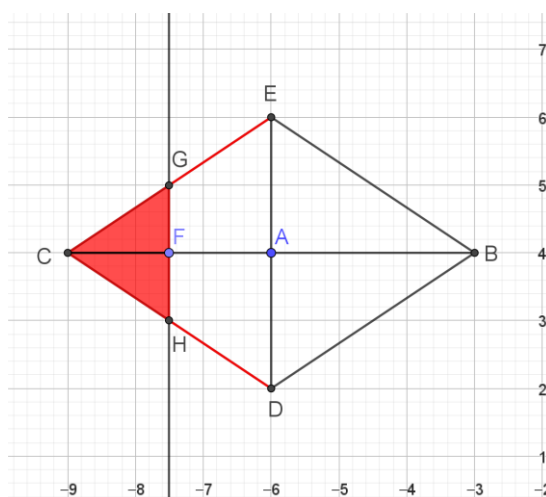
Feita a construção geométrica, são apresentadas as seguintes questões:

1. Como calcular a área do losango BECD?
2. Considerando  $\overline{CF} = 1,5$ , calcular a área da região interior ao losango e à esquerda da reta considerada.
3. Considerando  $\overline{CF} = 4,5$ , calcular a área da região interior ao losango e à esquerda da reta considerada.

As respostas esperadas são:

1. Espera-se que os alunos utilizem a fórmula  $A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ , em que  $d_1$  e  $d_2$  representam as medidas das duas diagonais, assim  $A = \frac{6 \cdot 4}{2} = \frac{24}{2} = 12$ . Outra forma de realizar este cálculo seria por meio da decomposição do losango em quatro triângulos retângulos congruentes, calcular a área de um desses triângulos e multiplicar este valor por 4, encontrando-se o mesmo resultado.
2. O aluno pode recorrer à semelhança de triângulos, para isto deve perceber que  $\triangle CGH \sim \triangle CED$ , pois ambos são triângulos isósceles e possuem o mesmo ângulo do vértice C. Assim:

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{ED}} \Rightarrow \frac{1,5}{3} = \frac{\overline{GH}}{4} \Rightarrow \overline{GH} = \frac{4 \cdot 1,5}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

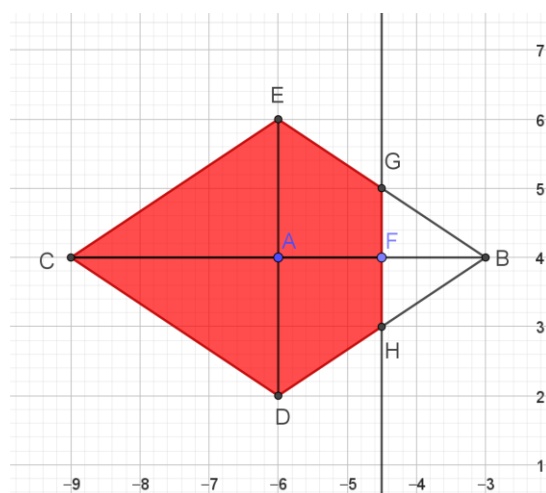
Figura 134 - Solução particular para  $CF = 1,5$  unidades.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

$$A_{CGH} = \frac{\overline{GH} \cdot \overline{CF}}{2} = \frac{2 \cdot 1,5}{2} = 1,5 \text{ u. a.}$$

3. O aluno pode recorrer à semelhança de triângulos, para isto deve perceber que  $BGH \sim BED$ , pois ambos são triângulos isósceles e possuem o mesmo ângulo do vértice B. Assim:

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{ED}} \Rightarrow \frac{6 - 4,5}{3} = \frac{\overline{GH}}{4} \Rightarrow \overline{GH} = \frac{4 \cdot 1,5}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Figura 135 - Solução particular para  $CF = 4,5$  unidades.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

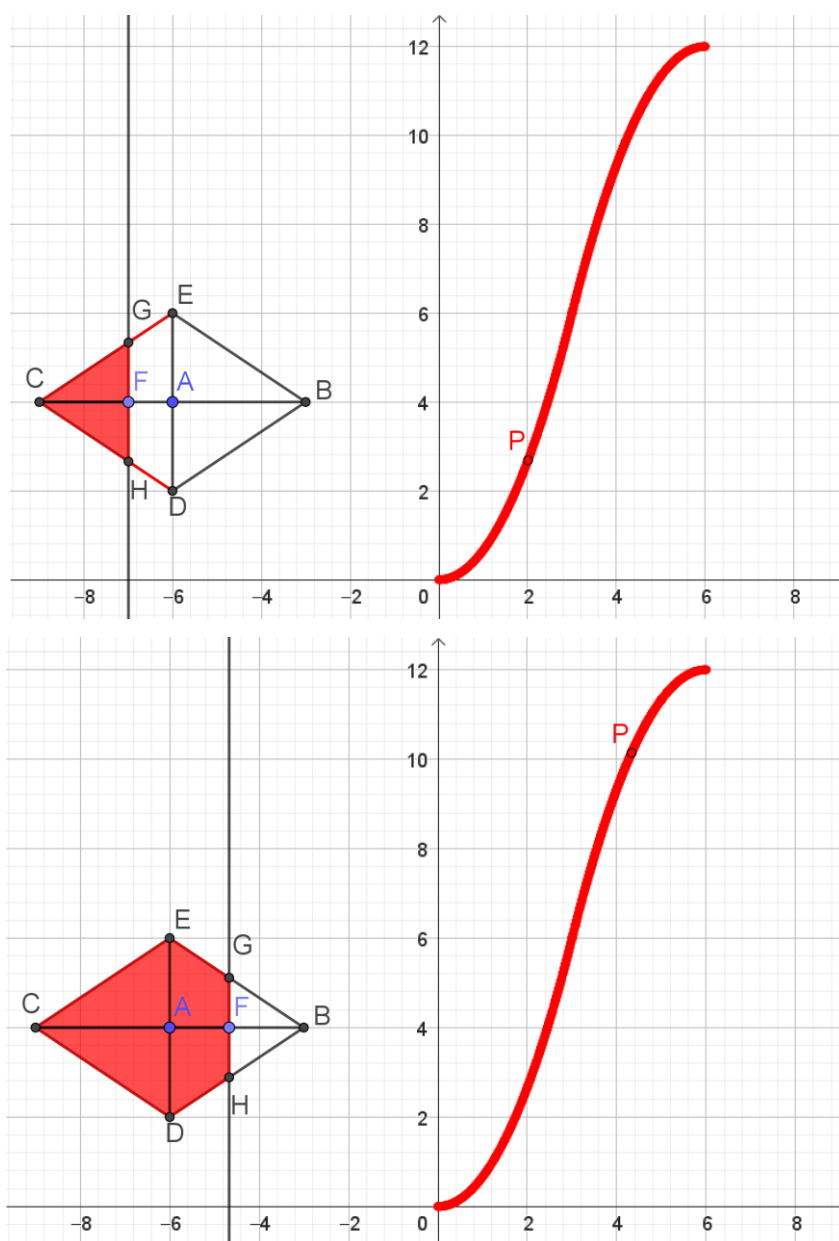
Para o cálculo da área do pentágono CEGHD o aluno pode recorrer ao raciocínio por subtração, de forma que a área do triângulo BGH seja retirada da área total do losango BECD.

$$A_{CEGHD} = A_{BECD} - A_{BGH} = 12 - \frac{\overline{GH} \cdot \overline{BF}}{2} = 12 - \frac{2 \cdot 1,5}{2} = 10,5 \text{ u. a.}$$

Construção: 2ª etapa.

A partir do losango BECD construído na 1ª etapa, vamos agora construir um ponto P móvel, cuja abscissa é a medida do segmento CF e, cuja ordenada, é a medida da área da região definida no interior do losango e situada à esquerda da reta que passa por F e é perpendicular à BC, vamos denominar esta região de R. Habilitando o rastro do ponto P, na medida em que o ponto F é movimentado sobre a diagonal BC, o ponto P descreve o gráfico de uma função que representa a variação da área da região R em função do comprimento variável  $x$  do segmento CF.

Figura 136 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 09.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

A partir desta 2ª construção, são apresentadas as seguintes questões:

4. Considerando  $\overline{CF} = x$ , calcular a medida do segmento GH.
5. Considerando  $\overline{CF} = x$ , calcular expressões para a área da região interior ao losango e à esquerda da reta considerada.
6. Denominando  $f(x)$  a função que associa a medida  $x$  do segmento CF à área da região R, determine o domínio e o conjunto Imagem de  $f(x)$ .

As respostas esperadas são:

4. O aluno deve recorrer às mesmas semelhanças utilizadas nas questões de números 2 e 3:

Se  $F \in CA$ , isto é, se  $x \leq 3$ :

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{ED}} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{\overline{GH}}{4} \Rightarrow \overline{GH} = \frac{4x}{3}$$

Se  $F \in AB$ , isto é, se  $3 < x \leq 6$ :

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{ED}} \Rightarrow \frac{6-x}{3} = \frac{\overline{GH}}{4} \Rightarrow \overline{GH} = \frac{24-4x}{3}$$

5. O aluno deve recorrer aos mesmos cálculos de área utilizados nas questões 2 e 3:

Se  $F \in CA$ , isto é, se  $0 \leq x \leq 3$ :

$$A_{CGH} = \frac{\overline{GH} \cdot \overline{CF}}{2} = \frac{\left(\frac{4x}{3}\right) \cdot x}{2} = \frac{4x^2}{6} = \frac{2x^2}{3}$$

Se  $F \in AB$ , isto é, se  $3 < x \leq 6$ :

$$\begin{aligned} A_{CEGHD} &= 12 - \frac{\overline{GH} \cdot \overline{BF}}{2} = 12 - \frac{\left(\frac{24-4x}{3}\right) \cdot (6-x)}{2} = 12 - \frac{144 - 48x + 4x^2}{6} = \\ &= 12 - \frac{72 - 24x + 2x^2}{3} = \frac{36 - 72 + 24x - 2x^2}{3} = \frac{-2x^2 + 24x - 36}{3} \end{aligned}$$

Assim, a lei da função que representa a variação da área da região R é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2}{3}, & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{-2x^2 + 24x - 36}{3}, & \text{se } 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

6. O aluno necessita perceber às variações de  $x$  e  $f(x)$  no gráfico gerado. Assim, o domínio e o conjunto imagem procurados são os intervalos:  $D(f) = [0; 6]$  e  $Im(f) = [0; 12]$ .

Uma vez feita a modelagem da função, os estudantes são convidados a refletirem sobre o tipo de função encontrada, que é uma função de duas sentenças, ambas definidas

por funções quadráticas, representadas por arcos de parábolas que se unem no ponto de coordenadas (3; 6).

## **7.2 Segunda Sequência de atividades – para estudantes do 3º ano do Ensino Médio**

Esta sequência é composta por um conjunto de cinco problemas geométricos sobre áreas de figuras planas, todos eles resultando em funções trigonométricas dos seguintes tipos: função seno, função cosseno e função tangente, em alguns casos combinadas com a função modular. Estas atividades foram planejadas para estudantes do 3º ano do Ensino Médio.

Recomendamos que, durante a aplicação da sequência didática, os cinco problemas sejam trabalhados na ordem em que são apresentados, uma vez que seguem uma progressão crescente de complexidade. Da mesma forma, sugere-se que as questões internas de cada problema sejam resolvidas sequencialmente, respeitando a ordem proposta. Além disso, é importante que as construções solicitadas em cada etapa sejam realizadas pelo próprio estudante, também na sequência em que aparecem.

### **7.2.1. Problema nº 01**

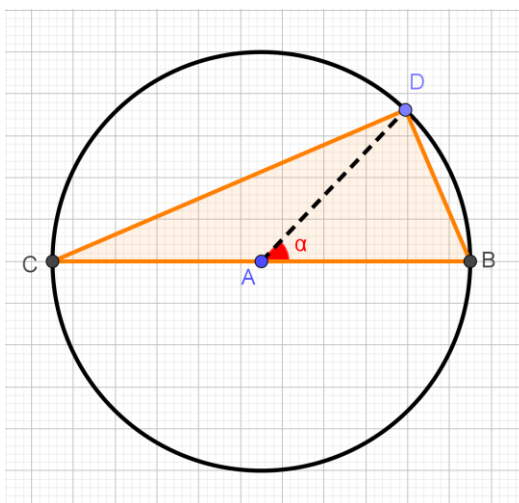
Objetivos de aprendizagem:

- Reconhecer propriedades de triângulos e círculos a partir de suas definições e características.
- Utilizar software de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de triângulos retângulos.
- Resolver problemas que envolvam relações trigonométricas em triângulos retângulos.
- Identificar arcos simétricos em diferentes quadrantes do ciclo trigonométrico.
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função seno no plano cartesiano.
- Explorar o comportamento da função seno (crescimento, decrescimento, máximos e mínimos).

Duração: 3 horas/aula.

**Problema nº 01:** Construir um círculo unitário de centro  $A$  e diâmetro  $BC$ . Seja  $D$  um ponto qualquer do círculo e seja  $\alpha = \widehat{BAD}$  marcado no sentido anti-horário, sendo  $\alpha$  um arco da 1ª volta. Determine a área do triângulo  $BCD$  em função de  $\alpha$ .

Figura 137 - Ilustração do problema nº 01.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Construção: 1ª etapa.

Por um ponto  $A$  traçamos um círculo de centro  $A$  e raio unitário. Traçamos uma reta passando pelo ponto  $A$ . Marcamos  $B$  e  $C$ , pontos de intersecção do círculo a reta traçada. Traçamos o diâmetro  $BC$ . Marcamos um ponto qualquer  $D$  sobre o círculo e criamos o ângulo  $\widehat{BAD} = \alpha$ . Por fim construímos o triângulo  $BCD$ .

A fim de explorarmos a figura construída, são propostas as seguintes questões:

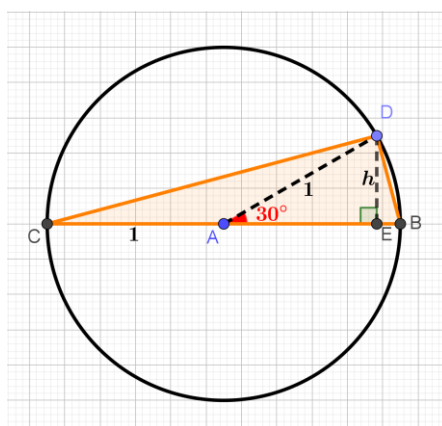
1. Como são classificados os triângulos  $ABD$  e  $ADC$  em relação aos lados?
2. Qual a medida do ângulo  $\widehat{DAC}$  em função de  $\alpha$ ?
3. Quais as medidas dos ângulos  $\widehat{ADC}$  e  $\widehat{ADB}$  em função de  $\alpha$ ?
4. Como podemos classificar o triângulo  $BCD$  em relação aos ângulos?
5. Considerando  $\alpha = 30^\circ$ , calcule a área do triângulo  $BCD$ .
6. Considerando  $\alpha = 120^\circ$ , calcule a área do triângulo  $BCD$ .
7. Considerando  $\alpha = 225^\circ$ , calcule a área do triângulo  $BCD$ .
8. Considerando  $\alpha = 330^\circ$ , calcule a área do triângulo  $BCD$ .

As respostas esperadas são:

1. Como  $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = 1$ , que é o raio do círculo, então os triângulos  $ABD$  e  $ADC$  são isósceles.
2. Como  $\widehat{BAC}$  é um ângulo raso, então  $\widehat{DAC} = \widehat{BAC} - \widehat{BAD} = 180^\circ - \alpha$ .

3. Como ABD e ADC são isósceles, temos que  $\widehat{ADB} = \widehat{ABD}$  e  $\widehat{ADC} = \widehat{ACD}$ . Utilizando a soma dos ângulos internos em cada um desses triângulos temos:  $\widehat{ADB} = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$  e  $\widehat{ADC} = \frac{180^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}$ .
4. Como  $\widehat{CDB} = \widehat{ADB} + \widehat{ADC} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$ . Assim, BCD é um triângulo retângulo.
5. Vamos considerar como base do triângulo BCD a hipotenusa  $\overline{BC} = 2$ . Logo é necessário calcularmos a altura traçada do vértice D até a base BC. Seja E o pé da perpendicular traçada do ponto D até o lado BC. Denominaremos  $h$  a medida da altura  $DE$ .

Figura 138 - Solução particular para  $\alpha = 30^\circ$ .

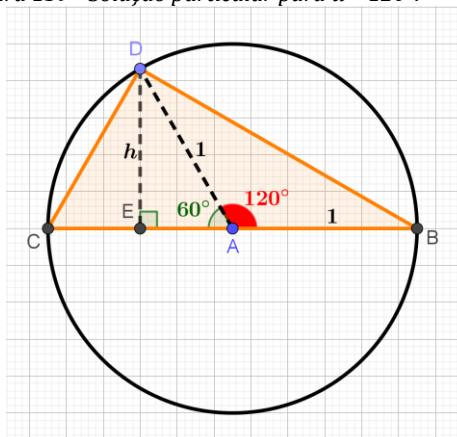


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Assim,  $\sin 30^\circ = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{h}{1} = h$ . Logo  $h = \frac{1}{2}$ . Desta forma a área do triângulo BCD é dada por  $A_{BCD} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{DE}}{2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$  unidade quadrada.

6. Considerando agora a situação em que  $\alpha = 120^\circ$  temos o seguinte desenho:

Figura 139 - Solução particular para  $\alpha = 120^\circ$ .

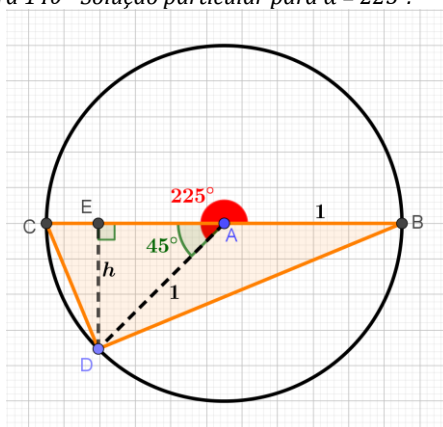


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Neste caso,  $\widehat{DAE} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$  e  $\sin 60^\circ = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{h}{1} = h$ . Logo  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Desta forma a área do triângulo BCD é dada por  $A_{BCD} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{DE}}{2} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  unidade quadrada.

7. Considerando agora a situação em que  $\alpha = 225^\circ$  temos o seguinte desenho:

Figura 140 - Solução particular para  $\alpha = 225^\circ$ .

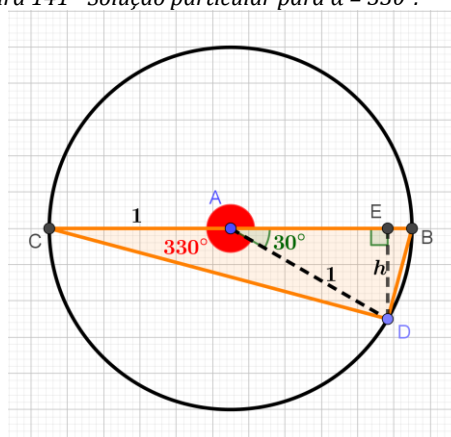


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Neste caso,  $\widehat{DAE} = 225^\circ - 180^\circ = 45^\circ$  e  $\sin 45^\circ = \frac{DE}{AD} = \frac{h}{1} = h$ . Logo  $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Desta forma a área do triângulo BCD é dada por  $A_{BCD} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{DE}}{2} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  unidade quadrada.

8. Considerando agora a situação em que  $\alpha = 330^\circ$  temos o seguinte desenho:

Figura 141 - Solução particular para  $\alpha = 330^\circ$ .

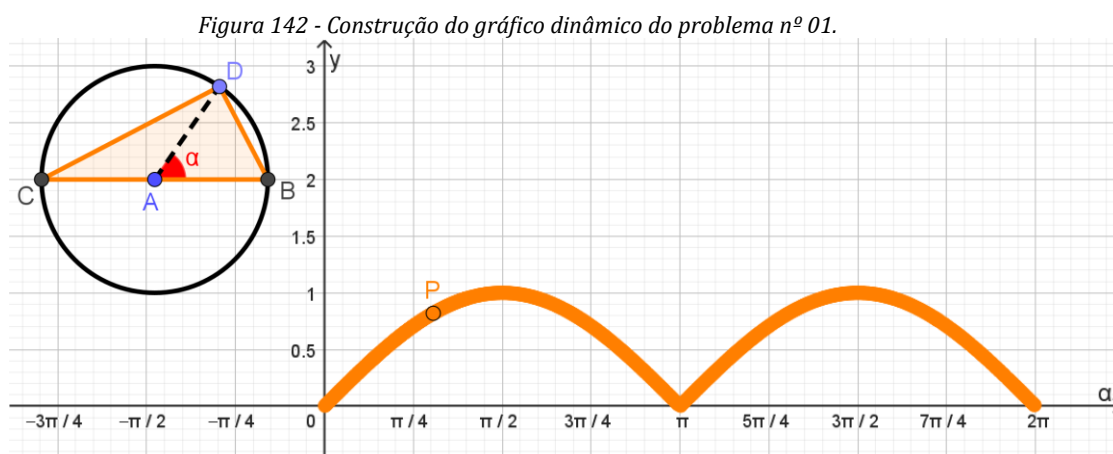


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Neste caso,  $D\hat{A}E = 360^\circ - 330^\circ = 30^\circ$  e  $\sin 30^\circ = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{h}{1} = h$ . Logo  $h = \frac{1}{2}$ . Desta forma a área do triângulo BCD é dada por  $A_{BCD} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{DE}}{2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$  unidade quadrada.

Construção: 2ª etapa.

Com o objetivo de construir um gráfico cartesiano gerado a partir da construção realizada na 1ª etapa, vamos criar um ponto P cuja abscissa seja  $\alpha$  e a ordenada seja a área do triângulo BCD. O software GeoGebra automaticamente tomará as medidas de  $\alpha$  em radianos. Movimentando o ponto D no círculo, então o ponto P descreve o gráfico cartesiano procurado:



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Observação: Cabe ressaltar que ao criarmos ou renomearmos um objeto, este software não aceita que denominemos qualquer medida utilizando as letras x e y, já que estas possuem a função específica de designar abscissa e ordenada, respectivamente. Desta forma, o ângulo  $\alpha$  será a variável independente da função procurada.

Mais algumas questões são propostas:

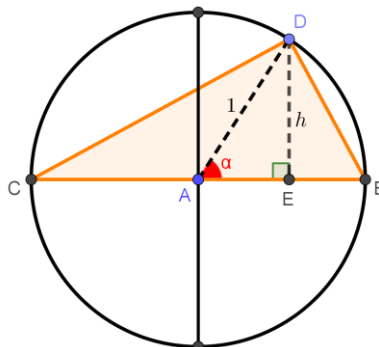
9. Calcule uma expressão para a altura  $h$  do triângulo BCD, relativa à hipotenusa BC.
10. Calcule a expressão para a área do triângulo BCD.
11. Para quais valores de  $\alpha$  temos que BCD possui área máxima? Qual o valor desta área máxima?
12. Para quais valores de  $\alpha$  temos a área mínima de BCD? Qual o valor desta área mínima?
13. Escreva o domínio, a imagem e o período da função  $f(\alpha) = A_{BCD}$ .

São esperadas as seguintes respostas:

9. Pode-se imaginar o círculo unitário da questão como o ciclo trigonométrico.

Quando  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  temos que  $h = \text{sen } \alpha$ .

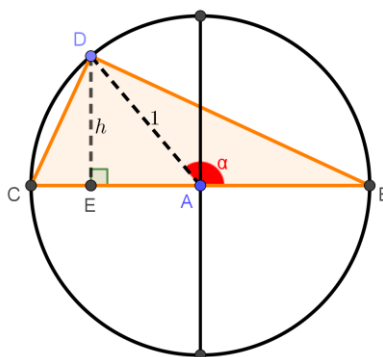
Figura 143 - Análise da altura quando  $\alpha$  está no 1º quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Quando  $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$  temos que  $h = \text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha$ .

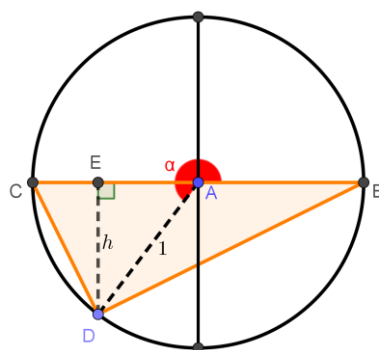
Figura 144 - Análise da altura quando  $\alpha$  está no 2º quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Quando  $\pi < \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$  temos que  $h = \text{sen}(\alpha - 180^\circ) = -\text{sen } \alpha$ .

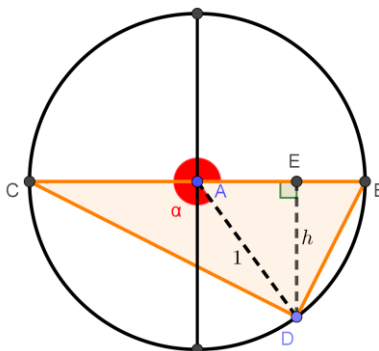
Figura 145 - Análise da altura quando  $\alpha$  está no 3º quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Quando  $\frac{3\pi}{2} < \alpha \leq 2\pi$  temos que  $h = \text{sen}(360^\circ - \alpha) = -\text{sen } \alpha$ .

Figura 146 - Análise da altura quando  $\alpha$  está no 4º quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Portanto,  $h = \begin{cases} \text{sen } \alpha, & \text{se } 0 \leq \alpha \leq \pi \\ -\text{sen } \alpha, & \text{se } \pi < \alpha \leq 2\pi \end{cases} = |\text{sen } \alpha|$  unidades.

$$10. A_{BCD} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{DE}}{2} = \frac{2 \cdot |\text{sen } \alpha|}{2} = |\text{sen } \alpha| \text{ unidades quadradas.}$$

11.  $A_{BCD}$  será máxima quando  $|\text{sen } \alpha| = 1$ . Isto implica que  $\text{sen } \alpha = \pm 1$ . Daí concluímos que  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ou  $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ . O valor destas áreas máximas é igual a 1 unidade quadrada.

12.  $A_{BCD}$  será mínima quando  $|\text{sen } \alpha| = 0$ , isto é,  $\text{sen } \alpha = 0$ . Portanto, temos  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = \pi$  ou  $\alpha = 2\pi$ . O valor destas áreas mínimas é igual a 0 unidade quadrada. Nestes pontos o triângulo BCD degenera-se em um segmento e, portanto, tem área nula.

13. Como  $\alpha$  é um arco da 1ª volta, temos que  $D(f) = [0, 2\pi]$ . O conjunto imagem é  $Im(f) = [0, 1]$ . A função  $f(\alpha)$  repete seus valores de  $\pi$  em  $\pi$  unidades.

### 7.2.2. Problema nº 02

Objetivos de aprendizagem:

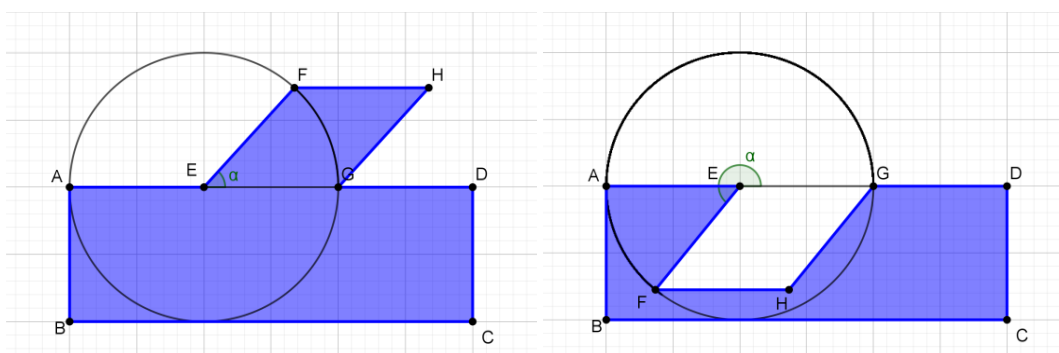
- Reconhecer propriedades de retângulos, losangos e círculos a partir de suas definições e características.
- Utilizar software de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de retângulos e losangos.
- Resolver problemas que envolvam fórmulas trigonométricas para a área de losangos.
- Identificar arcos simétricos em diferentes quadrantes do ciclo trigonométrico.

- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função seno no plano cartesiano.
- Explorar o comportamento da função seno (crescimento, decréscimo, máximos e mínimos).

Duração: 3 horas/aula.

**Problema nº 02:** Construir uma região poligonal formada pela composição de duas formas: um retângulo  $ABCD$  com dimensões  $AB = 1$  unidade e  $BC = 3$  unidades e um losango  $EFHG$  cujo lado mede 1 unidade e cujo ângulo  $\widehat{GEF} = \alpha$  tem medida variando no sentido anti-horário, sendo  $\alpha$  um arco da 1ª volta. Os pontos  $E$  e  $G$  pertencem ao segmento  $AD$  tais que  $AE = EG = GD = 1$ . Determine a área da região poligonal  $ABCDGHFE$  em função de  $\alpha$ .

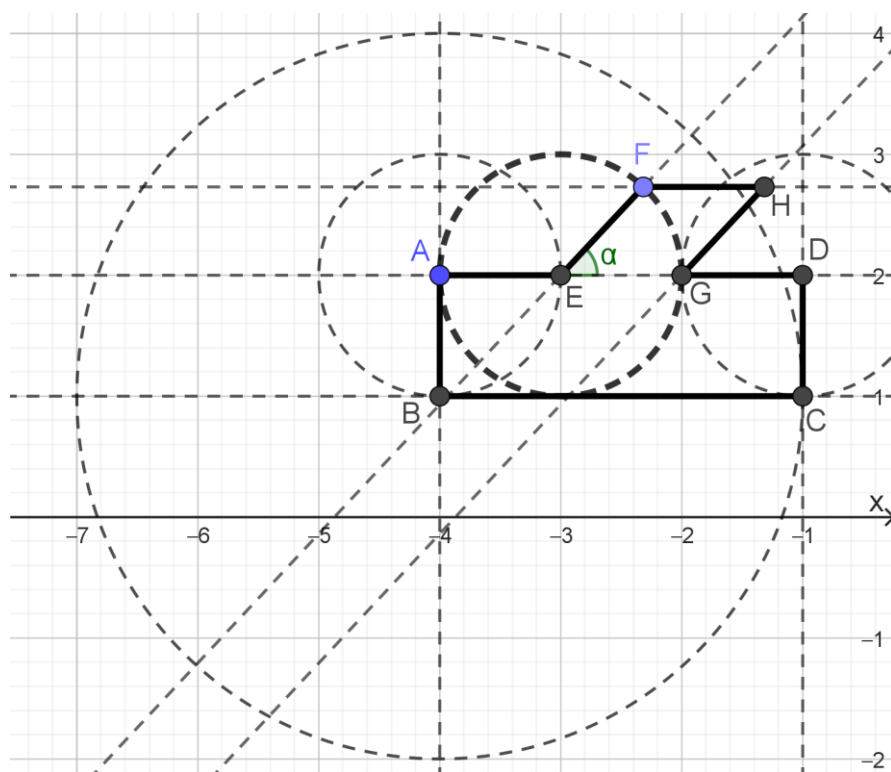
Figura 147 - Ilustração do problema nº 02.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª etapa.

Figura 148 - Construção geométrica do problema nº 02.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Nesta construção, iniciamos com a criação de um retângulo  $ABCD$  com  $\overline{AB} = 1$  e  $\overline{BC} = 3$ , conforme procedimento descrito no problema nº 1 da 1ª sequência didática. Em seguida, criamos o ponto  $E \in AD$  de tal forma que  $AE = 1$ , criando um círculo de raio 1 e centro em  $A$ , e marcamos  $E$  como o ponto de intersecção deste círculo com  $AD$ . Com centro em  $E$  e raio  $\overline{EA} = 1$ , traçamos um círculo e, sobre ele, marcamos um ponto arbitrário  $F$ . Marcamos o ponto  $G$  de intersecção deste último círculo com  $AD$ , sendo que  $A$  e  $G$  são pontos distintos. Traçamos a reta  $EF$  e sua paralela passando pelo ponto  $G$ . Traçamos, pelo ponto  $F$ , uma reta paralela ao segmento  $EG$ . Na intersecção da reta paralela a  $EF$  que passa por  $G$  com a reta paralela a  $EG$  que passa por  $F$ , marcamos o ponto  $H$ . Construimos o polígono  $ABCDGHFE$ . Desejamos investigar a variação da área da região poligonal  $ABCDGHFE$  em função da medida do ângulo  $\widehat{GEF} = \alpha$ , medido no sentido anti-horário.

Algumas questões para explorar a figura construída:

Calcule a área da região poligonal  $ABCDGHFE$  quando:

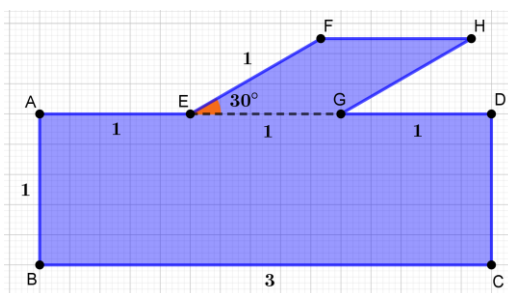
1.  $\alpha = 30^\circ$ .
2.  $\alpha = 90^\circ$ .
3.  $\alpha = 135^\circ$ .
4.  $\alpha = 240^\circ$ .

5.  $\alpha = 270^\circ$ .
6.  $\alpha = 330^\circ$ .
7.  $\alpha = 0^\circ$  ou  $\alpha = 180^\circ$ .

Respostas esperadas:

1. Quando  $\alpha = 30^\circ$ , a área procurada é a soma das áreas do retângulo ABCD e do losango EFHG. Assim,  $A_{ABCDGHFE} = A_{ABCD} + A_{EFHG} = 3 \cdot 1 + 1^2 \cdot \text{sen } 30^\circ = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$  unidades quadradas.

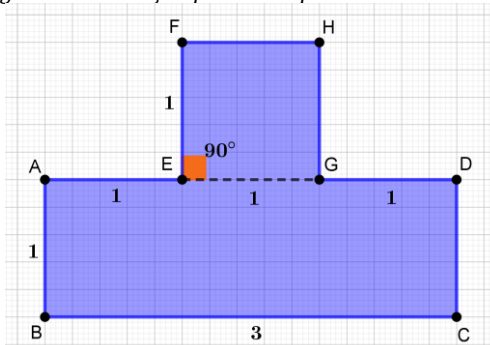
Figura 149 - Solução particular para  $\alpha = 30^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

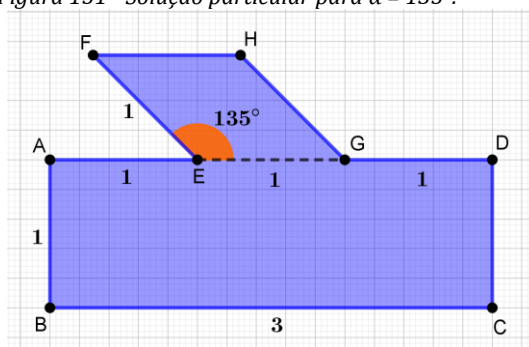
2. Quando  $\alpha = 90^\circ$ , a área procurada é a soma das áreas do retângulo ABCD e do quadrado EFHG. Assim,  $A_{ABCDGHFE} = A_{ABCD} + A_{EFHG} = 3 \cdot 1 + 1^2 = 3 + 1 = 4$  unidades quadradas.

Figura 150 - Solução particular para  $\alpha = 90^\circ$ .



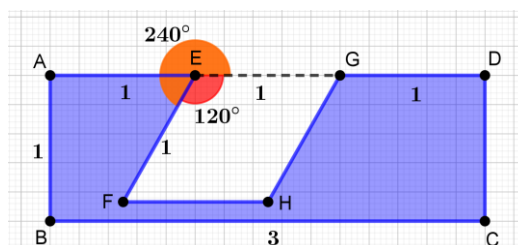
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

3. Quando  $\alpha = 135^\circ$ , a área procurada é a soma das áreas do retângulo ABCD e do losango EFHG. Assim,  $A_{ABCDGHFE} = A_{ABCD} + A_{EFHG} = 3 \cdot 1 + 1^2 \cdot \text{sen } 135^\circ = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6+\sqrt{2}}{2}$  unidades quadradas.

Figura 151 - Solução particular para  $\alpha = 135^\circ$ .

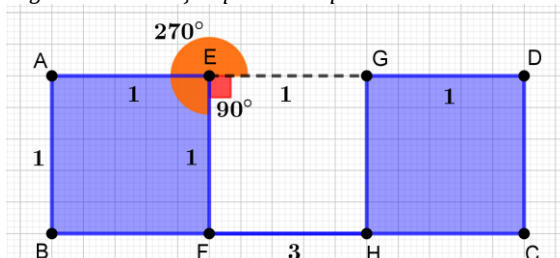
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

4. Quando  $\alpha = 240^\circ$ , a área procurada é a diferença das áreas do retângulo ABCD e do losango EFHG. Assim,  $A_{ABCDGHFE} = A_{ABCD} - A_{EFHG} = 3 \cdot 1 - 1^2 \cdot \text{sen } 120^\circ = 3 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6 - \sqrt{3}}{2}$  unidades quadradas.

Figura 152 - Solução particular para  $\alpha = 240^\circ$ .

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

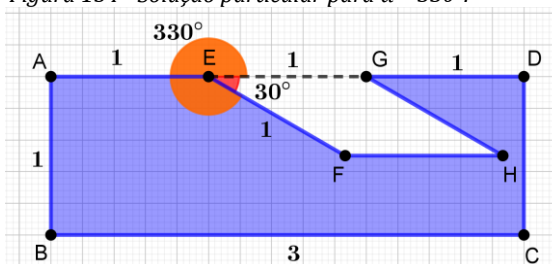
5. Quando  $\alpha = 270^\circ$ , a área procurada é a diferença das áreas do retângulo ABCD e do quadrado EFHG. Assim, temos:  $A_{ABCDGHFE} = A_{ABCD} - A_{EFHG} = 3 \cdot 1 - 1^2 = 3 - 1 = 2$  unidades quadradas.

Figura 153 - Solução particular para  $\alpha = 270^\circ$ .

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

6. Quando  $\alpha = 330^\circ$ , a área procurada é a diferença das áreas do retângulo ABCD e do losango EFHG. Assim, temos:  $A_{ABCDGHFE} = A_{ABCD} - A_{EFHG} = 3 \cdot 1 - 1^2 \cdot \text{sen } 30^\circ = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$  unidades quadradas.

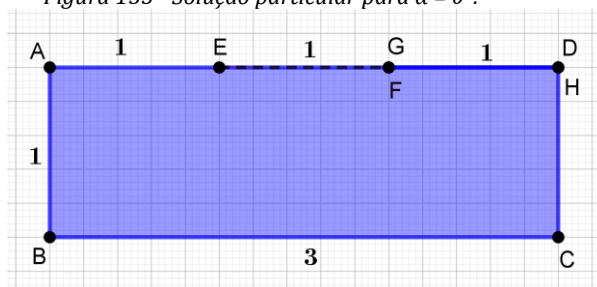
Figura 154 - Solução particular para  $\alpha = 330^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

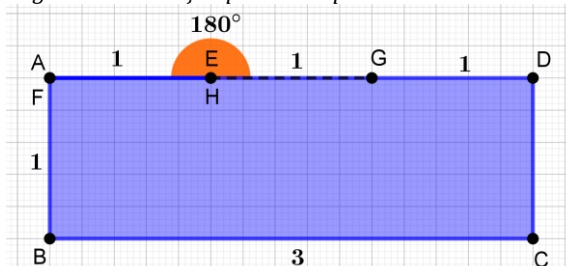
7. Quando  $\alpha = 0^\circ$  ou  $\alpha = 180^\circ$  os vértices E, F, G e H do losango ficam alinhados e, portanto, o losango degenera-se em um segmento cuja área é zero. Desta forma a área da região procurada resume-se à área do retângulo ABCD, isto é,  $A_{ABCDGHFE} = A_{ABCD} = 3 \cdot 1 = 3$  unidades quadradas.

Figura 155 - Solução particular para  $\alpha = 0^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Figura 156 - Solução particular para  $\alpha = 180^\circ$ .

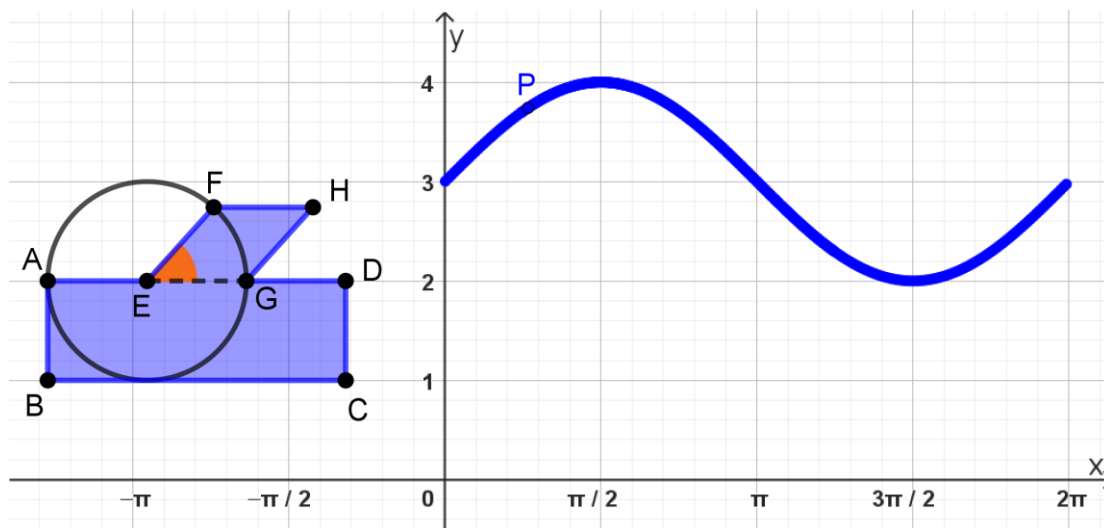


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 2ª etapa.

A fim de construirmos um gráfico cartesiano a partir da construção realizada na 1ª etapa, vamos criar um ponto P cuja abscissa seja  $\alpha$  e a ordenada seja a área da região poligonal ABCDGHFE. Movimentando o ponto F no círculo, então o ponto P descreve o gráfico cartesiano procurado:

Figura 157 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 02.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

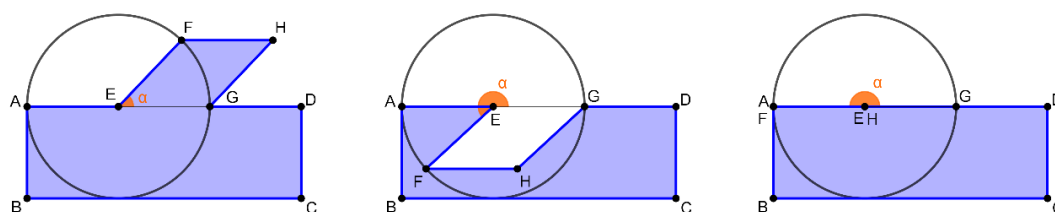
Na sequência são propostas as seguintes questões:

8. Determine uma expressão para a área da região ABCDGHFE.
9. Para quais valores de  $\alpha$  temos que ABCDGHFE possui área máxima? Qual o valor desta área máxima?
10. Para quais valores de  $\alpha$  temos a área mínima de ABCDGHFE? Qual o valor desta área mínima?
11. Escreva o domínio e a imagem da função  $f(\alpha) = A_{ABCDGHFE}$ .

As respostas esperadas são:

8. Primeiramente observamos que existem três situações: ou os pontos F e H são pontos externos ao retângulo ABCD e, portanto, a área procurada é dada por  $A_{ABCD} + A_{EFHG}$ , ou os pontos F e H são pontos internos ao retângulo ABCD e, neste caso a área procurada é expressa como  $A_{ABCD} - A_{EFHG}$ , ou ainda, quando os pontos F e H estão sobre o segmento AD e neste caso a área procurada se reduz apenas à área do retângulo ABCD.

Figura 158 - Análise da variação da área em função de  $\alpha$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Sabemos que ABCD é um retângulo de dimensões 1 e 3, portanto  $A_{ABCD} = 3 \cdot 1 = 3$  unidades quadradas e o quadrilátero EFGH é um losango, pois é um paralelogramo com quatro lados congruentes. Para calcular a área deste losango podemos utilizar a expressão  $A_{EFGH} = a^2 \cdot \text{sen } \alpha$ , em que  $a$  é a medida do lado e  $\alpha$  é um ângulo interno qualquer do losango.

Se os pontos F e H são externos ao retângulo ABCD, e se  $\widehat{GEF} = \alpha$ , então  $0 < \alpha < \pi$  e  $A_{EFGH} = 1^2 \cdot \text{sen } \alpha = \text{sen } \alpha$ . Portanto, no primeiro caso, temos que  $A = 3 + \text{sen } \alpha$ .

Caso os pontos F e H sejam internos ao retângulo ABCD, então  $\pi < \alpha < 2\pi$ , logo  $A_{EFGH} = 1^2 \cdot \text{sen } (2\pi - \alpha) = -\text{sen } \alpha$ . Portanto, no segundo caso, temos que  $A = 3 - (-\text{sen } \alpha) = 3 + \text{sen } \alpha$ .

Se os pontos F e H pertencem ao segmento AD então  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = \pi$ , ou  $\alpha = 2\pi$ . Então, como  $\text{sen } 0 = \text{sen } \pi = \text{sen } 2\pi = 0$ , temos que, nestes casos, a área  $A_{EFGH} = 0$  e, portanto, a fórmula  $A = 3 + \text{sen } \alpha$  permanece válida. Como nas três situações encontramos a mesma expressão, podemos afirmar que a função procurada tem expressão  $y = 3 + \text{sen } \alpha$ , sendo  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ .

9. O ponto que corresponde à área máxima é  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  e  $A_{max} = 4$ .

10. O ponto que corresponde à área mínima é  $\alpha = \frac{3\pi}{2}$  e  $A_{min} = 2$ .

11. Como  $\alpha$  é um arco da 1ª volta, temos que  $D(f) = [0, 2\pi]$ . O conjunto imagem pode ser obtido por meio do cálculo:

$$-1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1 \Rightarrow 3 + (-1) \leq 3 + \text{sen } \alpha \leq 3 + 1 \Rightarrow 2 \leq f(\alpha) \leq 4$$

Logo,  $Im(f) = [2, 4]$ .

### 7.2.3. Problema nº 03

Objetivos de aprendizagem:

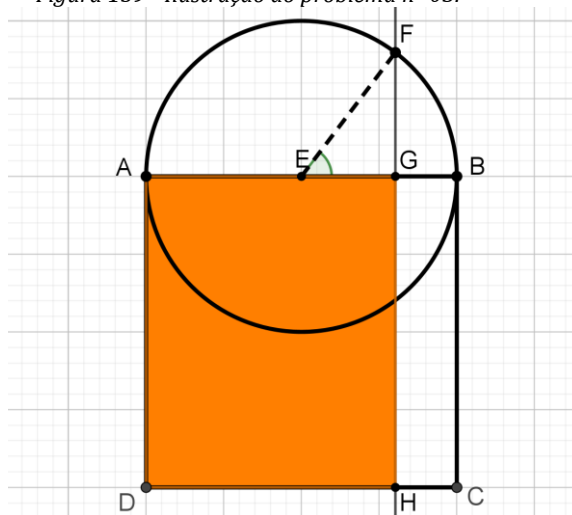
- Reconhecer propriedades de quadrados, retângulos e círculos a partir de suas definições e características.
- Utilizar software de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de retângulos.
- Resolver problemas que envolvam relações trigonométricas em triângulos retângulos.

- Identificar arcos simétricos em diferentes quadrantes do ciclo trigonométrico.
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função cosseno no plano cartesiano.
- Explorar o comportamento da função cosseno (crescimento, decrescimento, máximos e mínimos).

Duração: 3 horas/aula.

**Problema n° 03:** Construir um quadrado  $ABCD$  cujo lado mede 2 unidades e um círculo de centro  $E$  e raio  $\overline{EA}$ , onde  $E$  é ponto médio de  $AB$ . Marcar um ponto qualquer  $F$  sobre o círculo, de modo que  $\widehat{BEF} = \alpha$  tem medida variando no sentido anti-horário, sendo  $\alpha$  um arco da 1ª volta. Por  $F$  traçar uma perpendicular ao lado  $AB$ , tal que essa perpendicular interseccione os lados  $AB$  e  $CD$  nos pontos  $G$  e  $H$ , respectivamente. Determine a área do quadrilátero  $AGHD$  em função de  $\alpha$ .

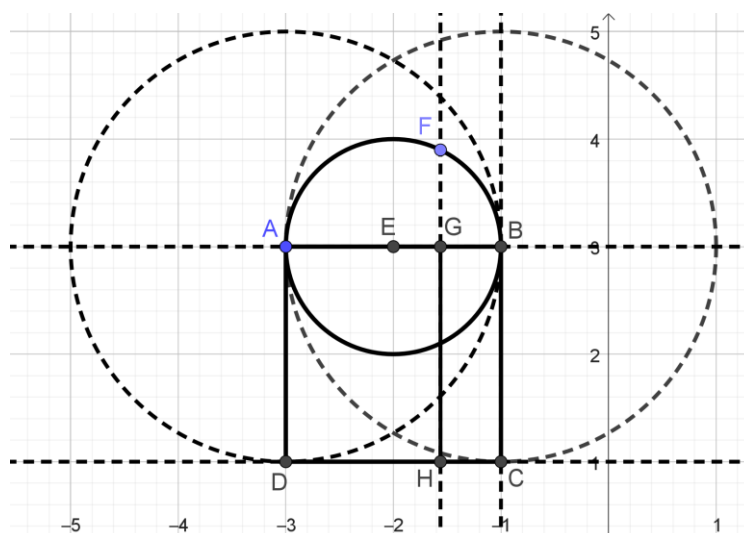
Figura 159 - Ilustração do problema n° 03.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A construção se inicia com a criação de um quadrado  $ABCD$ , cujo lado mede 2 unidades. A seguir, marcamos o ponto médio  $E$  do lado  $AB$  e traçamos o círculo de centro  $E$  e raio  $\overline{EA}$ . Então escolhemos um ponto arbitrário  $F$  sobre o círculo. Seja  $\alpha = \widehat{BEF}$ . Pelo ponto  $F$  baixamos uma perpendicular ao lado  $AB$  e esta reta interseccionará os lados  $AB$  e  $CD$  nos pontos  $G$  e  $H$ , respectivamente. Desejamos investigar a variação da área do quadrilátero  $ADHG$  em função da medida do ângulo  $\widehat{BEF}$ , medido no sentido anti-horário.

Figura 160 - Construção geométrica do problema nº 03.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Algumas questões para explorar a figura construída:

1. Explique por que o quadrilátero ADHG é um retângulo.

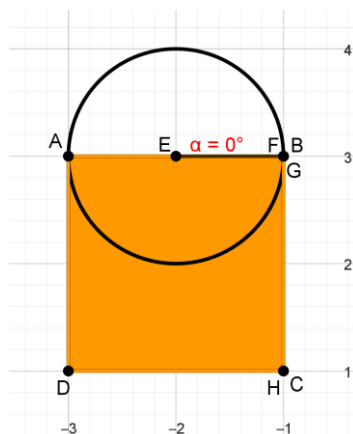
Calcule a área do quadrilátero ADHG quando:

2.  $\alpha = 0^\circ$ .
3.  $\alpha = 30^\circ$ .
4.  $\alpha = 90^\circ$ .
5.  $\alpha = 120^\circ$ .
6.  $\alpha = 180^\circ$ .
7.  $\alpha = 225^\circ$ .
8.  $\alpha = 270^\circ$ .
9.  $\alpha = 300^\circ$ .
10.  $\alpha = 360^\circ$ .

As respostas esperadas são:

1. Considerando o quadrilátero ADHG, temos que os ângulos dos vértices A e D são os mesmos do quadrado ABCD, logo  $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ . Por construção, FG é perpendicular a AB, logo  $\hat{G} = 90^\circ$  e, por consequência,  $\hat{H} = 90^\circ$ . Assim, ADHG é um retângulo.
2. Quando  $\alpha = 0^\circ$ , então os pontos de intersecção G e H coincidem com os vértices B e C do quadrado, respectivamente. Assim,  $A_{ADHG} = A_{ABCD} = 2^2 = 4$  unidades quadradas.

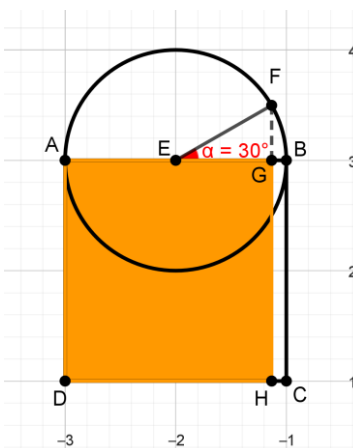
Figura 161 - Solução particular para  $\alpha = 0^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

3. Quando  $\alpha = 30^\circ$ , então devemos considerar o triângulo retângulo EFG, reto em G e com  $\widehat{GEF} = 30^\circ$ . Sabemos que  $\overline{EF} = 1$  (raio do círculo) e, portanto,  $\overline{EG} = 1 \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Assim,  $\overline{AG} = \overline{AE} + \overline{EG} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$ . Logo,  $A_{ADHG} = \overline{AD} \cdot \overline{AG} = 2 \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$  unidades quadradas.

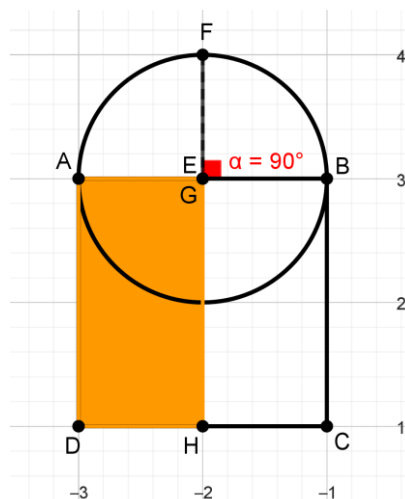
Figura 162 - Solução particular para  $\alpha = 30^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

4. Quando  $\alpha = 90^\circ$ , então o ponto de intersecção G coincide com o ponto médio E do lado AB, então  $\overline{AG} = \overline{AE} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2}{2} = 1$ . Assim,  $A_{ADHG} = \overline{AD} \cdot \overline{AG} = 2 \cdot 1 = 2$  unidades quadradas.

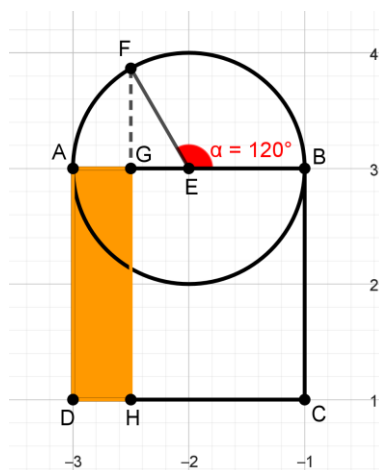
Figura 163 - Solução particular para  $\alpha = 90^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

5. Quando  $\alpha = 120^\circ$ , então devemos considerar o triângulo retângulo EFG, reto em G e com  $\widehat{GEF} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ . Sabemos que  $\overline{EF} = 1$  e, portanto,  $\overline{EG} = 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ . Assim,  $\overline{AG} = \overline{AE} - \overline{EG} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ . Logo,  $A_{ADHG} = \overline{AD} \cdot \overline{AG} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$  unidade quadrada.

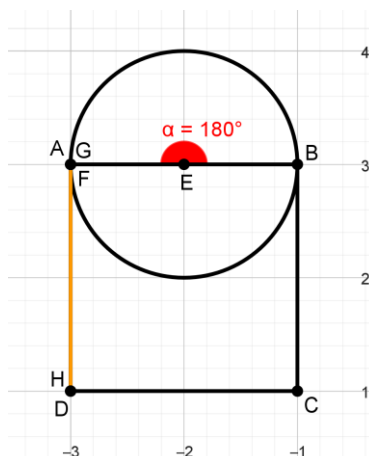
Figura 164 - Solução particular para  $\alpha = 120^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

6. Quando  $\alpha = 180^\circ$ , então os pontos de intersecção G e H coincidem com os vértices A e D do quadrado, respectivamente. Assim, o retângulo ADHG se degenera em apenas um segmento e assim, sua área é zero.

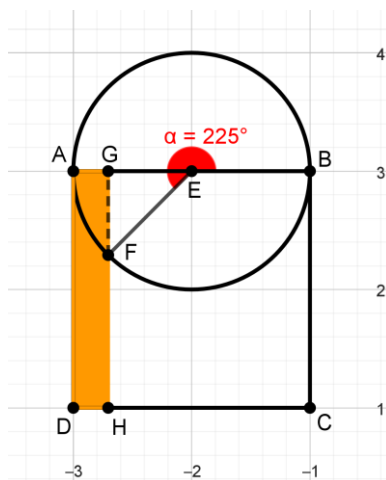
Figura 165 - Solução particular para  $\alpha = 180^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

7. Quando  $\alpha = 225^\circ$ , então devemos considerar o triângulo retângulo EFG, reto em G e com  $\widehat{GEF} = 225^\circ - 180^\circ = 45^\circ$ . Sabemos que  $\overline{EF} = 1$  e, portanto,  $\overline{EG} = 1 \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Assim,  $\overline{AG} = \overline{AE} - \overline{EG} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ . Logo,  $A_{ADHG} = \overline{AD} \cdot \overline{AG} = 2 \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}$  unidades quadradas.

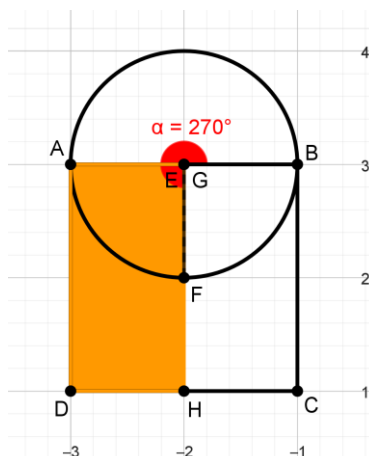
Figura 166 - Solução particular para  $\alpha = 225^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

8. Quando  $\alpha = 270^\circ$ , então o ponto de intersecção G coincide com o ponto médio E do lado AB, então  $\overline{AG} = \overline{AE} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2}{2} = 1$ . Assim,  $A_{ADHG} = \overline{AD} \cdot \overline{AG} = 2 \cdot 1 = 2$  unidades quadradas.

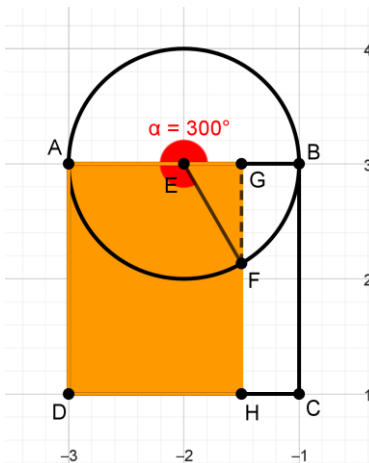
Figura 167 - Solução particular para  $\alpha = 270^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

9. Quando  $\alpha = 300^\circ$ , então devemos considerar o triângulo retângulo EFG, reto em G e com  $\widehat{GEF} = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$ . Sabemos que  $\overline{EF} = 1$  e, portanto,  $\overline{EG} = 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ . Assim,  $\overline{AG} = \overline{AE} + \overline{EG} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ . Logo,  $A_{ADHG} = \overline{AD} \cdot \overline{AG} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$  unidades quadradas.

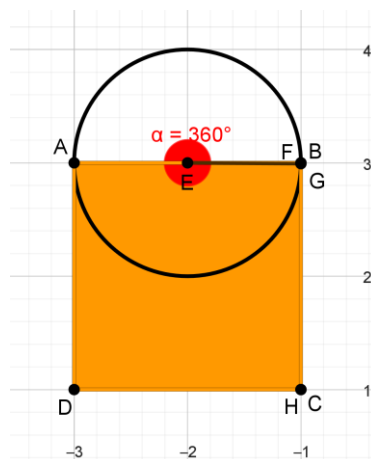
Figura 168 - Solução particular para  $\alpha = 300^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

10. Quando  $\alpha = 360^\circ$ , então os pontos de intersecção G e H coincidem com os vértices B e C do quadrado, respectivamente. Assim,  $A_{ADHG} = A_{ABCD} = 2^2 = 4$  unidades quadradas.

Figura 169 - Solução particular para  $\alpha = 360^\circ$ .

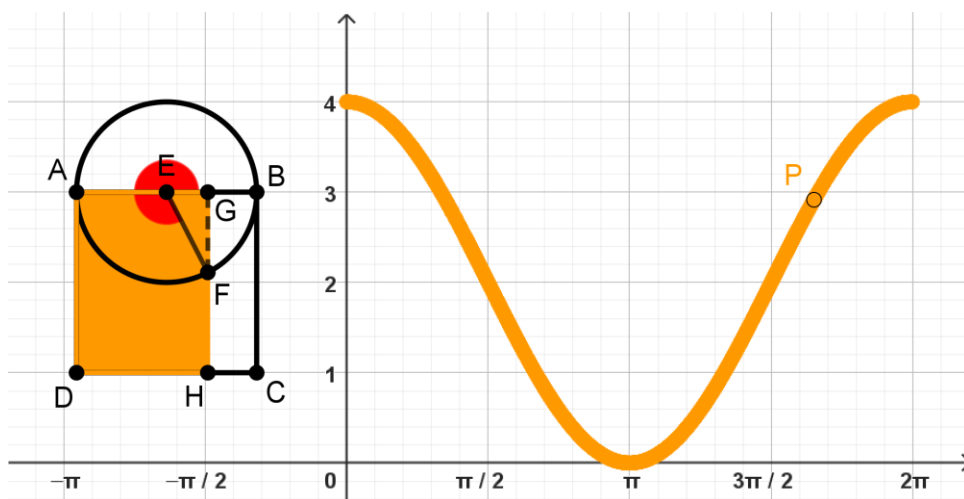


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Construção: 2ª etapa.

Vamos gerar um gráfico cartesiano diretamente relacionado à construção da 1ª etapa. Então criamos um ponto P cuja abscissa é  $\alpha$  e cuja ordenada é a área do retângulo  $ADHG$ . Habilitamos o rastro do ponto P e, quando movimentamos o ponto F sobre o círculo, observamos que P deixa como rastro a seguinte curva:

Figura 170 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 03.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Na sequência, são propostas as seguintes questões:

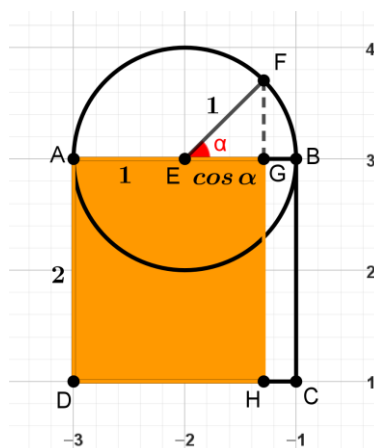
11. Deduza uma fórmula que expresse a área do retângulo  $ADHG$  em função de  $\alpha$ .
12. Para quais valores de  $\alpha$  temos que  $ADHG$  possui área máxima? Qual o valor desta área máxima?
13. Para quais valores de  $\alpha$  temos a área mínima de  $ADHG$ ? Qual o valor desta área mínima?
14. Escreva o domínio e a imagem da função  $f(\alpha) = A_{ADHG}$ .

As respostas esperadas são:

11. Primeiramente observamos que existem quatro situações: quando  $F$  está localizado em cada um dos quatro quadrantes.

No primeiro caso temos que  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ . Nesta situação, considerando o triângulo  $EFG$ ,  $EG$  é o cateto adjacente ao ângulo  $G\hat{E}F = \alpha$ . Portanto  $\overline{EG} = \overline{EF} \cdot \cos \alpha$ . Como  $\overline{EF} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2}{2} = 1$ , então  $\overline{EG} = 1 \cdot \cos \alpha$  e  $\overline{AG} = \overline{AE} + \overline{EG} = 1 + \cos \alpha$ .

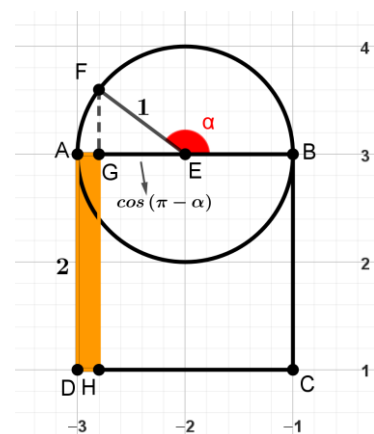
Figura 171 - Análise da medida de  $AG$  quando  $\alpha$  está no 1º quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

No segundo caso, quando  $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ , temos que  $G\hat{E}F = \pi - \alpha$ , então  $\overline{EG} = 1 \cdot \cos(\pi - \alpha) = 1 \cdot (-\cos \alpha) = -\cos \alpha$  e  $\overline{AG} = \overline{AE} - \overline{EG} = 1 - (-\cos \alpha) = 1 + \cos \alpha$ .

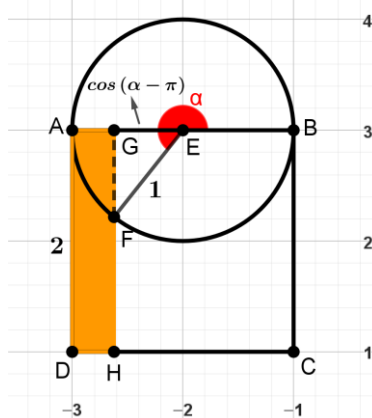
Figura 172 - Análise da medida de  $AG$  quando  $\alpha$  está no 2º quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

No 3º caso, quando  $\pi < \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$ , temos que  $G\hat{E}F = \alpha - \pi$ , então  $\overline{EG} = 1 \cdot \cos(\alpha - \pi) = -\cos \alpha$  e  $\overline{AG} = \overline{AE} - \overline{EG} = 1 - (-\cos \alpha) = 1 + \cos \alpha$ .

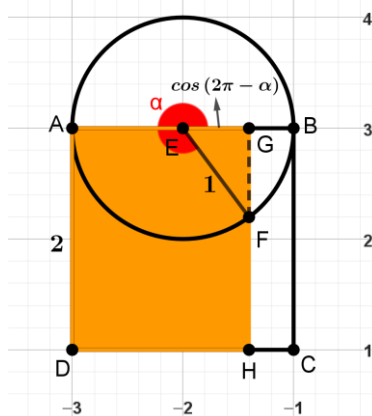
Figura 173 - Análise da medida de AG quando  $\alpha$  está no 3º quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

No 4º caso, quando  $\frac{3\pi}{2} < \alpha \leq 2\pi$ , temos que  $\widehat{GEF} = 2\pi - \alpha$ , então  $\overline{EG} = 1 \cdot \cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$  e  $\overline{AG} = \overline{AE} + \overline{EG} = 1 + \cos \alpha$ .

Figura 174 - Análise da medida de AG quando  $\alpha$  está no 4º quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Assim, em cada um dos quatro casos, temos que  $A_{ADHG} = \overline{AD} \cdot \overline{AG} = 2 \cdot (1 + \cos \alpha)$ , isto é,  $A_{ADHG} = 2 + 2 \cdot \cos \alpha$ .

12. Podemos afirmar que a área máxima ocorre quando o ponto G coincide com o ponto B, isto é, quando  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = 2\pi$  e  $A_{max} = 2 \cdot 2 = 4$  unidades quadradas.
13. Sobre a área mínima, sabemos que ocorre quando o ponto G coincide com o ponto A, isto é, quando  $\alpha = \pi$ , e  $A_{min} = 0$  unidades quadradas.
14. Como  $\alpha$  é um arco da 1ª volta, temos que  $D(f) = [0, 2\pi]$ . O conjunto imagem pode ser obtido por meio do cálculo:

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos \alpha \leq 1 &\Rightarrow 2 \cdot (-1) \leq 2 \cdot \cos \alpha \leq 2 \cdot 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \cdot \cos \alpha \leq 2 \\ &\Rightarrow -2 + 2 \leq 2 + 2 \cdot \cos \alpha \leq 2 + 2 \Rightarrow 0 \leq f(\alpha) \leq 4 \end{aligned}$$

Logo,  $Im(f) = [0, 4]$ .

### 7.2.4. Problema n° 04

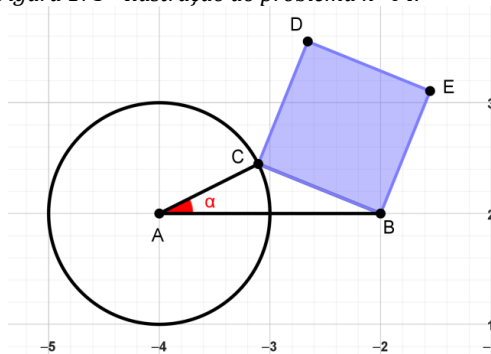
Objetivos de aprendizagem:

- Reconhecer propriedades de quadrados, triângulos e círculos a partir de suas definições e características.
- Utilizar software de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de quadrados.
- Resolver problemas que envolvam relações trigonométricas em triângulos quaisquer (Lei dos Cossenos).
- Identificar arcos simétricos em diferentes quadrantes do ciclo trigonométrico.
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função cosseno no plano cartesiano.
- Explorar o comportamento da função cosseno (crescimento, decréscimo, máximos e mínimos).

Duração: 3 horas/aula.

**Problema n° 04:** *Construir um triângulo  $ABC$  com  $\overline{AB} = 2$  unidades, sendo  $A$  e  $B$  pontos fixos e  $C$  um ponto qualquer sobre o círculo de centro  $A$  e raio unitário. Seja o ângulo  $B\hat{A}C = \alpha$  com medida variando no sentido anti-horário, sendo  $\alpha$  um arco da 1ª volta. Construir o quadrado  $BCDE$ , e determinar sua área em função de  $\alpha$ .*

Figura 175 - Ilustração do problema n° 04.



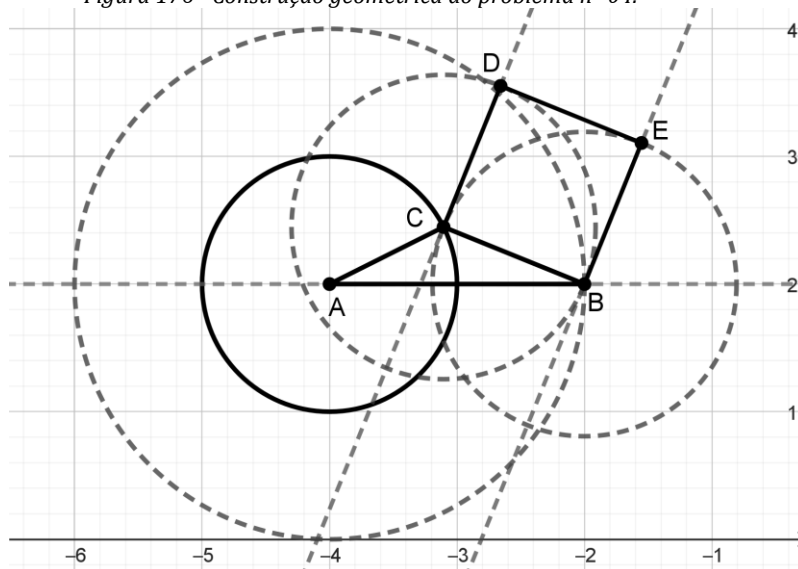
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Construção: 1ª etapa.

Marcamos um ponto  $A$  e traçamos dois círculos de raios de medidas 1 e 2, com centro neste ponto. Traçamos uma reta passando pelo ponto  $A$ , e marcamos o ponto  $B$

como uma das intersecções desta reta com o círculo maior. Sobre o círculo unitário criamos um ponto  $C$  qualquer e, unindo estes três pontos por segmentos, temos o triângulo  $ABC$ . Construimos um círculo de centro  $C$  e passando pelo ponto  $B$  e traçamos uma reta perpendicular à  $BC$  passando pelo ponto  $C$ . Marcamos  $D$  como ponto de intersecção deste último círculo e da perpendicular passando por  $C$ . Construimos um círculo de centro  $B$  e passando pelo ponto  $C$  e traçamos uma reta perpendicular à  $BC$  passando pelo ponto  $B$ . Marcamos  $E$  como ponto de intersecção deste último círculo e da perpendicular passando por  $B$ . Assim temos o quadrado  $BCDE$ , conforme figura abaixo.

Figura 176 - Construção geométrica do problema nº 04.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Sobre a figura construída, é proposta a seguinte questão:

Calcule a área do quadrado  $BCDE$  nos seguintes casos:

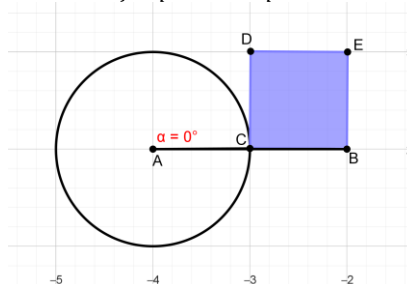
1.  $\alpha = 0^\circ$
2.  $\alpha = 45^\circ$
3.  $\alpha = 90^\circ$
4.  $\alpha = 120^\circ$
5.  $\alpha = 180^\circ$
6.  $\alpha = 210^\circ$
7.  $\alpha = 270^\circ$
8.  $\alpha = 300^\circ$
9.  $\alpha = 360^\circ$

São esperadas as seguintes respostas:

1. Quando  $\alpha = 0^\circ$ , temos que o ponto C está localizado sobre o ponto médio de AB.

Assim,  $\overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2}{2} = 1$  e, portanto,  $A_{BCDE} = \overline{BC}^2 = 1^2 = 1$  unidade quadrada.

Figura 177 - Solução particular para  $\alpha = 0^\circ$ .

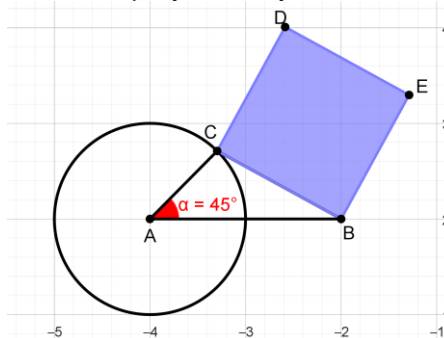


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

2. Quando  $\alpha = 45^\circ$ , podemos calcular a área do quadrado BCDE utilizando a Lei dos Cossenos:

$$\begin{aligned} A_{BCDE} &= \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \alpha = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 45^\circ \\ &= 5 - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 - 2\sqrt{2} \text{ unidades quadradas.} \end{aligned}$$

Figura 178 - Solução particular para  $\alpha = 45^\circ$ .

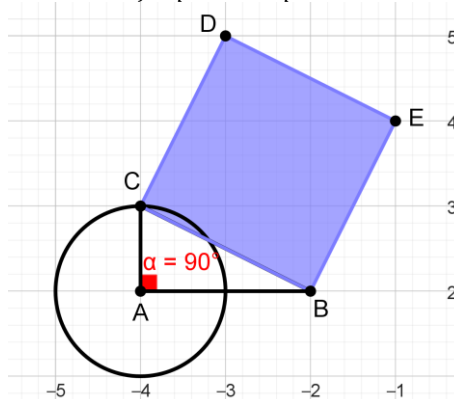


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

3. Quando  $\alpha = 90^\circ$ , podemos calcular a área de BCDE:

$$\begin{aligned} A_{BCDE} &= \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \alpha = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ \\ &= 5 - 4 \cdot 0 = 5 \text{ unidades quadradas.} \end{aligned}$$

Figura 179 - Solução particular para  $\alpha = 90^\circ$ .

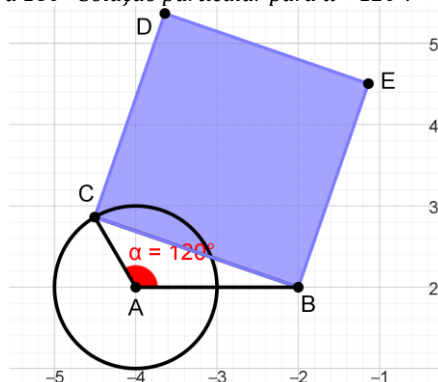


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

4. Quando  $\alpha = 120^\circ$ , vamos calcular a área de medida  $\overline{BC}^2$ :

$$\begin{aligned} A_{BCDE} &= \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \alpha = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ \\ &= 5 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 5 + 2 = 7 \text{ unidades quadradas.} \end{aligned}$$

Figura 180 - Solução particular para  $\alpha = 120^\circ$ .

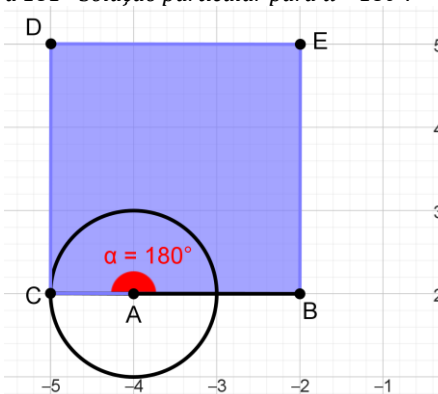


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

5. Quando  $\alpha = 180^\circ$ , o ponto C fica alinhado com os pontos A e B. Assim, temos:

$\overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AC} = 2 + 1 = 3$  e, portanto,  $A_{BCDE} = \overline{BC}^2 = 3^2 = 9$  unidades quadradas.

Figura 181 - Solução particular para  $\alpha = 180^\circ$ .

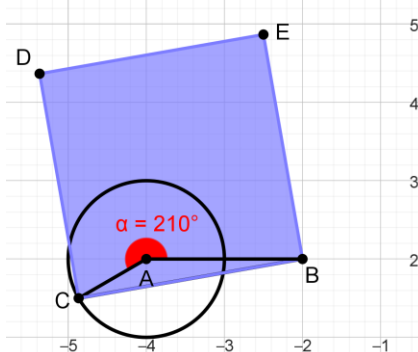


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

6. Quando  $\alpha = 210^\circ$ , então o ângulo interno  $B\hat{A}C = 360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$ . Assim, podemos calcular a área do quadrado BCDE:

$$\begin{aligned} A_{BCDE} &= \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos(360^\circ - \alpha) \\ &= 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 150^\circ = 5 - 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 5 + 2\sqrt{3} \quad \text{unidades} \\ &\quad \text{quadradas.} \end{aligned}$$

Figura 182 - Solução particular para  $\alpha = 210^\circ$ .



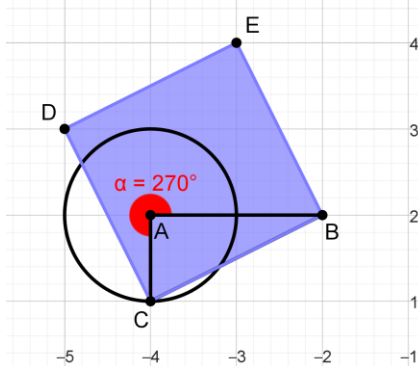
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

7. Quando  $\alpha = 270^\circ$ , então o ângulo interno do triângulo ABC,  $B\hat{A}C = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$ . Assim, podemos calcular a área do quadrado BCDE:

$$A_{BCDE} = \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos(360^\circ - \alpha)$$

$$= 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 5 - 4 \cdot 0 = 5 \text{ unidades quadradas.}$$

Figura 183 - Solução particular para  $\alpha = 270^\circ$ .



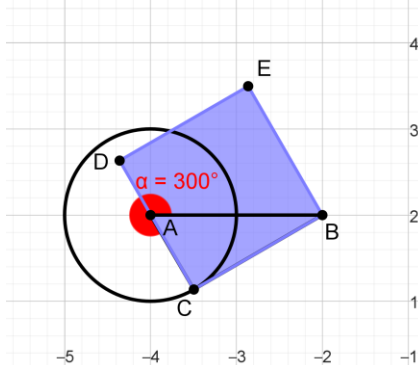
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

8. Quando  $\alpha = 300^\circ$ , então o ângulo interno  $B\hat{A}C = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$ . Assim, podemos calcular a área do quadrado BCDE:

$$A_{BCDE} = \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos(360^\circ - \alpha)$$

$$= 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 5 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 5 - 2 = 3 \text{ unidades quadradas.}$$

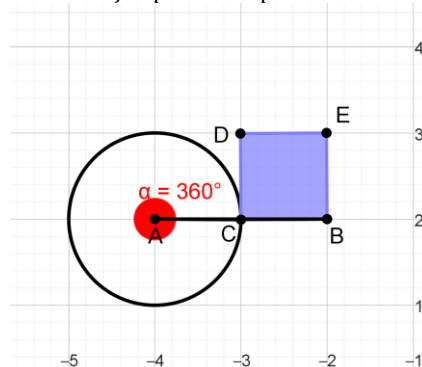
Figura 184 - Solução particular para  $\alpha = 300^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

9. Quando  $\alpha = 360^\circ$ , temos que o ponto C está novamente localizado sobre o ponto médio de AB. Assim,  $\overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2}{2} = 1$  e, portanto,  $A_{BCDE} = \overline{BC}^2 = 1^2 = 1$  unidade quadrada.

Figura 185 - Solução particular para  $\alpha = 360^\circ$ .

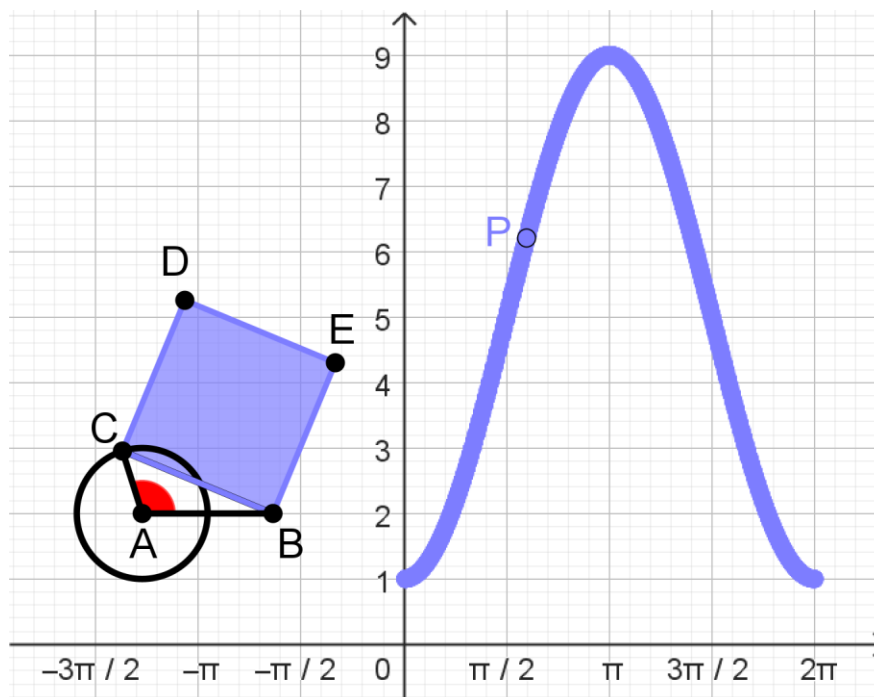


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

### Construção: 2ª Etapa

Com o objetivo de gerar um gráfico cartesiano diretamente a partir da figura construída na 1ª etapa, vamos criar um ponto P cuja abscissa é  $\alpha = \widehat{BAC}$  e cuja ordenada é a área do quadrado BCDE. Habilitamos o rastro do ponto P e movimentamos o ponto C sobre o círculo. Observamos que P descreve uma curva, que é o gráfico procurado.

Figura 186 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 04.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

As questões propostas são:

10. Deduza uma fórmula que expresse a área do quadrado BCDE em função de  $\alpha$ .

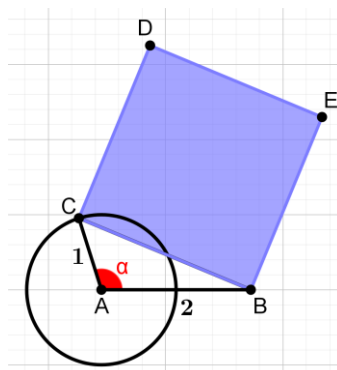
11. Para quais valores de  $\alpha$  temos que BCDE possui área máxima? Qual o valor desta área máxima?
12. Para quais valores de  $\alpha$  temos a área mínima de ADHG? Qual o valor desta área mínima?
13. Escreva o domínio e a imagem da função  $f(\alpha) = A_{BCDE}$ .

As respostas esperadas são:

10. Há duas situações a serem analisadas: quando  $0 \leq \alpha < \pi$  e quando  $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$ .  
Se  $0 \leq \alpha < \pi$  então podemos aplicar a Lei dos Cossenos no triângulo ABC, assim:

$$\begin{aligned} A_{BCDE} &= \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \alpha \\ &= 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos \alpha = 5 - 4 \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

Figura 187 - Análise da área de BCDE quando  $\alpha$  está no 1° ou 2° quadrante.

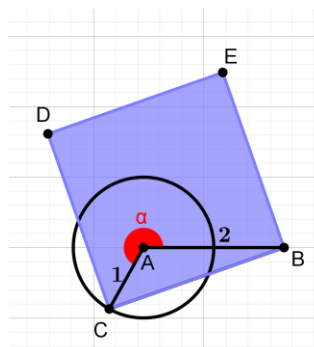


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Se  $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$  então podemos aplicar a Lei dos Cossenos no triângulo ABC, assim:

$$\begin{aligned} A_{BCDE} &= \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos(2\pi - \alpha) \\ &= 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos \alpha = 5 - 4 \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

Figura 188 - Análise da área de BCDE quando  $\alpha$  está no 3° ou 4° quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Como nas duas situações encontramos a mesma expressão, então, podemos afirmar que a função procurada é  $f(\alpha) = 5 - 4 \cdot \cos \alpha$ , para  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ .

11. A área máxima ocorre quando  $\alpha = \pi$  e  $A_{Max} = 5 - 4 \cdot \cos \pi = 5 - 4 \cdot (-1) = 5 + 4 = 9$  unidades quadradas.

12. A área mínima ocorre quando  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = 2\pi$  e  $A_{Min} = 5 - 4 \cdot \cos 0 = 5 - 4 \cdot 1 = 5 - 4 = 1$  unidade quadrada.

13. Como  $\alpha$  é um arco da 1ª volta, temos que  $D(f) = [0, 2\pi]$ . O conjunto imagem pode ser obtido por meio do cálculo:

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos \alpha \leq 1 &\Rightarrow -1 \leq -\cos \alpha \leq 1 \Rightarrow 4 \cdot (-1) \leq 4 \cdot (-\cos \alpha) \leq 4 \cdot 1 \\ &\Rightarrow -4 \leq -4 \cdot \cos \alpha \leq 4 \Rightarrow -4 + 5 \leq 5 - 4 \cdot \cos \alpha \leq 4 + 5 \Rightarrow 1 \leq f(\alpha) \leq 9. \end{aligned}$$

Logo,  $Im(f) = [1, 9]$ .

### 7.2.5. Problema nº 05

Objetivos de aprendizagem:

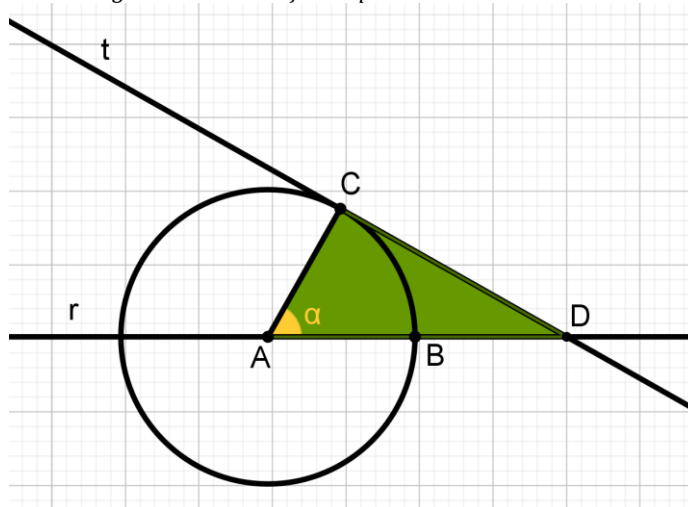
- Reconhecer propriedades de triângulos, círculos e retas tangentes a partir de suas definições e características.
- Utilizar software de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de triângulos retângulos.
- Resolver problemas que envolvam relações trigonométricas em triângulos retângulos.
- Identificar arcos simétricos em diferentes quadrantes do ciclo trigonométrico.
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função tangente no plano cartesiano.
- Explorar o comportamento da função tangente (domínio, conjunto imagem, crescimento, descontinuidades, máximos e mínimos).

Duração: 3 horas/aula.

**Problema nº 05:** *Construir um círculo de centro A e raio medindo 2 unidades, e uma reta r, que passa por A e intersecciona o círculo em B. Seja C um ponto qualquer sobre este círculo, por este ponto traçamos uma reta t, tangente ao círculo. Seja D o ponto*

de intersecção das retas  $r$  e  $t$  e seja o ângulo  $D\hat{A}C = \alpha$  com medida variando no sentido anti-horário, sendo  $\alpha$  um arco da 1ª volta. Determinar a área do triângulo  $ACD$  em função de  $\alpha$ .

Figura 189 - Ilustração do problema nº 05.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª etapa.

Vamos iniciar traçando um círculo de centro  $A$  e raio  $\overline{AB} = 2$  unidades. Seja  $r$  a reta que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ . Marcamos um ponto  $C$  arbitrário sobre o círculo. Vamos chamar de  $\alpha$  o ângulo  $D\hat{A}C$ , medido no sentido anti-horário. Pelo ponto  $C$  traçamos uma reta  $t$ , que é perpendicular ao raio  $AC$ . Como o raio é perpendicular à reta tangente no ponto de tangência, então  $t$  é a tangente procurada. Seja  $D$  o ponto de intersecção das retas  $r$  e  $t$ . Queremos investigar a área do triângulo  $ACD$  em função de  $\alpha$ .

São apresentadas as seguintes questões:

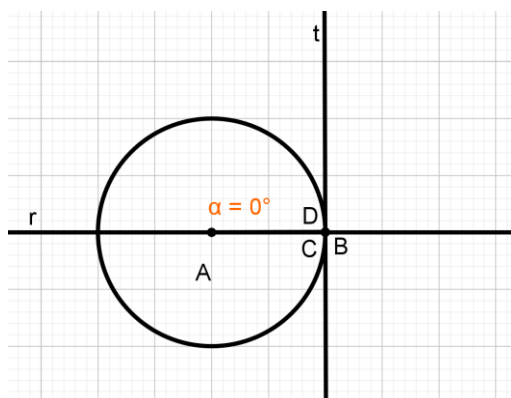
Calcule a área do triângulo  $ACD$  quando:

1.  $\alpha = 0^\circ$
2.  $\alpha = 45^\circ$
3.  $\alpha = 60^\circ$
4.  $\alpha = 90^\circ$
5.  $\alpha = 150^\circ$
6.  $\alpha = 180^\circ$
7.  $\alpha = 240^\circ$
8.  $\alpha = 270^\circ$
9.  $\alpha = 330^\circ$
10.  $\alpha = 360^\circ$

As respostas esperadas são:

1. Quando  $\alpha = 0^\circ$ , os pontos B, C e D coincidem, as retas r e t são perpendiculares, de forma que o triângulo ACD se degenera em um segmento, tendo área zero.

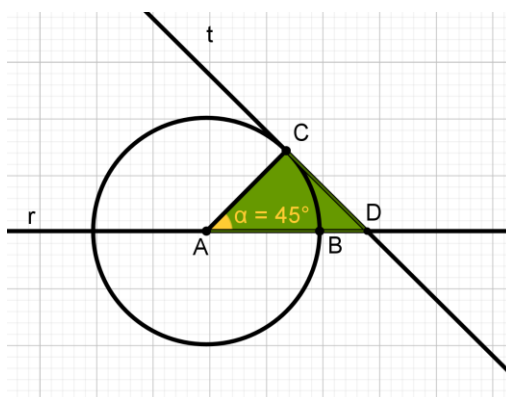
Figura 190 - Solução particular quando  $\alpha = 0^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

2. Quando  $\alpha = 45^\circ$ , devemos considerar o triângulo retângulo ACD, reto em C. Como  $\tan \alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \tan 45^\circ = 1 = \frac{\overline{CD}}{2} \Rightarrow \overline{CD} = 2$ . Logo  $A_{ACD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$  unidades quadradas.

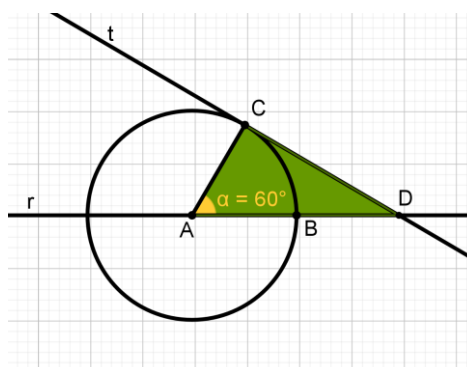
Figura 191 - Solução particular quando  $\alpha = 45^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

3. Quando  $\alpha = 60^\circ$ , devemos considerar o triângulo retângulo ACD, reto em C. Como  $\tan D\hat{A}C = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \tan 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{\overline{CD}}{2} \Rightarrow \overline{CD} = 2\sqrt{3}$ . Logo  $A_{ACD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$  unidades quadradas.

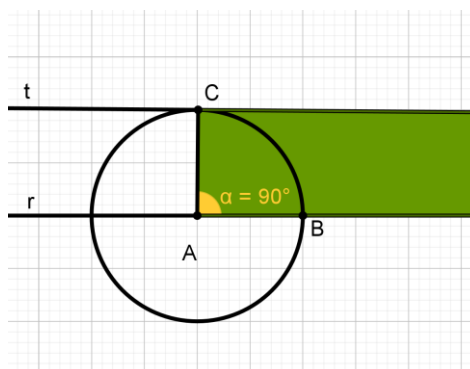
Figura 192 - Solução particular quando  $\alpha = 60^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

4. Quando  $\alpha = 90^\circ$ , as retas  $r$  e  $t$  são paralelas, de forma que o triângulo  $ACD$  se degenera em um uma faixa de área infinita.

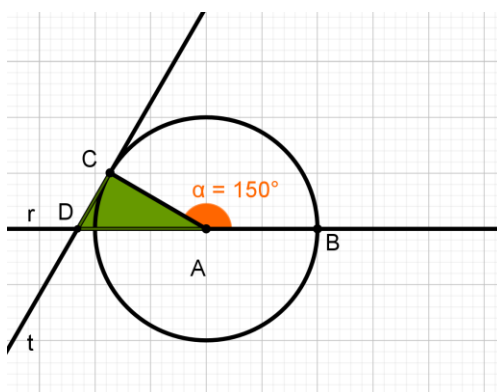
Figura 193 - Solução particular quando  $\alpha = 90^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

5. Quando  $\alpha = 150^\circ$ , então  $D\hat{A}C = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$ . Considerando o triângulo retângulo  $ACD$ , reto em  $C$ , temos:  $\tan D\hat{A}C = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\overline{CD}}{2} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ . Logo  $A_{ACD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  unidades quadradas.

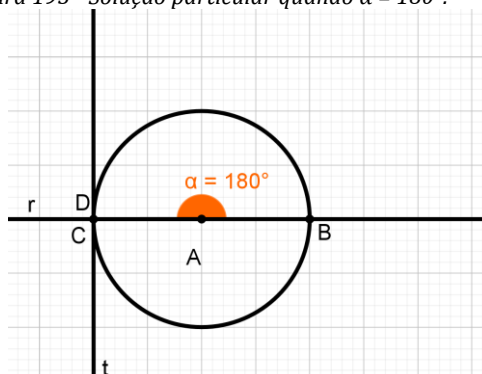
Figura 194 - Solução particular quando  $\alpha = 150^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

6. Quando  $\alpha = 180^\circ$ , os pontos C e D coincidem, as retas r e t são perpendiculares, de forma que o triângulo ACD se degenera em um segmento, tendo área zero.

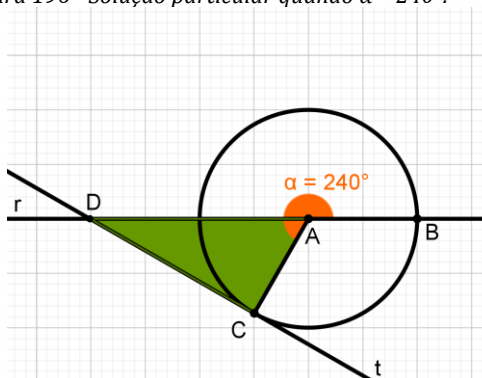
Figura 195 - Solução particular quando  $\alpha = 180^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

7. Quando  $\alpha = 240^\circ$ , então  $D\hat{A}C = 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$ . Considerando o triângulo retângulo ACD, reto em C, temos:  $\tan D\hat{A}C = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \tan 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{\overline{CD}}{2} \Rightarrow \overline{CD} = 2\sqrt{3}$ . Logo  $A_{ACD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$  unidades quadradas.

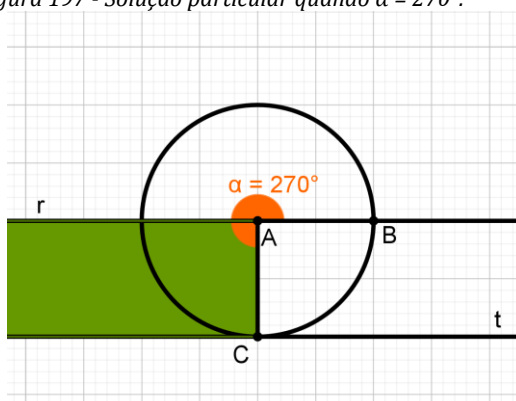
Figura 196 - Solução particular quando  $\alpha = 240^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

8. Quando  $\alpha = 270^\circ$ , as retas r e t são paralelas, de forma que o triângulo ACD se degenera em um uma faixa de área infinita.

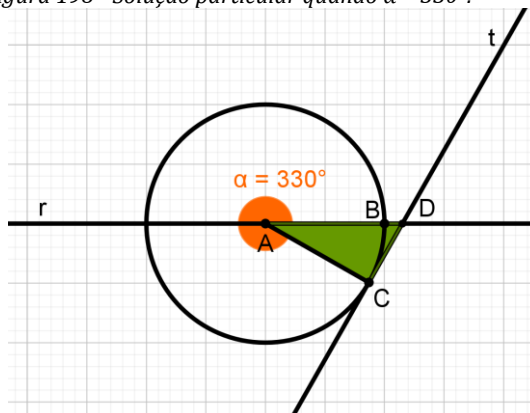
Figura 197 - Solução particular quando  $\alpha = 270^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

9. Quando  $\alpha = 330^\circ$ , então  $D\hat{A}C = 360^\circ - 330^\circ = 30^\circ$ . Considerando o triângulo retângulo ACD, reto em C, temos:  $\tan D\hat{A}C = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\overline{CD}}{2} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ . Logo  $A_{ACD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  unidades quadradas.

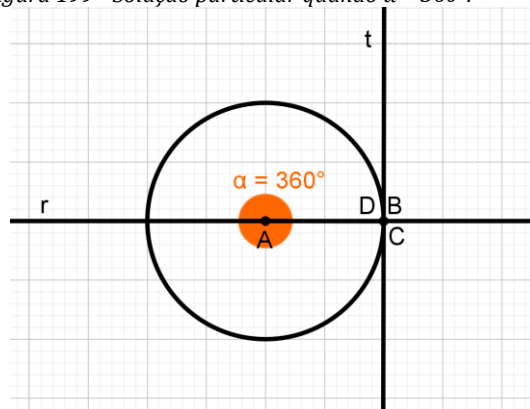
Figura 198 - Solução particular quando  $\alpha = 330^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

10. Quando  $\alpha = 360^\circ$ , os pontos B, C e D novamente coincidem, as retas r e t são perpendiculares, de forma que o triângulo ACD se degenera em um segmento, tendo área zero.

Figura 199 - Solução particular quando  $\alpha = 360^\circ$ .

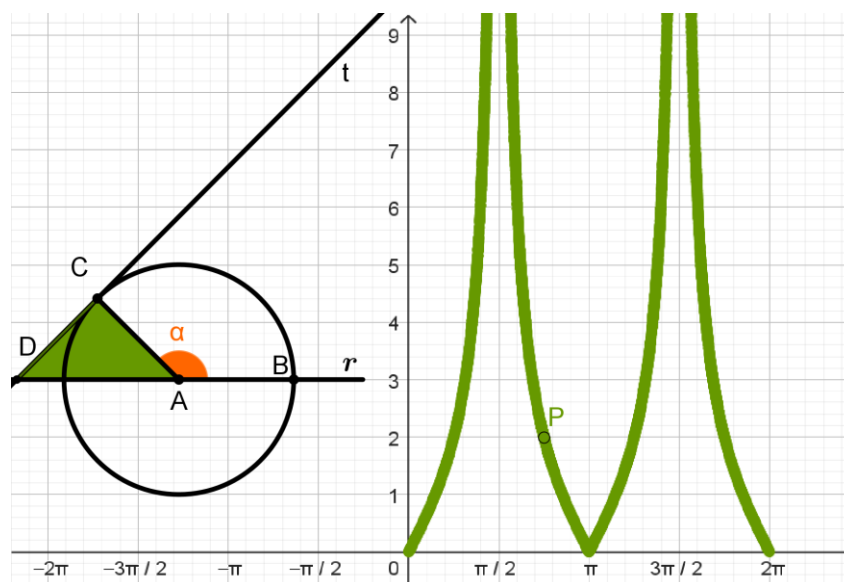


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 2ª etapa.

Será gerado um gráfico cartesiano da função que relaciona o ângulo  $\alpha$  com a área do triângulo retângulo ACD. Para que este gráfico fique vinculado à construção da 1ª etapa, criamos o ponto P, cuja abscissa é  $\alpha$  e cuja ordenada é a área do triângulo ACD. Habilitamos o rastro do ponto P e movimentamos o ponto C sobre o círculo, observando que o ponto P descreve uma curva, que é o gráfico cartesiano procurado.

Figura 200 - Construção do gráfico cartesiano do problema nº 05.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

São propostas as seguintes questões:

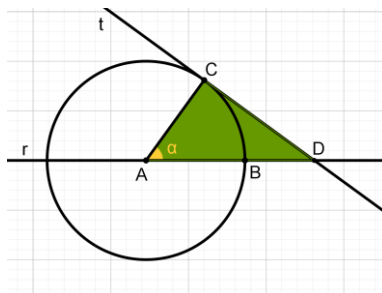
11. Deduza uma fórmula que expresse a área do triângulo ACD em função de  $\alpha$ .
12. Para quais valores de  $\alpha$  temos que ACD possui área máxima? Qual o valor desta área máxima?
13. Para quais valores de  $\alpha$  temos que ACD possui área mínima? Qual o valor desta área mínima?
14. Escreva o domínio e a imagem da função  $f(\alpha) = A_{ACD}$ .

As respostas esperadas, são:

11. Sabemos que ACD é um triângulo retângulo, que  $\overline{AC} = \overline{AB} = 2$ , portanto para determinarmos a área de ACD, resta-nos determinar a medida do cateto  $\overline{CD}$ .

Quando  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ , considerando o triângulo retângulo ACD, temos que CD é cateto oposto a  $\alpha$  e AC é cateto adjacente a  $\alpha$ . Portanto  $\overline{CD} = \overline{AC} \cdot \tan \alpha = 2 \cdot \tan \alpha$ .

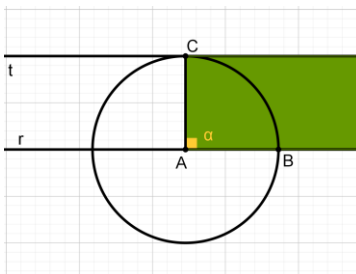
Figura 201 - Análise da medida de CD quando  $\alpha$  está no 1º quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Quando  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , as retas  $r$  e  $t$  tornam-se paralelas, de forma que o ponto  $D$  de intersecção deixa de existir e o triângulo  $ACD$  torna-se uma figura degenerada, cuja área é um valor infinito.

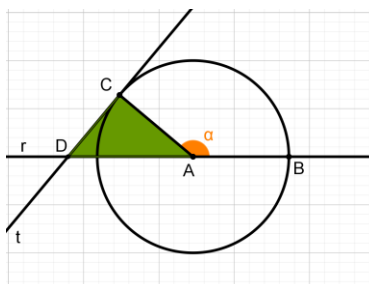
Figura 202 - Quando  $\alpha = 90^\circ$ , o triângulo  $ACD$  se degenera em uma faixa infinita.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Quando  $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ , temos que  $CD$  é cateto oposto a  $D\hat{A}C = \pi - \alpha$  e  $AC$  é cateto adjacente a  $\pi - \alpha$ . Portanto  $\overline{CD} = \overline{AC} \cdot \tan(\pi - \alpha) = 2 \cdot (-\tan \alpha) = -2 \cdot \tan \alpha$ . Devemos lembrar que se  $\alpha$  é um ângulo do 2º quadrante, então  $\tan \alpha \leq 0$ . Logo  $\overline{CD} = -2 \tan \alpha \geq 0$ .

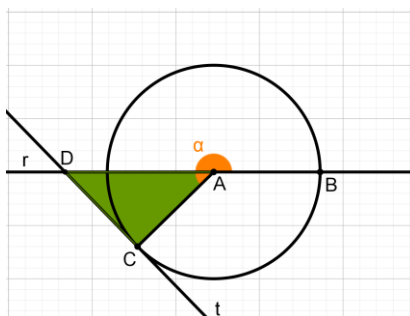
Figura 203 - Análise da medida de  $CD$  quando  $\alpha$  está no 2º quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Quando  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ , temos que  $CD$  é cateto oposto a  $D\hat{A}C = \alpha - \pi$  e  $AC$  é cateto adjacente a  $\alpha - \pi$ . Portanto  $\overline{CD} = \overline{AC} \cdot \tan(\alpha - \pi) = 2 \cdot \tan \alpha$ .

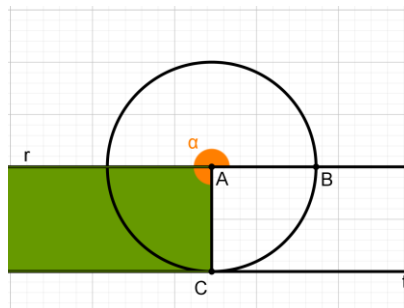
Figura 204 - Análise da medida de  $CD$  quando  $\alpha$  está no 3º quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Quando  $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ , as retas  $r$  e  $t$  tornam-se novamente paralelas, de forma que o ponto  $D$  de intersecção deixa de existir e o triângulo  $ACD$  torna-se uma figura degenerada, cuja área é um valor infinito.

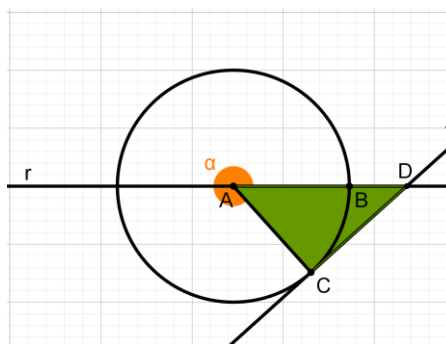
Figura 205 - Quando  $\alpha = 270^\circ$ , o triângulo  $ACD$  se degenera em uma faixa infinita.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Quando  $\frac{3\pi}{2} < \alpha \leq 2\pi$ , temos que  $CD$  é cateto oposto a  $D\hat{A}C = 2\pi - \alpha$  e  $AC$  é cateto adjacente a  $2\pi - \alpha$ . Portanto  $\overline{CD} = \overline{AC} \cdot \tan(2\pi - \alpha) = 2 \cdot (-\tan \alpha) = -2 \cdot \tan \alpha$ . Devemos lembrar que se  $\alpha$  é um ângulo do 4º quadrante, então  $\tan \alpha \leq 0$ . Logo  $\overline{CD} = -2 \cdot \tan \alpha \geq 0$ .

Figura 206 - Análise da medida de  $CD$  quando  $\alpha$  está no 4º quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Desta forma, podemos afirmar que  $\overline{CD} = |2 \cdot \tan \alpha|$  e, portanto, o cálculo da área de  $ACD$  é dado por:  $A_{ACD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{2 \cdot |2 \cdot \tan \alpha|}{2} = 2 \cdot |\tan \alpha|$ .

12. Observando o gráfico cartesiano gerado, notamos que a função encontrada é ilimitada superiormente, pois não existem os limites  $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} A_{ACD} = +\infty$  e

$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{3\pi}{2}} A_{ACD} = +\infty$ . Ou seja,  $f(\alpha) = A_{ACD}$  não possui valor máximo.

13. O valor mínimo para a área de  $ACD$  é zero, e este valor ocorre para  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = \pi$  ou  $\alpha = 2\pi$ .

14. O gráfico apresenta assíntotas verticais quando  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ou quando  $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ , logo estes valores não fazem parte do domínio da função. Assim, temos o domínio  $D(f) = \left[0, \frac{\pi}{2}[\cup \right] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\cup \right] \frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ . O conjunto imagem é formado por todos os valores reais não negativos, isto é,  $Im(f) = [0, +\infty[$ .

## 8 Considerações Finais

A utilização de ambientes de Geometria Dinâmica no ensino da Geometria representa uma poderosa ferramenta pedagógica que pode transformar o processo de aprendizagem em uma experiência mais investigativa e significativa. Nesse cenário, as restrições impostas por determinadas construções levam os estudantes a perceberem que, à medida que avançam nas manipulações, começam a surgir vínculos entre os elementos da figura que não são apenas coincidências, mas sim padrões implícitos e coerentes com a lógica interna da construção geométrica. Tais relações invariantes, que se destacam nos movimentos das figuras, revelam estruturas estáveis que naturalmente exigem explicações mais profundas, além da simples percepção visual. Esse momento é crucial para despertar a necessidade da demonstração, pois evidencia a importância de justificar, de forma lógica e dedutiva, aquilo que antes parecia apenas uma regularidade empírica.

Esse processo investigativo foi cuidadosamente planejado por meio de duas sequências didáticas, com o intuito de provocar nos alunos comportamentos matemáticos essenciais. Espera-se que eles se arrisquem a formular conjecturas, aceitem o erro como parte do processo, reavaliem caminhos trilhados, testem diferentes hipóteses e desenvolvam, pouco a pouco, argumentos mais sólidos. Ao longo dessas atividades, o desenho geométrico, que muitas vezes é visto apenas como uma ilustração estática, assume um novo papel: o de suporte fundamental para a construção do pensamento dedutivo. A apropriação desse novo olhar sobre o desenho, como ferramenta de raciocínio e argumentação, pode fortalecer significativamente a autonomia intelectual dos alunos, promovendo um aprendizado mais sólido.

O ambiente de geometria dinâmica, portanto, não apenas facilita a visualização de propriedades geométricas, mas também atua como ponte entre diferentes formas de conhecimento: de um lado, o saber empírico, baseado na observação direta e na manipulação concreta; de outro, o saber teórico, estruturado em um sistema lógico de proposições e demonstrações. A transição entre esses dois níveis de compreensão é um dos grandes desafios do ensino de matemática, e a Geometria Dinâmica oferece meios eficazes para atravessá-lo. Ao manipular figuras que se transformam continuamente e ainda assim preservam determinadas propriedades, os alunos podem desenvolver uma forma de pensar mais flexível, que integra o raciocínio visual ao lógico. Essa integração é

especialmente valiosa para a formulação de argumentos formais, pois permite que os estudantes façam inferências com base em padrões percebidos dinamicamente.

Dessa forma, espera-se que a prática com ambientes de geometria dinâmica não apenas auxilie na aprendizagem de conteúdos específicos, mas também contribua para o desenvolvimento de uma postura mais reflexiva, investigativa e autônoma frente ao conhecimento matemático. Ao integrar visualização, experimentação e dedução, as atividades aqui planejadas almejam propiciar aos alunos um avanço na construção de saberes geométricos e das funções reais de variável real, superando a simples memorização de fórmulas ou procedimentos. Com isso, amplia-se o potencial da Geometria ser compreendida não apenas como um conjunto de regras, mas como uma linguagem poderosa de interpretação e explicação do mundo.

## Referências

25º CBM - Ensino da Matemática - Geometria Dinâmica. Gravado por Paulo Cezar P. Carvalho. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. 1 vídeo (46 min e 28 s). Publicado pelo canal Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Disponível em: [https://youtu.be/CRKi3Ihdubk?si=b6\\_Xb3hlRt3vEbO](https://youtu.be/CRKi3Ihdubk?si=b6_Xb3hlRt3vEbO). Acesso em: abr. 2025.

**ARCAVI, Abraham.** Modelling with graphical representations. *For the Learning of Mathematics*, v. 28, n. 2, 2008. Disponível em: <https://flm-journal.org/Articles/31EB1897C65B5744BB83799F2FFE09.pdf>. Acesso em: mar. 2024.

**BRASIL.** Base Nacional Comum Curricular. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

**BRASIL.** Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEB, 2006. 135 p.

**BRASIL.** Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros curriculares nacionais – PCN+*. Brasília: MEC, 2002b.

**BRASIL.** Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio – PCNEM*. Brasília: MEC, 2002a.

**COSTA, Viviana Angélica; RÍO, Laura Sombra del.** Aportes de la Geometría Dinámica al estudio de la noción de función a partir de un problema geométrico: un análisis praxeológico. *Bolema – Boletim de Educação Matemática*, 2019. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/bolema/a/wcyvMKMXXckVq5wGsz6VmwC/?lang=es>. Acesso em: mar. 2024.

**DANTE, Luiz Roberto.** Matemática: contexto & aplicações: ensino médio. Volume 1. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

**DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau.** *Fundamentos de Matemática Elementar*, v. 9: Geometria Plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

**EVES, Howard.** *Introdução à história da matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

**FERRAGINA, Rosa Ana; LUPINACCI, Leonardo José.** La noción de función mediada por entornos dinámicos. El caso del punto dinámico. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática – CIAEM*, 2015. Disponível em: [https://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv\\_ciaem/xiv\\_ciaem/paper/viewFile/555/254](https://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/555/254). Acesso em: mar. 2024.

**GIRALDO, Victor.** Integrando Geometria e Funções: gráficos dinâmicos. *Revista do Professor de Matemática (RPM)*, São Paulo, v. 30, n. 79, p. 39-46, 2012.

**GIRALDO, Victor; CAETANO, Paulo; MATTOS, Francisco.** *Recursos computacionais no ensino de Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

**GRAVINA, Maria Alice.** Geometria Dinâmica: Uma Nova Abordagem para O Aprendizado da Geometria. *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, p. 1-13, Belo Horizonte, 1996. Disponível em:

[https://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri2014/pdf/maria-alice\\_geometria-dinamica1996-vii\\_sbie.pdf](https://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri2014/pdf/maria-alice_geometria-dinamica1996-vii_sbie.pdf). Acesso em: mar. 2024.

**GRAVINA, Maria Alice.** Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo. Orientadora: Lucila Maria Costi Santarosa. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

**GRAVINA, Maria Alice; CONTIERO, Lucas O.** Modelagem com o GeoGebra: uma possibilidade para a educação interdisciplinar? *Revista Novas Tecnologias na Educação*, v. 9, n. 1, 2011. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/21917>. Acesso em: mar. 2024.

**GRAVINA, Maria Alice; LOPES, Sérgio Augusto Amaral.** Perímetro e área. *II Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste*. ANPMAT, 2019. Disponível em: [https://anpmat.org.br/wp-content/uploads/2019/05/2NE-02-Simposio\\_Nordeste\\_Perimetro-e-area.pdf](https://anpmat.org.br/wp-content/uploads/2019/05/2NE-02-Simposio_Nordeste_Perimetro-e-area.pdf). Acesso em: abr. 2024.

**GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucila Maria Costi.** A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. 1999. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/20962>. Acesso em: abr. 2024.

**GRAVINA, Maria Alice; STORMOWSKI, Vandoir; LIMA, José Valdeni.** Formação de professores de matemática para o uso efetivo de tecnologias em sala de aula. *Renote*, 2015. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/61455>. Acesso em: mai. 2024.

**HADAS, Nurit; ARCAVI, Abraham,** Relearning mathematics: the case of dynamical geometrical phenomena and their unexpected Cartesian representations. in *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2001. Disponível em:

<https://weizmann.elsevierpure.com/en/publications/relearning-mathematics-the-case-of-dynamical-geometrical-phenomen>. Acesso em: jun. 2025.

**HALL, Jonas; LINGEFJÄRD, Thomas.** *Mathematical Modeling: Applications with GeoGebra*. New Jersey: Wiley, 2017.

**IEZZI, Gelson.** *Fundamentos de Matemática Elementar*, v. 3: Trigonometria. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

**IEZZI, Gelson; MURAKAMI, C.** *Fundamentos de Matemática Elementar*, v. 1: Conjuntos e Funções. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

**LIMA, Elon Lages et al.** *Temas e problemas elementares*. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

**MACHADO, Aline de Lima Guedes; MACHADO, Leandro da Silva.** Geometria e funções: uma abordagem computacional a partir de problemas da OBMEP. *REMAT: Revista Eletrônica de Matemática*, 2018. Disponível em:

<https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/3216>. Acesso em: mar. 2024.

**OLIVEIRA, Willians Adriano de.** Tecnologias Digitais na formação continuada: situações de ensino articulando Geometria e Funções. 2017. 171 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera, São Paulo, 2017.

**PINTO, Raphael Cássio Pereira.** Ambientes de Geometria Dinâmica no ensino de Funções e Geometria Plana. 2016. 94 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, São Paulo, 2016.

**SALIM, Eliana Bevilacqua.** Matemática Dinâmica: uma abordagem para o ensino de Funções Afim e Quadrática a partir de situações geométricas. 2014. 206 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

**SANTOS, Graça Luzia Dominguez. BARBOSA, Jonei Cerqueira.** Como ensinar o conceito de função? Educação Matemática em Revista, Brasília, v. 22, n. 53, p. 27-37, jan./mar. 2017. Disponível em: <https://extensaotcosta.wordpress.com/wp-content/uploads/2018/05/691-1782-1-pb.pdf>. Acesso em: abr. 2025.

**STORMOWSKI, Vandoir.** Modelagem geométrica e gráficos de funções “sem lei”: criando sequências didáticas em um GeoGebrabook. *XII Encontro Gaúcho de Educação Matemática – EGEM*, Porto Alegre, 2015. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/283307930\\_Modelagem\\_geometrica\\_e\\_graficos\\_de\\_funcoes\\_sem\\_lei\\_criando\\_sequencias\\_didaticas\\_em\\_um\\_GeoGebraBook](https://www.researchgate.net/publication/283307930_Modelagem_geometrica_e_graficos_de_funcoes_sem_lei_criando_sequencias_didaticas_em_um_GeoGebraBook). Acesso em: mar. 2024.

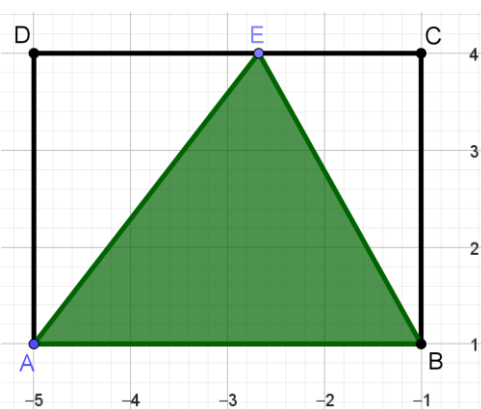
**TEIXEIRA, José Victor de Oliveira.** Estudo de função afim utilizando a Geometria Dinâmica. *IX Congresso de Iniciação Científica do IFRN*, Currais Novos, p. 1089-1099, jul. 2013. Disponível em: <https://www2.ifrn.edu.br/ocs/index.php/congic/ix/paper/viewFile/1221/184>. Acesso em: jun. 2024.

## Apêndices

### Apêndice 1 - Primeira sequência de atividades – para estudantes do 1º ano do Ensino Médio

Esta sequência se constitui como um conjunto de nove problemas geométricos sobre áreas de figuras planas, todos eles resultando em funções dos seguintes tipos: função constante, função afim, função quadrática ou função de várias sentenças.

**Problema nº 01:** *Construir um retângulo de dimensões 4 e 3 unidades de comprimento. Marcar um ponto arbitrário em um dos lados maiores. Determinar a área do triângulo cujos vértices são o ponto arbitrário e as extremidades do lado oposto do retângulo.*



Construção: 1ª etapa

Construa o retângulo ABCD tal que  $\overline{AB} = 4$  e  $\overline{BC} = 3$ . Marque o ponto E pertencente ao segmento CD e construa o triângulo ABE. Investigue a variação da área em função da medida do segmento DE.

Questões propostas:

1. Calcule a área do retângulo ABCD.
2. Caso o ponto E coincida com o ponto médio de CD, como classificamos o triângulo ABE em relação aos lados?
3. Caso o ponto E coincida com o ponto C, ou com o ponto D, como classificamos o triângulo ABE em relação aos ângulos?

Construção: 2ª etapa.

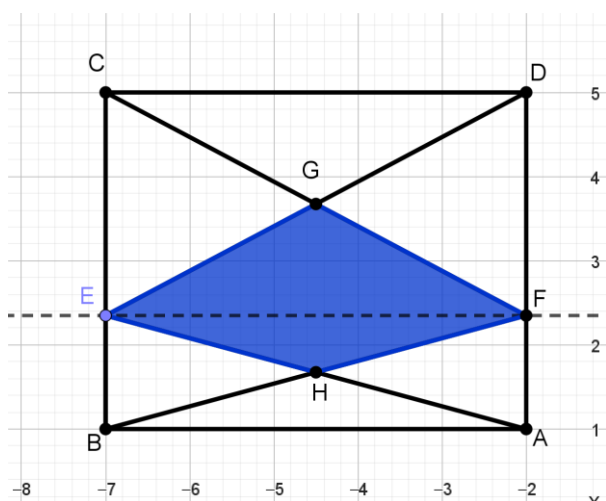
Construa um gráfico cartesiano que represente a variação da área do triângulo ABE em função da medida do segmento DE. Este gráfico será relacionado à figura construída na 1ª etapa. Para isto, digite no campo de entrada as coordenadas de um ponto P cuja

abscissa é a medida do segmento DE, e a ordenada é a medida da área do triângulo ABE. Movimente o ponto E sobre o segmento DC e observe o rastro deixado pelo ponto P.

Questões propostas:

4. Sendo ABCD um retângulo, e sendo E um ponto sobre DC, mostre que a área do triângulo ABE não varia, independentemente da escolha do ponto E.
5. Considerando  $DE = x$  e a função  $f(x) = A_{ABE}$ , determine o domínio e o conjunto imagem desta função.

**Problema n° 02:** Construir um retângulo cujos lados têm medidas 5 e 4 unidades de comprimento. Por um ponto arbitrário de um dos lados menores, traçar uma reta perpendicular a este lado, reta esta que dividirá o retângulo inicial em dois retângulos cujas diagonais serão traçadas. Determinar a área do quadrilátero que é limitado pelas quatro diagonais.



Construção: 1ª Etapa.

Construa o retângulo ABCD tal que  $\overline{AB} = 5$  e  $\overline{BC} = 4$ . Marque o ponto E pertencente ao segmento BC e trace uma reta perpendicular a BC passando por E. Marque o ponto F de intersecção desta reta com o segmento AD. Trace os segmentos AE, BF, e ED e FC e seus pontos de intersecção G e H, como na figura. Construa o quadrilátero EHFG e investigue a variação da sua área em função da medida do segmento BE.

Questões propostas:

1. Qual a área do retângulo ABCD?
2. Supondo que  $BE = 1$  unidade, qual a área do quadrilátero EHFG?

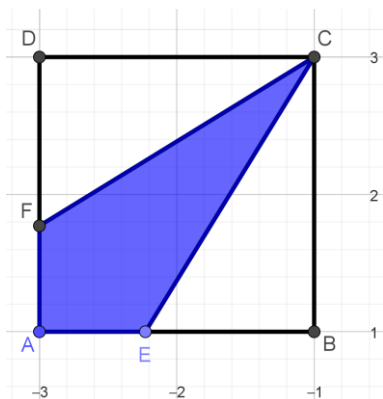
Construção: 2ª Etapa.

Construa um gráfico cartesiano que represente a variação da área do quadrilátero EHFG em função da medida do segmento BE. Este gráfico será relacionado à figura construída na 1ª etapa. Para isto, digite no campo de entrada as coordenadas de um ponto P cuja abscissa é a medida do segmento BE, e a ordenada é a medida da área do quadrilátero EHGF. Movimente o ponto E sobre o segmento BC e observe o rastro deixado pelo ponto P.

Questões propostas:

3. Considerando  $\overline{BE} = x$ , calcule a área do quadrilátero EHFG em função de  $x$ .
4. Escreva o Domínio e o Conjunto Imagem da função encontrada no item anterior.
5. Descreva a interpretação sobre a variação da área de EHFG que o modelo encontrado fornece.

**Problema nº 03:** Construir um quadrado ABCD cujos lados medem 2 unidades de comprimento. Marcar um ponto arbitrário E do lado AB, e determinar o ponto F sobre o lado AD, tal que  $AE = AF$ . Determinar a área do quadrilátero AECF, em função da medida de AE.



Construção: 1ª Etapa.

Construa o quadrado ABCD tal que  $\overline{AB} = 2$ . Marque um ponto E qualquer pertencente ao segmento AB e trace uma circunferência de centro A passando por E. Marque o ponto F de intersecção desta circunferência com o segmento AD. Construa o quadrilátero AECF e investigue a variação da sua área em função da medida do segmento AE.

Questões propostas:

1. Qual a área do quadrado ABCD?
2. Considerando  $AE = 1$  unidade, calcule a área do quadrilátero AECF.

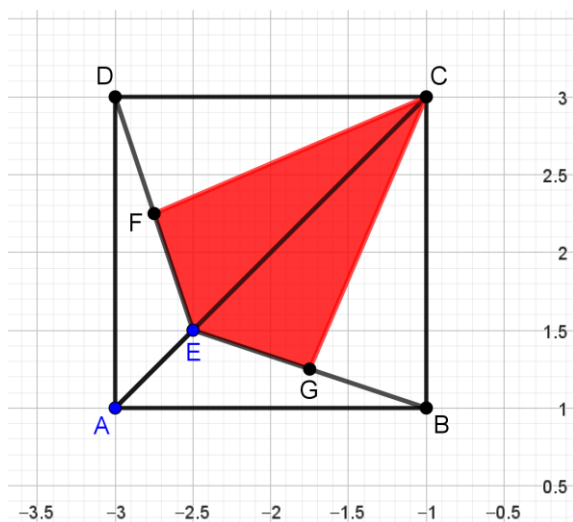
Construção: 2ª Etapa.

Construa um gráfico cartesiano que represente a variação da área do quadrilátero AECF em função da medida do segmento AE. Este gráfico será relacionado à figura construída na 1ª etapa. Para isto, digite no campo de entrada as coordenadas de um ponto P cuja abscissa é a medida do segmento AE, e a ordenada é a medida da área do quadrilátero AECF. Movimente o ponto E sobre o segmento AB e observe o rastro deixado pelo ponto P.

Questões propostas:

3. Considerando  $AE = x$ , calcule a área do quadrilátero AECF em função de  $x$ .
4. Escreva o domínio e o conjunto imagem desta função.
5. Qual é o tipo de função encontrada neste problema?

**Problema nº 04:** Construir um quadrado ABCD cujos lados medem 2 unidades de comprimento. Por um ponto arbitrário E da diagonal AC, traçar os segmentos ED e EB, e seus pontos médios, F e G, respectivamente. Determinar a área do quadrilátero EGCF, em função da medida de AE.



Construção: 1ª Etapa.

Construa o quadrado ABCD tal que  $\overline{AB} = 2$ . Trace a diagonal AC e marque um ponto E qualquer pertencente à diagonal AC. Trace os segmentos ED e EB e marque seus respectivos pontos médios: os pontos F e G. Construa o quadrilátero EFCG e investigue a variação da sua área em função da medida do segmento AE.

Questões propostas:

1. Qual a área do quadrado ABCD?
2. Qual a medida da diagonal AC?

3. Qual a distância entre os pontos F e G?
4. Supondo que  $AE = \frac{\sqrt{2}}{2}$  unidades, qual a área do quadrilátero EFCG?

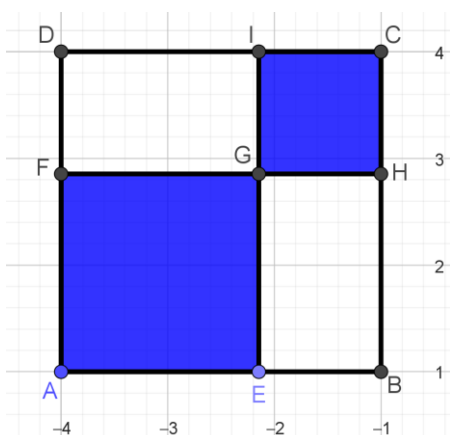
Construção: 2ª etapa.

Construa um gráfico cartesiano que represente a variação da área do quadrilátero EFCG em função da medida do segmento AE. Este gráfico será relacionado à figura construída na 1ª etapa. Para isto, digite no campo de entrada as coordenadas de um ponto P cuja abscissa é a medida do segmento AE, e a ordenada é a medida da área do quadrilátero EGCF. Movimente o ponto E sobre a diagonal AC e observe o rastro deixado pelo ponto P.

Questões propostas:

5. Considerando  $AE = x$ , calcule a área do quadrilátero EFCG em função de  $x$ .
6. Escreva o domínio e o conjunto imagem desta função.
7. Escreva os valores máximo e mínimo desta função.

**Problema nº 05:** Construir um quadrado ABCD cujos lados medem 3 unidades de comprimento. Marcar um ponto E arbitrário no segmento AB. Construir o quadrado AEGF, tal que  $F \in AD$ . Prolongar EG até obter o ponto de intersecção I com o lado CD e prolongar FG até obter o ponto de intersecção H com o lado BC. Determinar a soma das áreas de AEGF e GHCI em função da medida do segmento AE.



Construção: 1ª Etapa.

Construa o quadrado ABCD tal que  $\overline{AB} = 3$ . Marque um ponto E qualquer pertencente ao lado AB e marque  $F \in AD$  tal que  $\overline{AF} = \overline{AE}$ . Trace os segmentos EI e FH tais que  $EI \perp AB$  e  $FH \perp AD$ , com  $H \in BC$  e  $I \in CD$ . Marque o ponto G de intersecção de EI e FH. Construa os quadriláteros AEGF e GHCI e investigue a variação da soma de suas áreas em função da medida do segmento AE.

Questões propostas:

1. Qual a área do quadrado ABCD?
2. Mostre que GHCI é também um quadrado.
3. Considerando  $AE = 2$  unidades, calcule a soma das áreas dos quadrados AEGF e GHCI.
4. O que ocorre com a soma das áreas dos quadrados AEGF e GHCI quando o ponto E coincide com o ponto A? E quando o ponto E coincide com o ponto B?

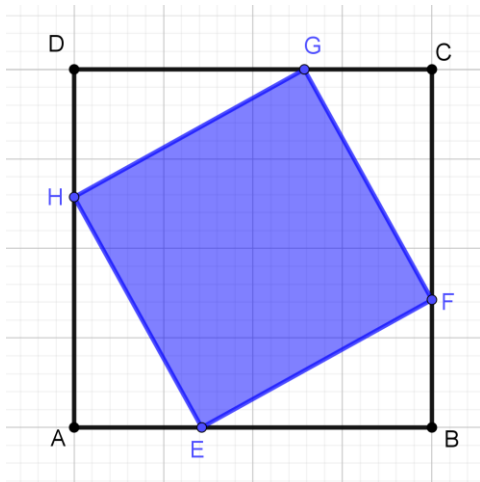
Construção: 2ª Etapa.

Construa um gráfico cartesiano que represente a variação da área do quadrilátero EFCG em função da medida do segmento AE. Este gráfico será relacionado à figura construída na 1ª etapa. Para isto, digite no campo de entrada as coordenadas de um ponto P cuja abscissa é a medida do segmento AE, e a ordenada é a soma das medidas das áreas dos quadriláteros AEGF e GHCI. Movimente o ponto E sobre o lado AB e observe o rastro deixado pelo ponto P.

Questões propostas:

9. Calcular a soma das áreas dos quadrados AEGF e GHCI em função da medida  $x$  do segmento AE.
10. Qual é o valor de  $x$  que minimiza a soma das áreas de AEGF e GHCI e qual o valor mínimo desta soma?
11. Sendo  $f(x)$  a função que representa a soma das áreas de AEGF e GHCI, determine o domínio e a imagem desta função.

**Problema nº 06:** *Construir um quadrado ABCD com lado medindo 2 unidades e marcar os pontos E, F, G e H, com  $E \in AB$ ,  $F \in BC$ ,  $G \in CD$  e  $H \in DA$ , de maneira tal que  $AE=BF=CG=DH$ , conforme figura abaixo.*



Construção: 1ª Etapa.

Construa o quadrado ABCD tal que  $\overline{AB} = 2$ . Marque um ponto E qualquer pertencente ao lado AB e marque os pontos  $F \in BC$ ,  $G \in CD$  e  $H \in DA$  tais que  $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH}$ . Construa o quadrilátero EFGH e investigue a variação de sua área em função da medida do segmento AE.

Questões propostas:

1. Mostre que o quadrilátero EFGH é um quadrado.
2. Calcule a área do quadrado EFGH considerando que  $AE = 0,5$  unidades.
3. Qual a área de EFGH quando E coincide com o ponto A? E com o ponto B?

Construção: 2ª Etapa.

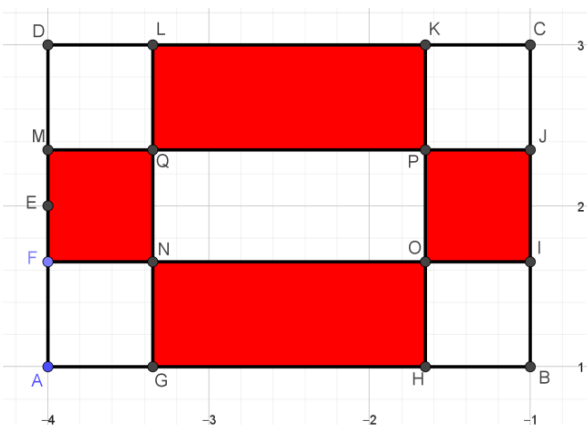
Construa um gráfico cartesiano que represente a variação da área do quadrilátero EFGH em função da medida do segmento AE. Este gráfico será relacionado à figura construída na 1ª etapa. Para isto, digite no campo de entrada as coordenadas de um ponto P cuja abscissa é a medida do segmento AE, e a ordenada é a medida da área do quadrilátero EFGH. Movimente o ponto E sobre o lado AB e observe o rastro deixado pelo ponto P.

Questões propostas:

4. Considerando  $AE = x$ , determine uma expressão para a área do quadrado EFGH.
5. Determine as coordenadas do ponto P que minimizam a área de EFGH.
6. Escreva o domínio e o conjunto imagem da função  $f(x) = A_{EFGH}$ .

**Problema nº 07:** Construir um retângulo ABCD tal que  $AB = 3$  unidades e  $BC = 2$  unidades. Nos quatro vértices A, B, C e D, construa quadrados congruentes, cuja medida

do lado seja menor do que a metade da medida de  $BC$ . Assim, serão criados os quadrados  $AGNF$ ,  $BIOH$ ,  $CKPJ$  e  $DMQL$ , conforme figura abaixo. Determinar a variação da soma das áreas dos quadriláteros  $GHON$ ,  $IJPO$ ,  $KLQP$  e  $MFNQ$  em função da medida do segmento  $AF$ .



Construção: 1ª Etapa.

Construa o retângulo  $ABCD$  tal que  $\overline{AB} = 3$  e  $\overline{BC} = 2$ . Marque  $E$ , o ponto médio de  $AD$ , e construa o segmento  $AE$ . Marque o ponto  $F$  qualquer, pertencente ao segmento  $AE$  e marque os pontos  $G, H \in AB$ ;  $I, J \in BC$ ;  $K, L \in CD$ ;  $M \in AD$ , tais que  $\overline{AF} = \overline{AG} = \overline{BH} = \overline{BI} = \overline{CJ} = \overline{CK} = \overline{DL} = \overline{DM}$ . Trace os segmentos  $FI$ ,  $MJ$ ,  $GL$  e  $HK$ . Marque os pontos de intersecção:  $FI \cap GL = \{N\}$ ,  $FI \cap HK = \{O\}$ ,  $MJ \cap HK = \{P\}$  e  $MJ \cap GL = \{Q\}$ . Construa os quadriláteros  $GHON$ ,  $IJPO$ ,  $KLQP$  e  $MFNQ$  e investigue a variação da soma de suas áreas em função da medida do segmento  $AF$ .

Questões propostas:

1. Mostre que  $GHON$ ,  $IJPO$ ,  $KLQP$  e  $MFNQ$  são retângulos.
2. Calcule a soma das áreas de  $GHON$ ,  $IJPO$ ,  $KLQP$  e  $MFNQ$  quando  $AF = 0,5$  unidades.

Construção: 2ª Etapa.

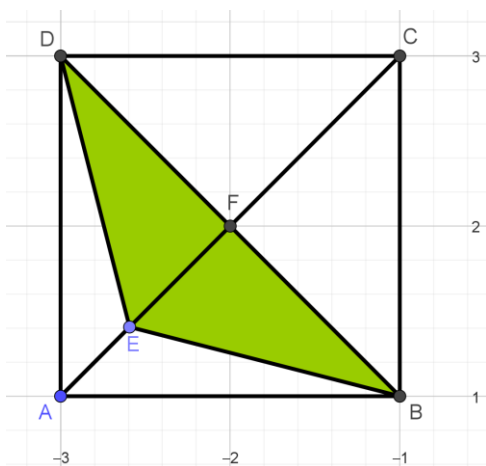
Construa um gráfico cartesiano que represente a variação da área do quadrilátero  $EFCG$  em função da medida do segmento  $AF$ . Este gráfico será relacionado à figura construída na 1ª etapa. Para isto, digite no campo de entrada as coordenadas de um ponto  $R$  cuja abscissa é a medida do segmento  $AF$ , e a ordenada é a soma das medidas das áreas dos quadriláteros  $GHON$ ,  $IJPO$ ,  $KLQP$  e  $MFNQ$ . Movimente o ponto  $F$  sobre o segmento  $AE$  e observe o rastro deixado pelo ponto  $R$ .

Questões propostas:

3. Deduza uma expressão algébrica para a soma das áreas dos retângulos  $GHON$ ,  $IJPO$ ,  $KLQP$  e  $MFNQ$ , em função da medida  $x$  do segmento  $AF$ .

- Determine as coordenadas de R que maximizam a soma das áreas dos retângulos GHON, IJPO, KLQP e MFNQ.
- Sendo  $f(x) = A_{GHON} + A_{IJPO} + A_{KLQP} + A_{MFNQ}$ , determine o domínio e o conjunto imagem de  $f(x)$ .

**Problema nº 08:** *Construir um quadrado ABCD cujos lados medem 2 unidades. Traçar suas diagonais AC e BD. Marcar um ponto E qualquer sobre a diagonal AC. Determinar a área do triângulo EBD em função da medida do segmento AE.*



Construção: 1ª Etapa.

Construa o quadrado ABCD tal que  $\overline{AB} = 2$ . Trace a diagonal AC e, sobre ela, marque um ponto E qualquer. Construa o triângulo EBD e investigue a variação de sua área em função da medida do segmento AE.

Questões propostas:

- Calcule a medida da diagonal AC do quadrado ABCD.
- Mostre que EBD é um triângulo isósceles ou um segmento.
- Calcule a área do triângulo EDB quando  $AE = \frac{\sqrt{2}}{2}$  unidades.
- Calcule a área do triângulo EDB quando  $AE = \frac{3\sqrt{2}}{2}$  unidades.

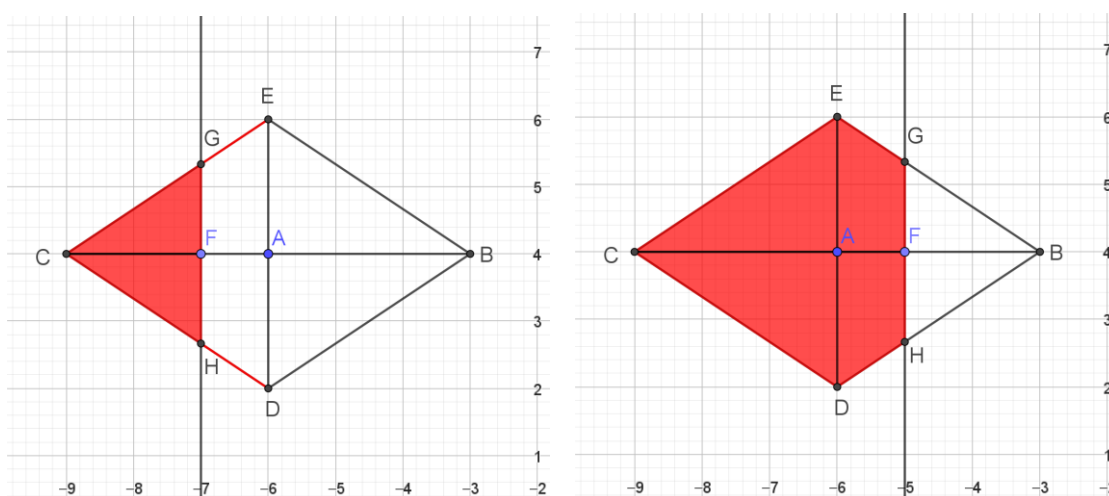
Construção: 2ª Etapa.

Construa um gráfico cartesiano que represente a variação da área do triângulo EBD em função da medida do segmento AE. Este gráfico será relacionado à figura construída na 1ª etapa. Para isto, digite no campo de entrada as coordenadas de um ponto P cuja abscissa é a medida do segmento AE, e a ordenada é a medida da área do quadrilátero EFGH do triângulo EBD. Movimente o ponto E sobre a diagonal AC e observe o rastro deixado pelo ponto P.

Questões propostas:

- Determine expressões para a altura  $EF$  relativa à base  $BD$  do triângulo  $EBD$  em função da medida  $x$  do segmento  $AE$ .
- Determine expressões para a área do triângulo  $EBD$  em função da medida  $x$  do segmento  $AE$ .
- Seja  $f(x) = A_{EBD}$  determine o domínio e o conjunto imagem de  $f(x)$ .

**Problema nº 09:** Construir um losango  $BECD$  de centro  $A$ , traçando suas duas diagonais de medidas  $\overline{BC} = 6$  e  $\overline{DE} = 4$  unidades de comprimento. Por um ponto arbitrário  $F$  da diagonal maior, traçar uma reta perpendicular a esta e determinar a área da região que é interior ao losango e que se situa à esquerda da reta construída, em função da medida do segmento  $CF$ .



Construção: 1ª Etapa.

Construa o losango  $BECD$  a partir de seu centro  $A$ , tal que  $\overline{AB} = \overline{AC} = 3$  e  $\overline{AD} = \overline{AE} = 2$ . Trace as diagonais  $BC$  e  $DE$ , e os caminhos poligonais  $CEB$  e  $CDB$ . Marque um ponto  $F$  qualquer sobre a diagonal  $BC$ . Trace uma reta perpendicular à diagonal  $BC$ , passando por  $F$ . Marque os pontos  $G$  e  $H$  de intersecção desta perpendicular com os caminhos poligonais  $CEB$  e  $CDB$ , respectivamente. Posicione  $F$  entre os pontos  $A$  e  $B$  e construa o pentágono  $GECDH$ . Note que ao movimentar o ponto  $F$  de modo que fique localizado entre  $A$  e  $C$ , a área do pentágono  $GECDH$  se transforma na área do triângulo  $GCH$ . Investigue a variação da área desta região em função da medida do segmento  $CF$ .

Questões propostas:

- Como calcular a área do losango  $BECD$ ?

2. Considerando  $\overline{CF} = 1,5$ , calcular a área da região interior ao losango e à esquerda da reta considerada.
3. Considerando  $\overline{CF} = 4,5$ , calcular a área da região interior ao losango e à esquerda da reta considerada.

Construção: 2ª etapa.

Construa um gráfico cartesiano que represente a variação da área da região interna ao losango BECD e situada à esquerda da perpendicular à BC passando por F, em função da medida do segmento CF. Este gráfico será relacionado à figura construída na 1ª etapa. Para isto, digite no campo de entrada as coordenadas de um ponto P cuja abscissa é a medida do segmento CF, e a ordenada é a medida da área do pentágono GECDH. Movimente o ponto F sobre a diagonal BC e observe o rastro deixado pelo ponto P.

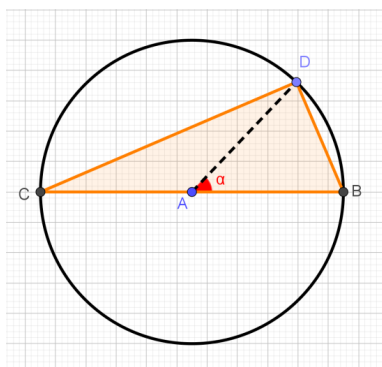
Questões propostas:

4. Considerando  $\overline{CF} = x$ , calcular a medida do segmento GH.
5. Considerando  $\overline{CF} = x$ , calcular expressões para a área da região interior ao losango e à esquerda da reta considerada.
6. Denominando  $f$  a função que associa a medida  $x$  do segmento CF à área da região R, determine o domínio e o conjunto Imagem de  $f$ .

## Apêndice 2 - Segunda sequência de atividades – para estudantes do 3º ano do Ensino Médio

Esta sequência se constitui como um conjunto de cinco problemas geométricos sobre áreas de figuras planas, todos eles resultando em funções trigonométricas dos seguintes tipos: função seno, função cosseno e função tangente, em alguns casos combinadas com a função modular. Estas atividades foram planejadas para estudantes do 3º ano do Ensino Médio.

**Problema nº 01:** Construir um círculo unitário de centro  $A$  e diâmetro  $BC$ . Seja  $D$  um ponto qualquer do círculo e seja  $\alpha = \widehat{BAD}$  marcado no sentido anti-horário, sendo  $\alpha$  um arco da 1ª volta. Determine a área do triângulo  $BCD$  em função de  $\alpha$ .



Construção: 1ª etapa.

Trace um círculo de centro  $A$  e raio unitário. Trace uma reta passando pelo centro  $A$ . Marque  $B$  e  $C$ , pontos de intersecção do círculo com a reta traçada. Marque um ponto qualquer  $D$  sobre o círculo e marque o ângulo  $\widehat{BAD} = \alpha$ . Construa o triângulo  $BCD$ .

Questões propostas:

1. Como são classificados os triângulos  $ABD$  e  $ADC$  em relação aos lados?
2. Qual a medida do ângulo  $\widehat{DAC}$  em função de  $\alpha$ ?
3. Quais as medidas dos ângulos  $\widehat{ADC}$  e  $\widehat{ADB}$  em função de  $\alpha$ ?
4. Como podemos classificar o triângulo  $BCD$  em relação aos ângulos?
5. Considerando  $\alpha = 30^\circ$ , calcule a área do triângulo  $BCD$ .
6. Considerando  $\alpha = 120^\circ$ , calcule a área do triângulo  $BCD$ .
7. Considerando  $\alpha = 225^\circ$ , calcule a área do triângulo  $BCD$ .
8. Considerando  $\alpha = 330^\circ$ , calcule a área do triângulo  $BCD$ .

Construção: 2ª etapa.

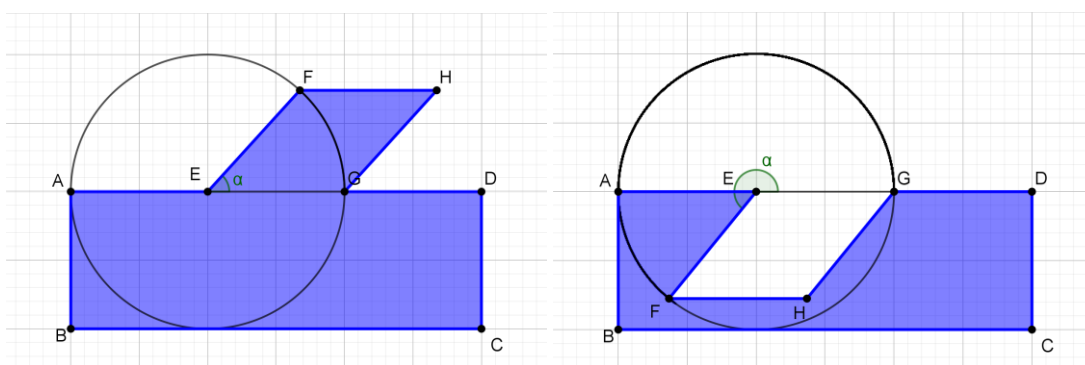
Construa um gráfico cartesiano que represente a variação da área triângulo  $BCD$  em função da medida do ângulo  $\widehat{BAD} = \alpha$ . Este gráfico será relacionado à figura

construída na 1ª etapa. Para isto, digite no campo de entrada as coordenadas de um ponto P cuja abscissa é a medida do ângulo  $\alpha$ , e cuja ordenada é a medida da área do triângulo BCD. Movimente o ponto D sobre o círculo e observe o rastro deixado pelo ponto P.

Questões propostas:

9. Calcule uma expressão para a altura  $h$  do triângulo BCD, relativa à hipotenusa BC. Calcule a expressão para a área do triângulo BCD.
10. Para quais valores de  $\alpha$  temos que BCD possui área máxima? Qual o valor desta área máxima?
11. Para quais valores de  $\alpha$  temos a área mínima de BCD? Qual o valor desta área mínima?
12. Escreva o domínio, a imagem e o período da função  $f(\alpha) = A_{BCD}$ .

**Problema nº 02:** Construir uma região poligonal formada pela composição de duas formas: um retângulo ABCD com dimensões  $AB = 1$  unidade e  $BC = 3$  unidades e um losango EFHG cujo lado mede 1 unidade e cujo ângulo interno  $\widehat{GEF} = \alpha$  tem medida variando no sentido anti-horário, sendo  $\alpha$  um arco da 1ª volta. Os pontos E e G pertencem ao segmento AD e  $AE = EG = GD = 1$ . Determine a área da região poligonal ABCDGHFE em função de  $\alpha$ .



Construção: 1ª etapa.

Construa um retângulo ABCD tal que  $\overline{AB} = 1$  e  $\overline{BC} = 3$ . Marque o ponto  $E \in AD$  tal que  $AE = 1$ . Trace um círculo com centro em E e raio  $\overline{EA} = 1$  e, sobre ele, marque um ponto arbitrário F. Marque o ponto G de intersecção deste círculo com AD, sendo A e G distintos. Construa o losango EFHG por meio de retas paralelas. Construa o polígono ABCDGHFE e investigue a variação da área da região poligonal ABCDGHFE em função da medida do ângulo  $\widehat{GEF} = \alpha$ .

Questões propostas:

Calcule a área da região poligonal ABCDGHFE quando:

1.  $\alpha = 30^\circ$ .
2.  $\alpha = 90^\circ$ .
3.  $\alpha = 135^\circ$ .
4.  $\alpha = 240^\circ$ .
5.  $\alpha = 270^\circ$ .
6.  $\alpha = 330^\circ$ .
7.  $\alpha = 0^\circ$  ou  $\alpha = 180^\circ$ .

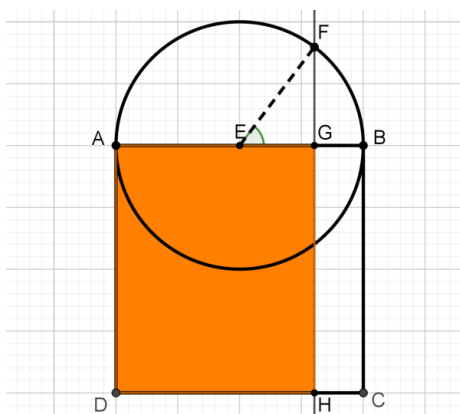
Construção: 2ª etapa.

Construa o gráfico cartesiano diretamente a partir da figura construída na 1ª etapa. Crie o ponto P digitando suas coordenadas no campo de entrada. Sua abscissa é  $\alpha = \widehat{GEF}$  e sua ordenada é a área da região poligonal ABCDGHFE. Habilite o rastro do ponto P e movimente o ponto F sobre o círculo. Observe a trajetória descrita pelo ponto P.

Questões propostas:

8. Determine uma expressão para a área da região ABCDGHFE.
9. Para quais valores de  $\alpha$  temos que ABCDGHFE possui área máxima? Qual o valor desta área máxima?
10. Para quais valores de  $\alpha$  temos a área mínima de ABCDGHFE? Qual o valor desta área mínima?
11. Escreva o domínio e a imagem da função  $f(\alpha) = A_{ABCDGHFE}$ .

**Problema nº 03:** Construir um quadrado ABCD cujo lado mede 2 unidades e um círculo de centro E e raio  $\overline{EA}$ , onde E é ponto médio de AB. Marcar um ponto qualquer F sobre o círculo, de modo que  $\widehat{BEF} = \alpha$  tem medida variando no sentido anti-horário, sendo  $\alpha$  um arco da 1ª volta. Por F traçar uma perpendicular ao lado AB, tal que essa perpendicular interseccione os lados AB e CD nos pontos G e H, respectivamente. Determine a área do quadrilátero AGHD em função de  $\alpha$ .



Construção: 1ª Etapa.

Construa o quadrado  $ABCD$ , cujo lado mede 2 unidades. A seguir, marque o ponto médio  $E$  do lado  $AB$  e trace o círculo de centro  $E$  e raio  $\overline{EA}$ . Marque um ponto arbitrário  $F$  sobre o círculo e marque o ângulo  $\alpha = \widehat{BEF}$  no sentido anti-horário. Pelo ponto  $F$  baixe uma perpendicular ao lado  $AB$  e marque os pontos de intersecção desta reta com os lados  $AB$  e  $CD$ , os pontos  $G$  e  $H$ , respectivamente. Construa o quadrilátero  $ADHG$  e investigue a variação da sua área em função da medida do ângulo  $\alpha = \widehat{BEF}$ .

Questão proposta:

1. Explique por que o quadrilátero  $ADHG$  é um retângulo.

Calcule a área do quadrilátero  $ADHG$  quando:

2.  $\alpha = 0^\circ$ .
3.  $\alpha = 30^\circ$ .
4.  $\alpha = 90^\circ$ .
5.  $\alpha = 120^\circ$ .
6.  $\alpha = 180^\circ$ .
7.  $\alpha = 225^\circ$ .
8.  $\alpha = 270^\circ$ .
9.  $\alpha = 300^\circ$ .
10.  $\alpha = 360^\circ$ .

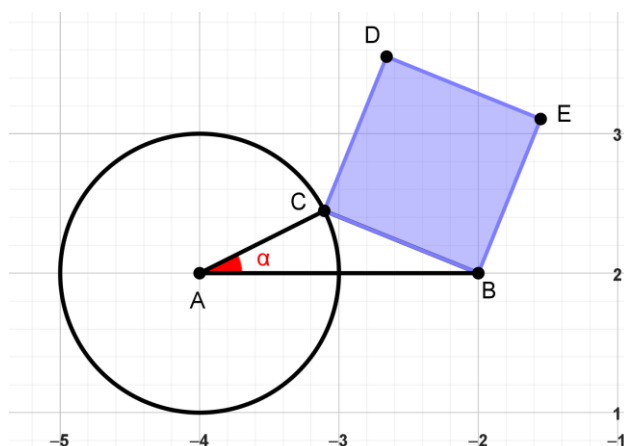
Construção: 2ª etapa.

Construa o gráfico cartesiano diretamente a partir da figura construída na 1ª etapa. Crie o ponto  $P$  digitando suas coordenadas no campo de entrada. Sua abscissa é  $\alpha = \widehat{BEF}$  e sua ordenada é a área do retângulo  $ADHG$ . Habilite o rastro do ponto  $P$  e movimente o ponto  $F$  sobre o círculo. Observe a trajetória descrita pelo ponto  $P$ .

Questões propostas:

11. Deduza uma fórmula que expresse a área do retângulo  $ADHG$  em função de  $\alpha$ .
12. Para quais valores de  $\alpha$  temos que  $ADHG$  possui área máxima? Qual o valor desta área máxima?
13. Para quais valores de  $\alpha$  temos a área mínima de  $ADHG$ ? Qual o valor desta área mínima?
14. Escreva o domínio e a imagem da função  $f(\alpha) = A_{ADHG}$ .

**Problema n° 04:** Construir um triângulo  $ABC$  com  $\overline{AB} = 2$  unidades, sendo  $A$  e  $B$  pontos fixos e  $C$  um ponto qualquer sobre o círculo de centro  $A$  e raio unitário. Seja o ângulo  $B\hat{A}C = \alpha$  com medida variando no sentido anti-horário, sendo  $\alpha$  um arco da 1ª volta. Construir o quadrado  $BCDE$ , e determinar sua área em função de  $\alpha$ .



Construção: 1ª etapa.

Traçar o segmento  $AB$ , de modo que  $\overline{AB} = 2$  unidades. Construir um círculo de raio unitário com centro em  $A$  e marcar um ponto  $C$  arbitrário sobre este círculo. Marcar o ângulo  $\alpha = B\hat{A}C$  no sentido anti-horário. Por fim, construir o quadrado  $BCDE$ . Investigar a variação da área de  $BCDE$  em função de  $\alpha$ .

Questão proposta:

Calcule a área do quadrado  $BCDE$  nos seguintes casos:

1.  $\alpha = 0^\circ$
2.  $\alpha = 45^\circ$
3.  $\alpha = 90^\circ$
4.  $\alpha = 120^\circ$
5.  $\alpha = 180^\circ$
6.  $\alpha = 210^\circ$
7.  $\alpha = 270^\circ$
8.  $\alpha = 300^\circ$
9.  $\alpha = 360^\circ$

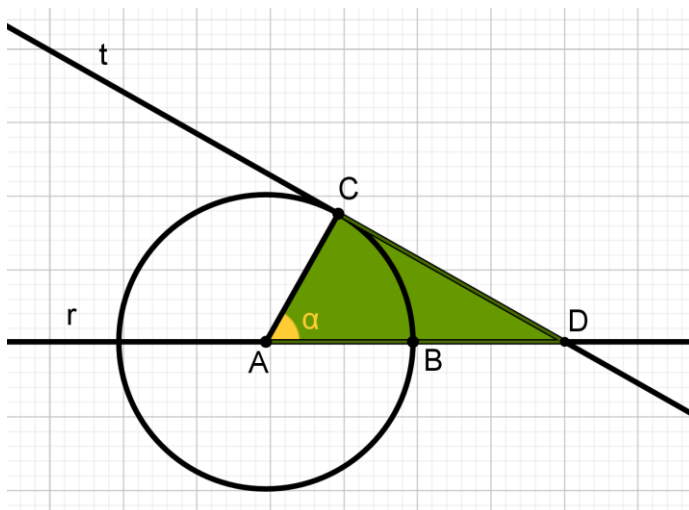
Construção: 2ª Etapa

Construa o gráfico cartesiano diretamente a partir da figura construída na 1ª etapa. Crie o ponto  $P$  digitando suas coordenadas no campo de entrada. Sua abscissa é  $\alpha = B\hat{A}C$  e sua ordenada é a área do quadrado  $BCDE$ . Habilite o rastro do ponto  $P$  e movimente o ponto  $C$  sobre o círculo. Observe a trajetória descrita pelo ponto  $P$ .

As questões propostas são:

10. Deduza uma fórmula que expresse a área do quadrado BCDE em função de  $\alpha$ .
11. Para quais valores de  $\alpha$  temos que BCDE possui área máxima? Qual o valor desta área máxima?
12. Para quais valores de  $\alpha$  temos a área mínima de ADHG? Qual o valor desta área mínima?
13. Escreva o domínio e a imagem da função  $f(\alpha) = A_{BCDE}$ .

**Problema nº 05:** Construir um círculo de centro  $A$  e raio medindo 2 unidades, e uma reta  $r$ , que passa por  $A$  e intersecciona o círculo em  $B$ . Seja  $C$  um ponto qualquer sobre este círculo, por este ponto traçamos uma reta  $t$ , tangente ao círculo. Seja  $D$  o ponto de intersecção das retas  $r$  e  $t$  e seja o ângulo  $D\hat{A}C = \alpha$  com medida variando no sentido anti-horário, sendo  $\alpha$  um arco da 1ª volta. Determinar a área do triângulo  $ACD$  em função de  $\alpha$ .



Construção: 1ª etapa.

Trace um círculo de centro  $A$  e raio  $\overline{AB} = 2$  unidades. Trace a reta  $r$  que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ , sendo  $B$  um ponto fixo do círculo. Marque um ponto  $C$  arbitrário sobre o círculo. Trace o segmento  $AC$  e trace a reta  $t$ , tangente ao círculo e que passa pelo ponto  $C$ , para isto basta construir a reta perpendicular à  $AC$  que passa por  $C$ . Marque o ponto  $D$  de intersecção das retas  $r$  e  $t$ . Marque o ângulo  $\alpha = D\hat{A}C$ , medido no sentido anti-horário. Investigue a área do triângulo  $ACD$  em função de  $\alpha$ .

Questões propostas:

Calcule a área do triângulo  $ACD$  quando:

1.  $\alpha = 0^\circ$

2.  $\alpha = 45^\circ$
3.  $\alpha = 60^\circ$
4.  $\alpha = 90^\circ$
5.  $\alpha = 150^\circ$
6.  $\alpha = 180^\circ$
7.  $\alpha = 240^\circ$
8.  $\alpha = 270^\circ$
9.  $\alpha = 330^\circ$
10.  $\alpha = 360^\circ$

Construção: 2ª etapa.

Construa um gráfico cartesiano que represente a variação da área do triângulo ACD em função da medida do ângulo  $\alpha = D\hat{A}C$ . Este gráfico será relacionado à figura construída na 1ª etapa. Para isto, digite no campo de entrada as coordenadas de um ponto P cuja abscissa é a medida do ângulo  $\alpha$ , e a ordenada é a medida da área do triângulo ACD. Movimente o ponto C sobre círculo e observe o rastro deixado pelo ponto P.

Questões propostas:

11. Deduza uma fórmula que expresse a área do triângulo ACD em função de  $\alpha$ .
12. Para quais valores de  $\alpha$  temos que ACD possui área máxima? Qual o valor desta área máxima?
13. Para quais valores de  $\alpha$  temos que ACD possui área mínima? Qual o valor desta área mínima?
14. Escreva o domínio e a imagem da função  $f(\alpha) = A_{ACD}$ .

### Apêndice 3 – Protocolos de construção gerados pelo software GeoGebra

#### Primeira Sequência de atividades – para estudantes do 1º ano do Ensino Médio

##### Problema nº 01

N.	Nome	Descrição	Valor
1	Ponto A		$A = (-5, 1)$
2	Reta f	Reta passando por A e perpendicular a Eixo Y	$f: y = 1$
3	Reta g	Reta passando por A e perpendicular a f	$g: x = -5$
4	Círculo c	Círculo com centro A e raio 4	$c: (x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 16$
5	Ponto B	Interseção de c, f	$B = (-1, 1)$
6	Reta h	Reta passando por B e perpendicular a f	$h: x = -1$
7	Círculo d	Círculo com centro B e raio 3	$d: (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$
8	Ponto C	Interseção de d, h	$C = (-1, 4)$
9	Reta i	Reta passando por C e perpendicular a h	$i: y = 4$
10	Ponto D	Interseção de g, i	$D = (-5, 4)$
11	Segmento j	Segmento A, B	$j = 4$
12	Segmento k	Segmento B, C	$k = 3$
13	Segmento l	Segmento C, D	$l = 4$
14	Segmento m	Segmento D, A	$m = 3$
15	Ponto E	Ponto sobre l	$E = (-1, 4)$
16	Triângulo t1	Polígono A, B, E	$t1 = 6$
17	Segmento e	Segmento A, B	$e = 4$
18	Segmento a	Segmento B, E	$a = 3$
19	Segmento b	Segmento E, A	$b = 5$
20	Segmento n	Segmento D, E	$n = 4$
21	Ponto P	$(n, t1)$	$P = (4, 6)$

##### Problema nº 02

N.	Nome	Descrição	Valor
1	Ponto A		$A = (-2, 1)$

2	Reta f	Reta passando por A e perpendicular a Eixo X	$f: x = -2$
3	Reta g	Reta passando por A e perpendicular a f	$g: y = 1$
4	Círculo c	Círculo com centro A e raio 5	$c: (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$
5	Ponto B	Interseção de c, g	$B = (-7, 1)$
6	Reta h	Reta passando por B e perpendicular a g	$h: x = -7$
7	Círculo d	Círculo com centro B e raio 4	$d: (x + 7)^2 + (y - 1)^2 = 16$
8	Ponto C	Interseção de d, h	$C = (-7, 5)$
9	Reta i	Reta passando por C e perpendicular a h	$i: y = 5$
10	Ponto D	Interseção de f, i	$D = (-2, 5)$
11	Segmento j	Segmento A, B	$j = 5$
12	Segmento k	Segmento B, C	$k = 4$
13	Segmento l	Segmento C, D	$l = 5$
14	Segmento m	Segmento D, A	$m = 4$
15	Ponto E	Ponto sobre k	$E = (-7, 3)$
16	Reta n	Reta passando por E e perpendicular a h	$n: y = 3$
17	Ponto F	Interseção de n, m	$F = (-2, 3)$
18	Segmento p	Segmento C, F	$p = 5,39$
19	Segmento q	Segmento D, E	$q = 5,39$
20	Segmento r	Segmento E, A	$r = 5,39$
21	Segmento s	Segmento F, B	$s = 5,39$
22	Ponto G	Interseção de p, q	$G = (-4,5, 4)$
23	Ponto H	Interseção de r, s	$H = (-4,5, 2)$
24	Quadrilátero q1	Polígono G, E, H, F	$q1 = 5$
25	Segmento g <sub>1</sub>	Segmento G, E	$g_1 = 2,69$
26	Segmento e	Segmento E, H	$e = 2,69$
27	Segmento h <sub>1</sub>	Segmento H, F	$h_1 = 2,69$
28	Segmento f <sub>1</sub>	Segmento F, G	$f_1 = 2,69$
29	Segmento t	Segmento B, E	$t = 2$
30	Ponto P	(t, q1)	$P = (2, 5)$

N.	Nome	Descrição	Valor
1	Ponto A		$A = (-3, 1)$
2	Reta f	Reta passando por A e perpendicular a Eixo X	$f: x = -3$
3	Reta g	Reta passando por A e perpendicular a f	$g: y = 1$
4	Círculo c	Círculo com centro A e raio 2	$c: (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$
5	Ponto B	Interseção de c, g	$B = (-1, 1)$
6	Reta h	Reta passando por B e perpendicular a g	$h: x = -1$
7	Círculo d	Círculo com centro B e raio Raio(c)	$d: (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$
8	Ponto C	Interseção de d, h	$C = (-1, 3)$
9	Reta i	Reta passando por C e perpendicular a h	$i: y = 3$
10	Ponto D	Interseção de f, i	$D = (-3, 3)$
11	Segmento j	Segmento A, B	$j = 2$
12	Segmento k	Segmento B, C	$k = 2$
13	Segmento l	Segmento C, D	$l = 2$
14	Segmento m	Segmento D, A	$m = 2$
15	Ponto E	Ponto sobre j	$E = (-1,86, 1)$
16	Círculo e	Círculo por E com centro A	$e: (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 1,31$
17	Ponto F	Interseção de e, m	$F = (-3, 2,14)$
18	Quadrilátero q1	Polígono A, E, C, F	$q1 = 2,29$
19	Segmento a	Segmento A, E	$a = 1,14$
20	Segmento e <sub>1</sub>	Segmento E, C	$e_1 = 2,18$
21	Segmento c <sub>1</sub>	Segmento C, F	$c_1 = 2,18$
22	Segmento f <sub>1</sub>	Segmento F, A	$f_1 = 1,14$
23	Ponto P	(a, q1)	$P = (1,14, 2,29)$

## Problema nº04

N.	Nome	Descrição	Valor
1	Ponto A		$A = (-3, 1)$
2	Reta f	Reta passando por A e perpendicular a Eixo X	$f: x = -3$
3	Reta g	Reta passando por A e perpendicular a f	$g: y = 1$

4	Círculo c	Círculo com centro A e raio 2	$c: (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$
5	Ponto B	Interseção de c, g	$B = (-1, 1)$
6	Reta h	Reta passando por B e perpendicular a g	$h: x = -1$
7	Círculo d	Círculo com centro B e raio Raio(c)	$d: (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$
8	Ponto C	Interseção de d, h	$C = (-1, 3)$
9	Reta i	Reta passando por C e perpendicular a h	$i: y = 3$
10	Ponto D	Interseção de f, i	$D = (-3, 3)$
11	Segmento j	Segmento A, B	$j = 2$
12	Segmento k	Segmento B, C	$k = 2$
13	Segmento l	Segmento C, D	$l = 2$
14	Segmento m	Segmento D, A	$m = 2$
15	Segmento n	Segmento A, C	$n = 2,83$
16	Ponto E	Ponto sobre n	$E = (-1,84, 2,16)$
17	Segmento p	Segmento E, B	$p = 1,43$
18	Segmento q	Segmento E, D	$q = 1,43$
19	Ponto F	Ponto médio de q	$F = (-2,42, 2,58)$
20	Ponto G	Ponto médio de p	$G = (-1,42, 1,58)$
21	Quadrilátero q1	Polígono C, F, E, G	$q1 = 0,84$
22	Segmento c <sub>1</sub>	Segmento C, F	$c_1 = 1,48$
23	Segmento f <sub>1</sub>	Segmento F, E	$f_1 = 0,72$
24	Segmento e	Segmento E, G	$e = 0,72$
25	Segmento g <sub>1</sub>	Segmento G, C	$g_1 = 1,48$
26	Segmento r	Segmento A, E	$r = 1,64$
27	Ponto P	(r, q1)	$P = (1,64, 0,84)$

## Problema n° 05

N.	Nome	Descrição	Valor
1	Ponto A		$A = (-4, 1)$
2	Reta f	Reta passando por A e perpendicular a Eixo X	$f: x = -4$
3	Reta g	Reta passando por A e perpendicular a f	$g: y = 1$

4	Círculo c	Círculo com centro A e raio 3	$c: (x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$
5	Ponto B	Interseção de c, g	$B = (-1, 1)$
6	Reta h	Reta passando por B e perpendicular a g	$h: x = -1$
7	Círculo d	Círculo com centro B e raio Raio(c)	$d: (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$
8	Ponto C	Interseção de d, h	$C = (-1, 4)$
9	Reta i	Reta passando por C e perpendicular a h	$i: y = 4$
10	Ponto D	Interseção de f, i	$D = (-4, 4)$
11	Segmento j	Segmento A, B	$j = 3$
12	Segmento k	Segmento B, C	$k = 3$
13	Segmento l	Segmento C, D	$l = 3$
14	Segmento m	Segmento D, A	$m = 3$
15	Ponto E	Ponto sobre j	$E = (-2,67, 1)$
16	Círculo e	Círculo por E com centro A	$e: (x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 1,76$
17	Ponto F	Interseção de e, m	$F = (-4, 2,33)$
18	Reta n	Reta passando por E e perpendicular a j	$n: x = -2,67$
19	Reta p	Reta passando por F e perpendicular a m	$p: y = 2,33$
20	Ponto G	Interseção de n, p	$G = (-2,67, 2,33)$
21	Ponto H	Interseção de p, k	$H = (-1, 2,33)$
22	Ponto I	Interseção de n, l	$Eu = (-2,67, 4)$
23	Quadrilátero q1	Polígono A, E, G, F	$q1 = 1,76$
24	Segmento a	Segmento A, E	$a = 1,33$
25	Segmento e <sub>1</sub>	Segmento E, G	$e_1 = 1,33$
26	Segmento g <sub>1</sub>	Segmento G, F	$g_1 = 1,33$
27	Segmento f <sub>1</sub>	Segmento F, A	$f_1 = 1,33$
28	Quadrilátero q2	Polígono G, H, C, I	$q2 = 2,81$
29	Segmento g <sub>2</sub>	Segmento G, H	$g_2 = 1,67$
30	Segmento h <sub>1</sub>	Segmento H, C	$h_1 = 1,67$
31	Segmento c <sub>1</sub>	Segmento C, I	$c_1 = 1,67$
32	Segmento i <sub>1</sub>	Segmento I, G	$i_1 = 1,67$
33	Ponto P	$(a, q1 + q2)$	$P = (1,33, 4,56)$

## Problema nº 06

N.	Nome	Descrição	Valor
1	Ponto A		$A = (-3, 1)$
2	Reta f	Reta passando por A e perpendicular a Eixo X	$f: x = -3$
3	Reta g	Reta passando por A e perpendicular a f	$g: y = 1$
4	Círculo c	Círculo com centro A e raio 2	$c: (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$
5	Ponto B	Interseção de c, g	$B = (-1, 1)$
6	Reta h	Reta passando por B e perpendicular a g	$h: x = -1$
7	Círculo d	Círculo com centro B e raio Raio(c)	$d: (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$
8	Ponto C	Interseção de d, h	$C = (-1, 3)$
9	Reta i	Reta passando por C e perpendicular a h	$i: y = 3$
10	Ponto D	Interseção de f, i	$D = (-3, 3)$
11	Segmento j	Segmento A, B	$j = 2$
12	Segmento k	Segmento B, C	$k = 2$
13	Segmento l	Segmento C, D	$l = 2$
14	Segmento m	Segmento D, A	$m = 2$
15	Ponto E	Ponto sobre j	$E = (-1,51, 1)$
16	Círculo e	Círculo com centro B e raio Segmento (A, E)	$e: (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2,22$
17	Círculo p	Círculo com centro C e raio Segmento (A, E)	$p: (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 2,22$
18	Círculo q	Círculo com centro D e raio Segmento (A, E)	$q: (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 2,22$
19	Ponto F	Interseção de e, k	$F = (-1, 2,49)$
20	Ponto G	Interseção de p, l	$G = (-2,49, 3)$
21	Ponto H	Interseção de q, m	$H = (-3, 1,51)$
22	Quadrilátero q1	Polígono E, F, G, H	$q1 = 2,48$
23	Segmento e <sub>1</sub>	Segmento E, F	$e_1 = 1,57$
24	Segmento f <sub>1</sub>	Segmento F, G	$f_1 = 1,57$
25	Segmento g <sub>1</sub>	Segmento G, H	$g_1 = 1,57$
26	Segmento h <sub>1</sub>	Segmento H, E	$h_1 = 1,57$
27	Segmento n	Segmento A, E	$n = 1,49$

28	Ponto P	(n, q1)	$P = (1,49, 2,48)$
----	---------	---------	--------------------

## Problema nº 07

N.	Nome	Descrição	Valor
1	Ponto A		$A = (-4, 1)$
2	Reta f	Reta passando por A e perpendicular a Eixo X	$f: x = -4$
3	Reta g	Reta passando por A e perpendicular a f	$g: y = 1$
4	Círculo c	Círculo com centro A e raio 3	$c: (x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$
5	Ponto B	Interseção de c, g	$B = (-1, 1)$
6	Reta h	Reta passando por B e perpendicular a g	$h: x = -1$
7	Círculo d	Círculo com centro B e raio 2	$d: (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$
8	Ponto C	Interseção de d, h	$C = (-1, 3)$
9	Reta i	Reta passando por C e perpendicular a h	$i: y = 3$
10	Ponto D	Interseção de f, i	$D = (-4, 3)$
11	Segmento j	Segmento A, B	$j = 3$
12	Segmento k	Segmento B, C	$k = 2$
13	Segmento l	Segmento C, D	$l = 3$
14	Segmento m	Segmento D, A	$m = 2$
15	Ponto E	Ponto médio de AD	$E = (-4, 2)$
16	Segmento n	Segmento A, E	$n = 1$
17	Ponto F	Ponto sobre n	$F = (-4, 1,64)$
18	Círculo e	Círculo por F com centro A	$e: (x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 0,41$
19	Círculo p	Círculo com centro B e raio Raio(e)	$p: (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 0,41$
20	Círculo q	Círculo com centro C e raio Raio(e)	$q: (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 0,41$
21	Círculo r	Círculo com centro D e raio Raio(e)	$r: (x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 0,41$
22	Ponto G	Interseção de e, j	$G = (-3,36, 1)$
23	Ponto H	Interseção de p, j	$H = (-1,64, 1)$
24	Ponto I	Interseção de p, k	$Eu = (-1, 1,64)$
25	Ponto J	Ponto de interseção de q, k	$J = (-1, 2,36)$
26	Ponto K	Interseção de q, l	$K = (-1,64, 3)$

27	Ponto L	Interseção de r, l	$L = (-3,36, 3)$
28	Ponto M	Ponto de interseção de r, m	$M = (-4, 2,36)$
29	Segmento s	Segmento F, I	$s = 3$
30	Segmento t	Segmento M, J	$t = 3$
31	Segmento a	Segmento H, K	$a = 2$
32	Segmento b	Segmento G, L	$b = 2$
33	Ponto N	Interseção de s, b	$N = (-3,36, 1,64)$
34	Ponto O	Interseção de a, s	$O = (-1,64, 1,64)$
35	Ponto P	Interseção de t, a	$P = (-1,64, 2,36)$
36	Ponto Q	Interseção de t, b	$Q = (-3,36, 2,36)$
37	Quadrilátero q1	Polígono G, H, O, N	$q1 = 1,1$
38	Segmento g <sub>1</sub>	Segmento G, H	$g_1 = 1,72$
39	Segmento h <sub>1</sub>	Segmento H, O	$h_1 = 0,64$
40	Segmento o	Segmento O, N	$o = 1,72$
41	Segmento n <sub>1</sub>	Segmento N, G	$n_1 = 0,64$
42	Quadrilátero q2	Polígono O, I, J, P	$q2 = 0,46$
43	Segmento o <sub>1</sub>	Segmento O, I	$o_1 = 0,64$
44	Segmento i <sub>1</sub>	Segmento I, J	$i_1 = 0,72$
45	Segmento j <sub>1</sub>	Segmento J, P	$j_1 = 0,64$
46	Segmento p <sub>1</sub>	Segmento P, O	$p_1 = 0,72$
47	Quadrilátero q3	Polígono P, K, L, Q	$q3 = 1,1$
48	Segmento p <sub>2</sub>	Segmento P, K	$p_2 = 0,64$
49	Segmento k <sub>1</sub>	Segmento K, L	$k_1 = 1,72$
50	Segmento l <sub>1</sub>	Segmento L, Q	$l_1 = 0,64$
51	Segmento q <sub>1</sub>	Segmento Q, P	$q_1 = 1,72$
52	Quadrilátero q4	Polígono Q, M, F, N	$q4 = 0,46$
53	Segmento q <sub>2</sub>	Segmento Q, M	$q_2 = 0,64$
54	Segmento m <sub>1</sub>	Segmento M, F	$m_1 = 0,72$
55	Segmento f <sub>1</sub>	Segmento F, N	$f_1 = 0,64$
56	Segmento n <sub>2</sub>	Segmento N, Q	$n_2 = 0,72$

57	Segmento $r_1$	Segmento A, F	$r_1 = 0,64$
58	Ponto R	$(r_1, q1 + q2 + q3 + q4)$	$R = (0,64, 3,12)$

## Problema n° 08

N.	Nome	Descrição	Valor
1	Ponto A		$A = (-3, 1)$
2	Reta f	Reta passando por A e perpendicular a Eixo X	$f: x = -3$
3	Reta g	Reta passando por A e perpendicular a f	$g: y = 1$
4	Círculo c	Círculo com centro A e raio 2	$c: (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$
5	Ponto B	Interseção de c, g	$B = (-1, 1)$
6	Reta h	Reta passando por B e perpendicular a g	$h: x = -1$
7	Círculo d	Círculo com centro B e raio Raio(c)	$d: (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$
8	Ponto C	Interseção de d, h	$C = (-1, 3)$
9	Reta i	Reta passando por C e perpendicular a h	$i: y = 3$
10	Ponto D	Interseção de f, i	$D = (-3, 3)$
11	Segmento j	Segmento A, B	$j = 2$
12	Segmento k	Segmento B, C	$k = 2$
13	Segmento l	Segmento C, D	$l = 2$
14	Segmento m	Segmento D, A	$m = 2$
15	Segmento n	Segmento A, C	$n = 2.83$
16	Segmento p	Segmento B, D	$p = 2.83$
17	Ponto E	Ponto sobre n	$E = (-2.42, 1.58)$
18	Ponto F	Interseção de n, p	$F = (-2, 2)$
19	Triângulo t1	Polígono D, B, E	$t1 = 0.85$
20	Segmento e	Segmento D, B	$e = 2.83$
21	Segmento $d_1$	Segmento B, E	$d_1 = 1.54$
22	Segmento b	Segmento E, D	$b = 1.54$
23	Segmento q	Segmento A, E	$q = 0.82$
24	Ponto P	$(q, t1)$	$P = (0.82, 0.85)$

## Problema n° 09

N.	Nome	Descrição	Valor
----	------	-----------	-------

1	Ponto A		$A = (-6, 4)$
2	Reta f	Reta passando por A e perpendicular a Eixo X	$f: x = -6$
3	Reta g	Reta passando por A e perpendicular a f	$g: y = 4$
4	Círculo c	Círculo com centro A e raio 3	$c: (x + 6)^2 + (y - 4)^2 = 9$
5	Círculo d	Círculo com centro A e raio 2	$d: (x + 6)^2 + (y - 4)^2 = 4$
6	Ponto B	Interseção de c, g	$B = (-3, 4)$
7	Ponto C	Interseção de c, g	$C = (-9, 4)$
8	Ponto D	Interseção de d, f	$D = (-6, 2)$
9	Ponto E	Interseção de d, f	$E = (-6, 6)$
10	Caminho Poligonal h	Caminho Poligonal C, E, B	$h = 7,21$
11	Caminho Poligonal i	Caminho Poligonal C, D, B	$i = 7,21$
12	Segmento j	Segmento C, B	$j = 6$
13	Segmento k	Segmento E, D	$k = 4$
14	Ponto F	Ponto sobre j	$F = (-5, 11, 4)$
15	Varejo	Reta passando por F e perpendicular a j	$l: x = -5, 11$
16	Ponto G	Interseção de l, h	$G = (-5, 11, 5, 4)$
17	Ponto H	Interseção de l, i	$H = (-5, 11, 2, 6)$
18	Pentágono pol1	Polígono C, E, G, H, D	$pol1 = 9,04$
19	Segmento c <sub>1</sub>	Segmento C, E	$c_1 = 3,61$
20	Segmento e	Segmento E, G	$e = 1,07$
21	Segmento g <sub>1</sub>	Segmento G, H	$g_1 = 2,81$
22	Segmento h <sub>1</sub>	Segmento H, D	$h_1 = 1,07$
23	Segmento d <sub>1</sub>	Segmento D, C	$d_1 = 3,61$
24	Segmento m	Segmento C, F	$m = 3,89$
25	Ponto P	$(m, pol1)$	$P = (3,89, 9,04)$

### Segunda Sequência de atividades – para estudantes do 3º ano do Ensino Médio

#### Problema nº 01

N.	Nome	Descrição	Valor
1	Ponto A		$A = (-2, 2)$

2	Círculo c	Círculo com centro A e raio 1	$c: (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$
3	Reta f	Reta passando por A e perpendicular a Eixo Y	$f: y = 2$
4	Ponto B	Interseção de c, f	$B = (-3, 2)$
5	Ponto C	Interseção de c, f	$C = (-1, 2)$
6	Ponto D	Ponto sobre c	$D = (-1, 2, 9, 2, 7)$
7	Ângulo $\alpha$	Ângulo entre C, A, D	$\alpha = 44,7^\circ$
8	Triângulo t1	Polígono C, D, B	$t1 = 0,7$
9	Segmento b	Segmento C, D	$b = 0,76$
10	Segmento c <sub>1</sub>	Segmento D, B	$c_1 = 1,85$
11	Segmento d	Segmento B, C	$d = 2$
12	Segmento g	Segmento A, D	$g = 1$
13	Ponto P	$(\alpha, t1)$	$P = (0,78, 0,7)$

## Problema n° 02

N.	Nome	Descrição	Valor
1	Ponto A		$A = (-4, 2)$
2	Reta f	Reta passando por A e perpendicular a Eixo X	$f: x = -4$
3	Reta g	Reta passando por A e perpendicular a f	$g: y = 2$
4	Círculo c	Círculo com centro A e raio 1	$c: (x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 1$
5	Ponto B	Interseção de c, f	$B = (-4, 1)$
6	Reta h	Reta passando por B e perpendicular a f	$h: y = 1$
7	Círculo d	Círculo com centro B e raio 3	$d: (x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$
8	Ponto C	Interseção de d, h	$C = (-1, 1)$
9	Reta i	Reta passando por C e perpendicular a h	$i: x = -1$
10	Ponto D	Interseção de g, i	$D = (-1, 2)$
11	Ponto E	Interseção de c, g	$E = (-3, 2)$
12	Círculo e	Círculo com centro E e raio Raio(c)	$e: (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$
13	Segmento j	Segmento A, B	$j = 1$

14	Segmento l	Segmento B, C	$l = 3$
15	Segmento m	Segmento C, D	$m = 1$
16	Segmento n	Segmento D, A	$n = 3$
17	Ponto F	Ponto sobre e	$F = (-2,22, 2,63)$
18	Círculo k	Círculo com centro D e raio Raio(c)	$k: (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$
19	Ponto G	Ponto de interseção de k, n	$G = (-2, 2)$
20	Reta p	Reta E, F	$p: -0,63x + 0,78y = 3,44$
21	Reta q	Reta passando por G e paralelamente a p	$q: -0,63x + 0,78y = 2,81$
22	Reta r	Reta passando por F e paralelamente a g	$r: y = 2,63$
23	Ponto H	Interseção de q, r	$H = (-1,22, 2,63)$
24	Ângulo $\alpha$	Ângulo entre Sol, Mi, Fá	$\alpha = 38,92^\circ$
25	Polígono pol1	Polígono A, B, C, D, G, H, F, E	$pol1 = 3,63$
26	Segmento a	Segmento A, B	$a = 1$
27	Segmento b	Segmento B, C	$b = 3$
28	Segmento c <sub>1</sub>	Segmento C, D	$c_1 = 1$
29	Segmento d <sub>1</sub>	Segmento D, G	$d_1 = 1$
30	Segmento g <sub>1</sub>	Segmento G, H	$g_1 = 1$
31	Segmento h <sub>1</sub>	Segmento H, F	$h_1 = 1$
32	Segmento f <sub>1</sub>	Segmento F, E	$f_1 = 1$
33	Segmento e <sub>1</sub>	Segmento E, A	$e_1 = 1$
34	Ponto P	$(\alpha, pol1)$	$P = (0,68, 3,63)$

## Problema nº 03

N.	Nome	Descrição	Valor
1	Ponto A		$A = (-3, 3)$
2	Reta f	Reta passando por A e perpendicular a Eixo X	$f: x = -3$
3	Reta g	Reta passando por A e perpendicular a f	$g: y = 3$
4	Círculo c	Círculo com centro A e raio 2	$c: (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 4$
5	Ponto B	Interseção de c, g	$B = (-1, 3)$

6	Círculo d	Círculo com centro B e raio Raio(c)	$d: (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$
7	Reta h	Reta passando por B e perpendicular a g	$h: x = -1$
8	Ponto C	Interseção de d, h	$C = (-1, 1)$
9	Reta i	Reta passando por C e perpendicular a h	$i: y = 1$
10	Ponto D	Interseção de f, i	$D = (-3, 1)$
11	Ponto E	Ponto médio de AB	$E = (-2, 3)$
12	Círculo e	Círculo por A com centro E	$e: (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$
13	Ponto F	Ponto sobre e	$F = (-1,24, 3,65)$
14	Reta j	Reta passando por F e perpendicular a g	$j: x = -1,24$
15	Ponto G	Interseção de j, g	$G = (-1,24, 3)$
16	Ponto H	Interseção de j, i	$H = (-1,24, 1)$
17	Segmento k	Segmento A, B	$k = 2$
18	Segmento l	Segmento B, C	$l = 2$
19	Segmento m	Segmento C, D	$m = 2$
20	Segmento n	Segmento D, A	$n = 2$
21	Quadrilátero q1	Polígono A, G, H, D	$q1 = 3,52$
22	Segmento a	Segmento A, G	$a = 1,76$
23	Segmento g <sub>1</sub>	Segmento G, H	$g_1 = 2$
24	Segmento h <sub>1</sub>	Segmento H, D	$h_1 = 1,76$
25	Segmento d <sub>1</sub>	Segmento D, A	$d_1 = 2$
26	Ângulo $\alpha$	Ângulo entre B, E, F	$\alpha = 40,61^\circ$
27	Ponto P	$(\alpha, q1)$	$P = (0,71, 3,52)$

## Problema nº 04

N.	Nome	Descrição	Valor
1	Ponto A		$A = (-4, 2)$
2	Reta f	Reta passando por A e perpendicular a Eixo Y	$f: y = 2$
3	Círculo c	Círculo com centro A e raio 2	$c: (x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 4$
4	Círculo d	Círculo com centro A e raio 1	$d: (x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 1$
5	Ponto B	Interseção de c, f	$B = (-2, 2)$

6	Ponto C	Ponto sobre d	$C = (-3.61, 2.92)$
7	Segmento g	Segmento A, C	$g = 1$
8	Ângulo $\alpha$	Ângulo entre B, A, C	$\alpha = 67.15^\circ$
9	Segmento h	Segmento C, B	$h = 1.86$
10	Reta i	Reta passando por C e perpendicular a h	$i: -1.61x + 0.92y = 8.51$
11	Reta j	Reta passando por B e perpendicular a h	$j: -1.61x + 0.92y = 5.07$
12	Círculo e	Círculo por B com centro C	$e: (x + 3.61)^2 + (y - 2.92)^2 = 3.45$
13	Círculo k	Círculo por C com centro B	$k: (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 3.45$
14	Ponto D	Interseção de e, i	$D = (-2.69, 4.53)$
15	Ponto E	Interseção de k, j	$E = (-1.08, 3.61)$
16	Quadrilátero q1	Polígono B, C, D, E	$q1 = 3.45$
17	Segmento b	Segmento B, C	$b = 1.86$
18	Segmento c1	Segmento C, D	$c1 = 1.86$
19	Segmento d1	Segmento D, E	$d1 = 1.86$
20	Segmento e1	Segmento E, B	$e1 = 1.86$
21	Ponto P	$(\alpha, q1)$	$P = (1.17, 3.45)$

## Problema nº 05

N.	Nome	Descrição	Valor
1	Ponto A		$A = (-4, 3)$
2	Reta f	Reta passando por A e perpendicular a Eixo Y	$f: y = 3$
3	Círculo c	Círculo com centro A e raio 2	$c: (x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$
4	Ponto B	Interseção de c, f	$B = (-2, 3)$
5	Ponto C	Ponto sobre c	$C = (-3.24, 4.85)$
6	Ângulo $\alpha$	Ângulo entre B, A, C	$\alpha = 67,69^\circ$
7	Segmento g	Segmento A, C	$g = 2$
8	Reta h	Reta passando por C e perpendicular a g	$h: -0,76x - 1,85y = -6,51$
9	Ponto D	Interseção de h, f	$D = (1,27, 3)$
10	Triângulo t1	Polígono A, C, D	$t1 = 4,88$

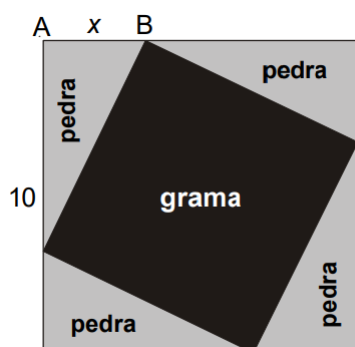
11	Segmento d	Segmento A, C	$d = 2$
12	Segmento a	Segmento C, D	$a = 4,88$
13	Segmento $c_1$	Segmento D, A	$c_1 = 5,27$
14	Ponto P	$(\alpha, t1)$	$P = (1,18, 4,88)$

## Anexos

## Anexo 1 – Questões da OBMEP que relacionam Geometria e Funções

## OBMEP 2005, Nível 3, 2ª Fase. Questão 4.

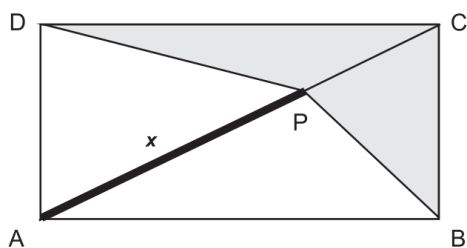
Um prefeito quer construir uma praça quadrada de 10 m de lado, que terá quatro canteiros triangulares de pedra e um canteiro quadrado de grama, como na figura. O prefeito ainda não decidiu qual será a área do canteiro de grama, e por isso o comprimento do segmento AB está indicado por  $x$  na figura.

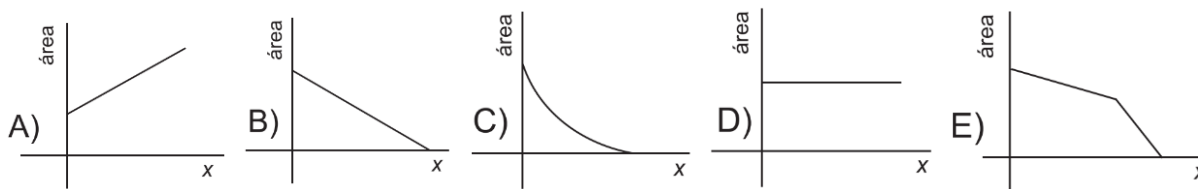


- Calcule a área do canteiro de grama para  $x = 2$ .
- Escreva a expressão da área do canteiro de grama em função de  $x$ . Sabe-se que o canteiro de grama custa R\$ 4,00 por metro quadrado e os canteiros de pedra custam R\$ 3,00 por metro quadrado. Use esta informação para responder aos dois itens a seguir.
- Qual a menor quantia que o prefeito deve ter para construir os cinco canteiros?
- Se o prefeito tem apenas R\$ 358,00 para gastar com os cinco canteiros, qual é a área do maior canteiro de grama que a praça poderá ter?

## OBMEP 2007, Nível 3, 1ª fase. Questão 18.

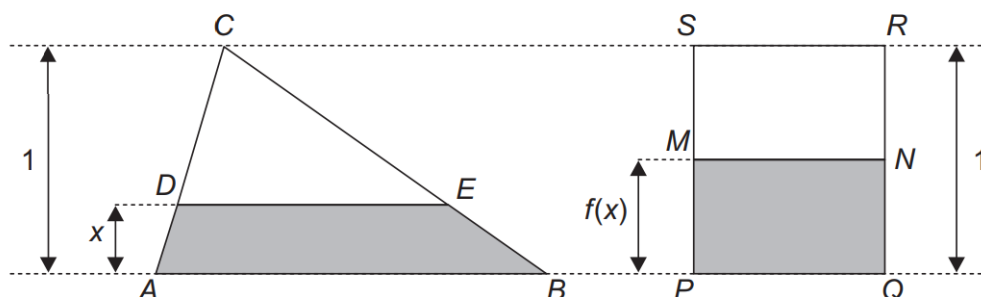
Qual dos gráficos abaixo descreve a variação da área do polígono BCDP em função da distância  $x = AP$ ?



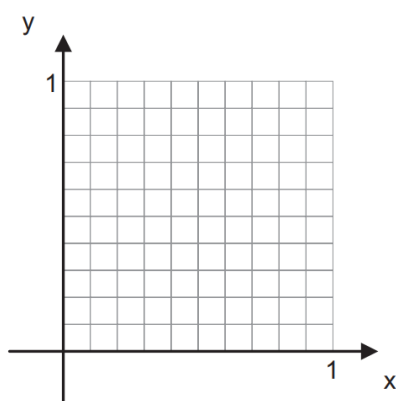


**OBMEP 2008, Nível 3, 2ª fase. Questão 3.**

Na figura, o triângulo ABC e o retângulo PQRS têm a mesma área e a mesma altura 1. Para cada valor de  $x$  entre 0 e 1 desenha-se o trapézio ABED de altura  $x$  e depois o retângulo PQNM de área igual à do trapézio, como na figura. Seja  $f$  a função que associa a cada  $x$  a altura do retângulo PQNM.

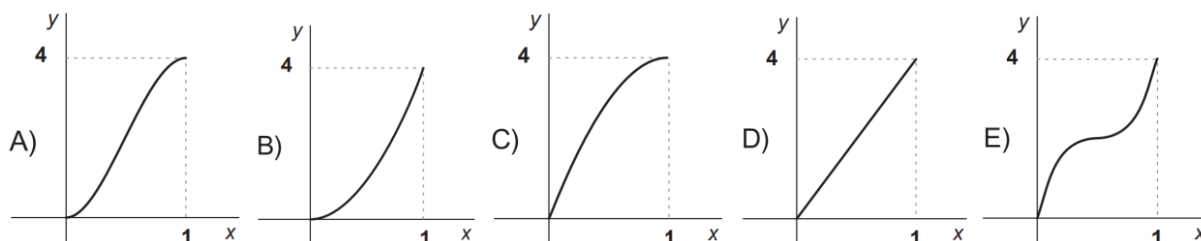
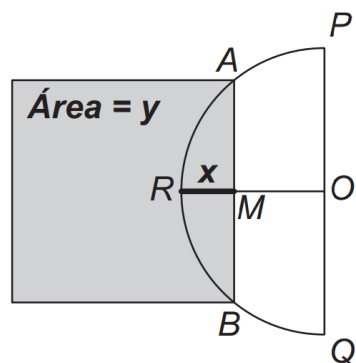


- (a) Qual é a razão entre AB e PQ?
- (b) Qual é o valor de  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ?
- (c) Ache a expressão de  $f(x)$  e desenhe o gráfico de  $f$ .



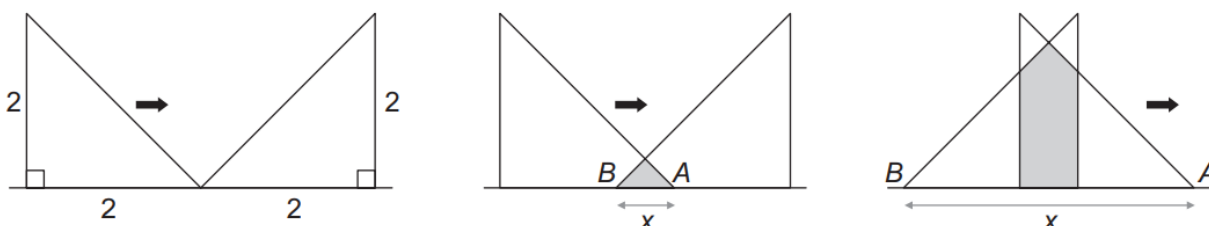
**OBMEP 2009, Nível 3, 1ª fase. Questão 19.**

O semicírculo da figura tem centro  $O$  e diâmetro  $PQ = 2$  cm. O raio  $OR$  é perpendicular a  $PQ$ . Por um ponto qualquer  $M$  de  $OR$  traça-se a corda  $AB$  perpendicular a  $OR$ . Sejam  $x$  o comprimento de  $RM$ , em cm, e  $y$  a área do quadrado de lado  $AB$ , em  $\text{cm}^2$ . Qual dos gráficos abaixo expressa a relação entre  $x$  e  $y$ ?



**OBMEP 2009, Nível 3, 2ª fase. Questão 5.**

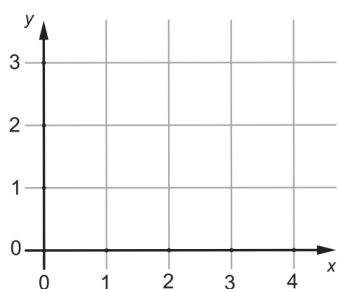
Dois triângulos retângulos isósceles com catetos de medida 2 são posicionados como mostra a figura 1. A seguir, o triângulo da esquerda é deslocado para a direita. Nas figuras 2 e 3,  $x$  indica a distância entre os vértices  $A$  e  $B$  dos dois triângulos.



Para cada  $x$  no intervalo  $[0,4]$ , seja  $f(x)$  a área da região comum aos dois triângulos (em cinza nas figuras).

(a) Calcule  $f(1)$  e  $f(3)$ .

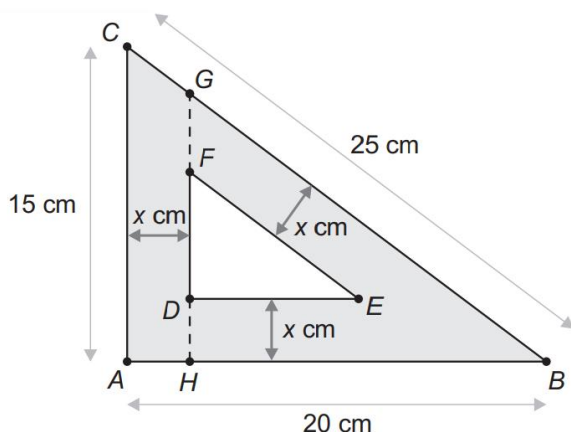
(b) Encontre as expressões de  $f$  nos intervalos  $[0,2]$  e  $[2,4]$  e esboce o seu gráfico.



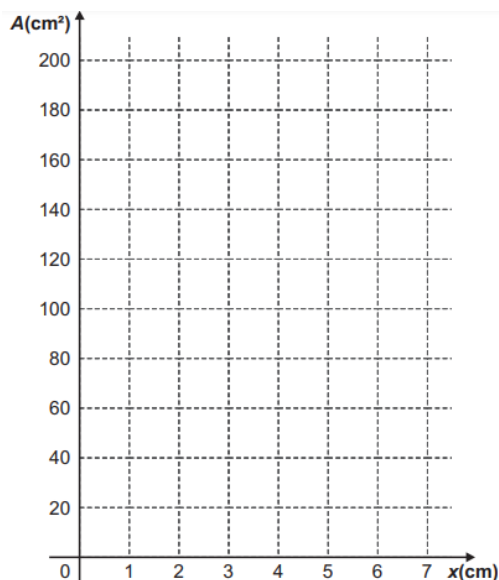
(c) Qual é a área máxima da região comum aos dois triângulos?

**OBMEP 2011, Nível 3, 2ª fase. Questão 4.**

Na figura, os lados do triângulo DEF são paralelos aos lados do triângulo retângulo ABC. Os pontos H, D, F e G estão alinhados e  $0 \leq x \leq 5$ .

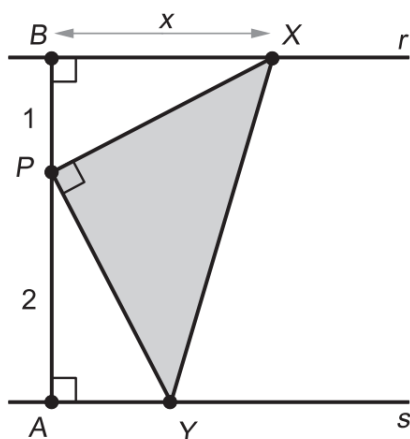


- Calcule o comprimento de GH em função de  $x$ .
- Mostre que  $CG = FG = \frac{5x}{4}$  cm.
- Faça o gráfico da área  $A$  do triângulo DEF em função de  $x$ .



**OBMEP 2012, Nível 3, 2ª fase. Questão 4.**

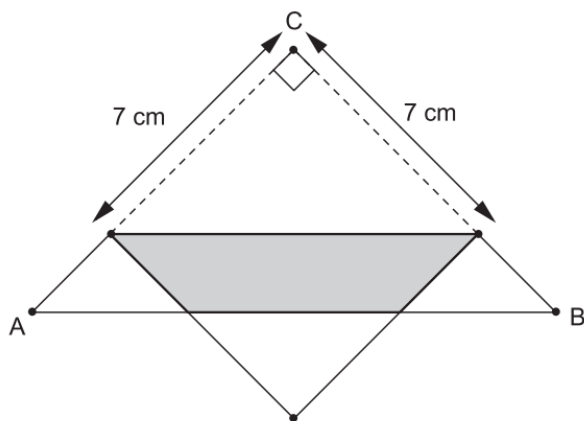
Na figura abaixo, as retas  $r$  e  $s$  são paralelas. O segmento  $AB$  é perpendicular a essas retas e o ponto  $P$ , nesse segmento, é tal que  $AP = 2$  e  $BP = 1$ . O ponto  $X$  pertence à reta  $r$  e a medida do segmento  $BX$  é indicada por  $x$ . O ponto  $Y$  pertence à reta  $s$  e o triângulo  $XPY$  é retângulo em  $P$ .



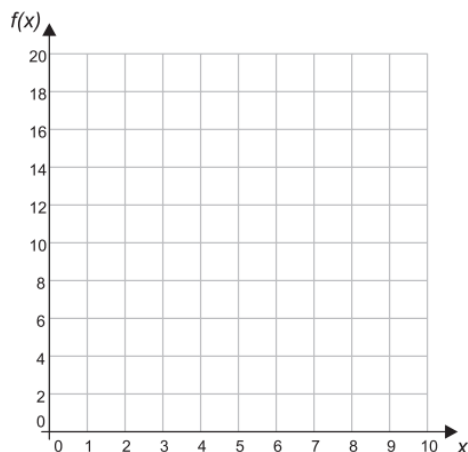
- Explique por que os triângulos PAY e XBP são semelhantes.
- Calcule a área do triângulo XPY em função de  $x$ .
- Para quais valores de  $x$  a área do triângulo XPY é igual a  $\frac{5}{2}$ ?
- Determine o valor de  $x$  para o qual a área do triângulo XPY é mínima e calcule o valor dessa área.

**OBMEP 2013, Nível 3, 2ª fase. Questão 4.**

A figura mostra um triângulo de papel ABC, retângulo em C e cujos catetos medem 10 cm. Para cada número  $x$  tal que  $0 \leq x \leq 10$ , marcam-se nos catetos os pontos que distam  $x$  cm do ponto C e dobra-se o triângulo ao longo da reta determinada por esses pontos. Indicamos por  $f(x)$  a área, em  $\text{cm}^2$ , da região onde ocorre sobreposição de papel. Por exemplo, na figura ao lado a área da região cinzenta, em  $\text{cm}^2$ , é  $f(7)$ .



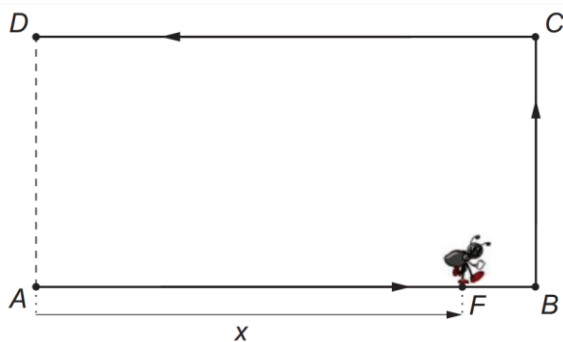
- Calcule  $f(2)$ ,  $f(5)$  e  $f(7)$ .
- Escreva as expressões de  $f(x)$  para  $0 \leq x < 5$  e  $5 \leq x \leq 10$ .
- Faça o gráfico de  $f(x)$  em função de  $x$ .



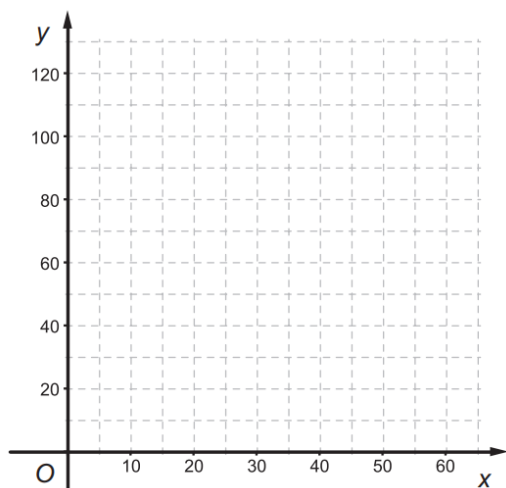
d) Determine o maior valor possível para a área da região de sobreposição.

**OBMEP 2014, Nível 3, 2ª fase. Questão 2.**

Uma formiga anda sobre o contorno de um retângulo ABCD. Ela parte do ponto A, anda 20 centímetros até chegar em B, depois anda mais 10 centímetros até chegar em C e finaliza seu trajeto em D. Após andar  $x$  centímetros, a formiga está em um ponto F do contorno.

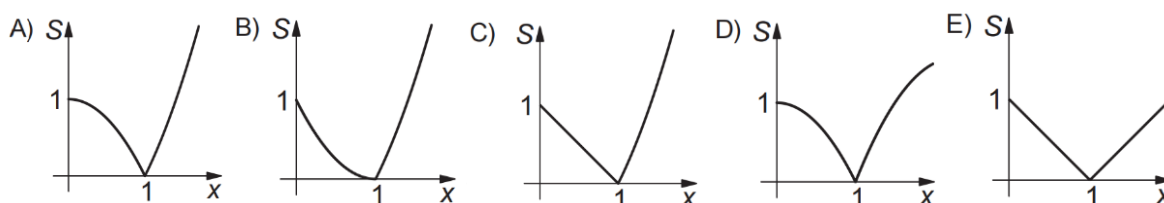
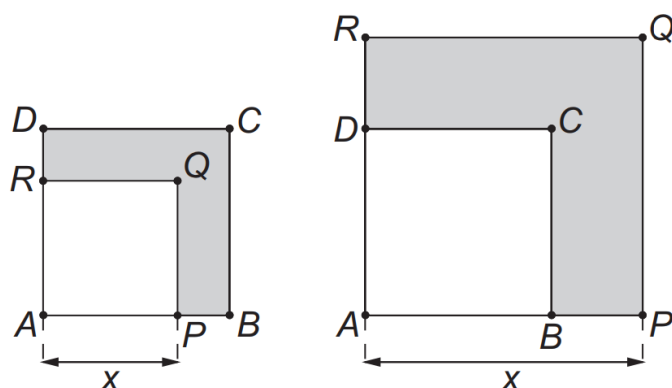


- Quantos centímetros a formiga anda em seu trajeto de A até D?
- Calcule a área do triângulo ADF quando  $x = 22$  centímetros.
- Qual é a maior área possível para um triângulo ADF?
- Esboce, no plano cartesiano  $Oxy$ , o gráfico da função que associa ao comprimento  $x$  o valor da área do triângulo ADF.



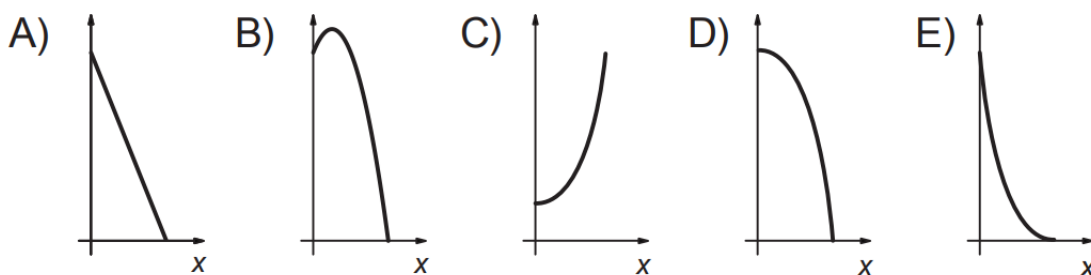
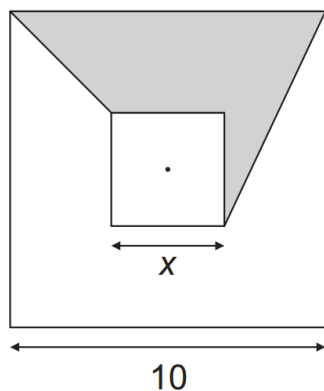
**OBMEP 2015, Nível 3, 1ª fase. Questão 13.**

Um quadrado ABCD tem área 1. Um ponto P desloca-se ao longo da semirreta AB, partindo do ponto A para a direita, conforme mostra a figura. Se  $S$  é a área da região compreendida entre os quadrados ABCD e APQR, destacada em cinza, qual é o gráfico que melhor representa a variação de  $S$  em função de  $x$ ?



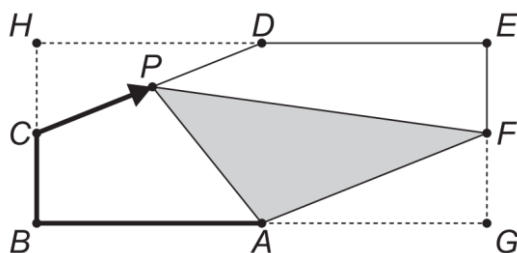
**OBMEP 2016, Nível 3, 1ª fase. Questão 11.**

Os quadrados da figura têm lados paralelos e o mesmo centro. O quadrado maior tem lado 10 e o menor tem lado  $x$ . Qual é o gráfico que expressa a área da região cinza em função de  $x$ ?

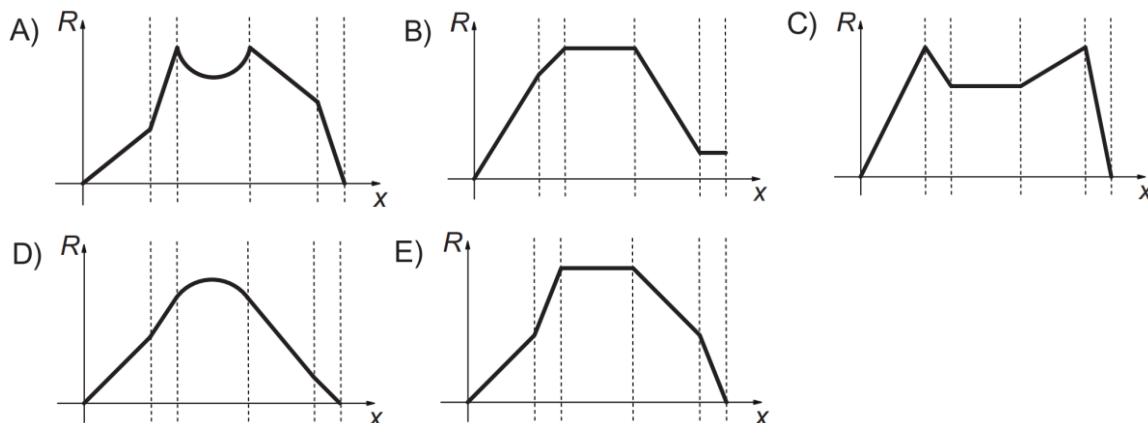


**OBMEP 2017, Nível 3, 1ª fase. Questão 15.**

Na figura abaixo,  $BHEG$  é um retângulo com  $BG > BH$ , e  $A, C, D, F$  são pontos médios de seus respectivos lados. Um ponto  $P$  desloca-se ao longo da poligonal  $ABCDEF$ , partindo de  $A$  até o ponto  $F$ .

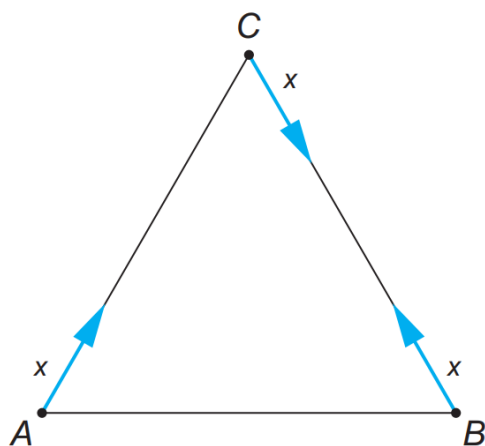


Qual é o gráfico que melhor representa a área  $R(x)$  do triângulo  $APF$  em função da distância  $x$  percorrida pelo ponto  $P$  ao longo dessa poligonal?

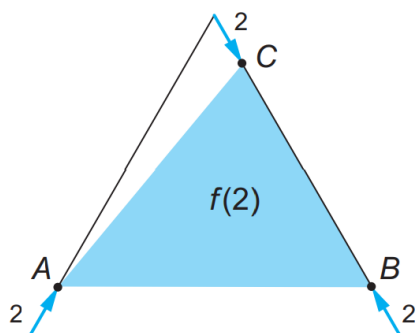


**OBMEP 2017, Nível 3, 2ª fase. Questão 3.**

O triângulo da figura abaixo é equilátero e seus lados medem 10 cm. Os pontos A, B e C, inicialmente nos vértices do triângulo, deslocam-se sobre seus lados, de um vértice a outro, com a mesma velocidade. Os pontos A e C deslocam-se no sentido horário, e o ponto B desloca-se no sentido anti-horário. Seja  $x$  a distância em centímetros percorrida pelos pontos A, B e C, no intervalo  $0 \leq x \leq 10$ . Seja  $f(x)$  a área do triângulo ABC quando  $x$  é tal que A, B e C formam um triângulo e  $f(x) = 0$ , caso contrário.

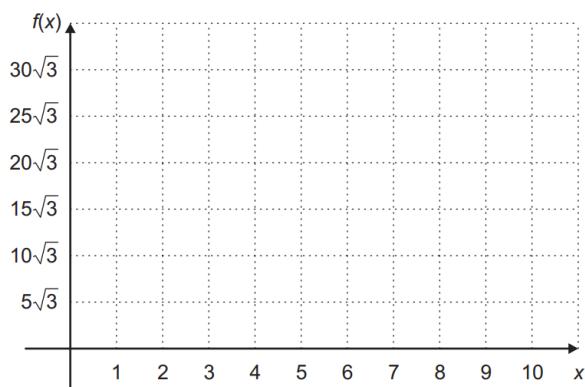


a) Calcule  $f(2)$ .



b) Para quais valores de  $x$ ,  $0 \leq x \leq 10$ , tem-se  $f(x) = 0$ ?

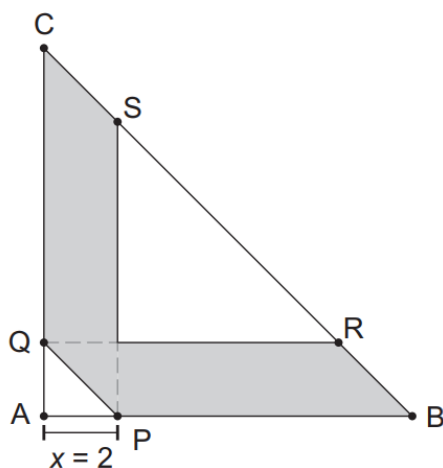
c) Esboce o gráfico de  $f(x)$  para  $0 \leq x \leq 10$ .



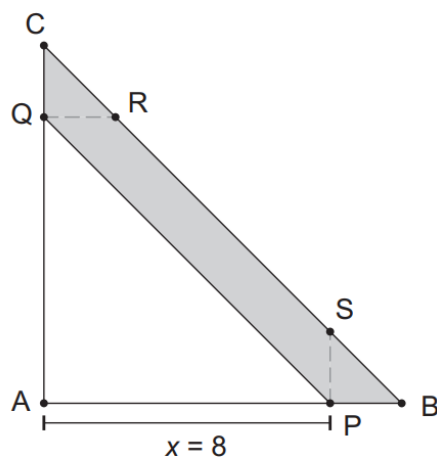
**OBMEP 2018, Nível 3, 2ª fase. Questão 4.**

O triângulo retângulo ABC tem catetos de medidas  $AB = 10$  e  $AC = 10$ . O ponto P sobre o lado AB está a uma distância  $x$  de A. O ponto Q sobre o lado AC é tal que PQ é paralelo a BC. Os pontos R e S sobre BC são tais que QR é paralelo a AB e PS é paralelo a AC. A união dos paralelogramos PBRQ e PSCQ determina uma região cinza de área  $f(x)$  no interior do triângulo ABC.

a) Calcule  $f(2)$ .



b) Calcule  $f(8)$ .

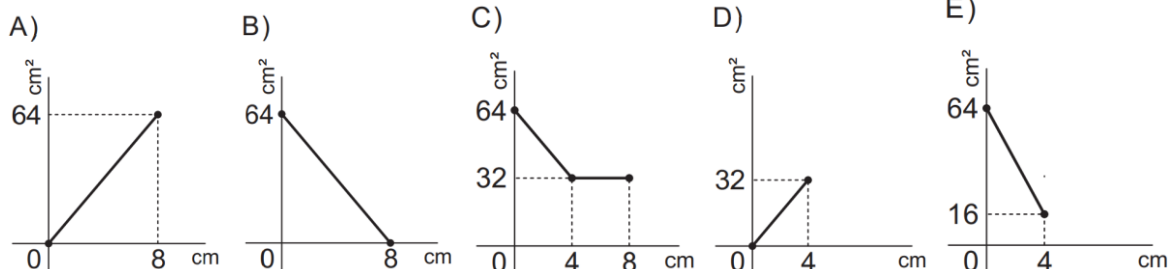
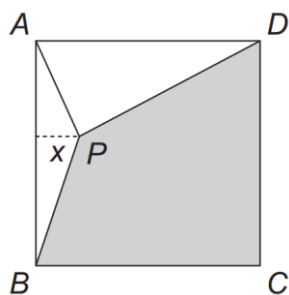


c) Encontre a expressão de  $f(x)$  para  $0 \leq x \leq 10$ .

d) Para qual valor de  $x$  a área  $f(x)$  é máxima?

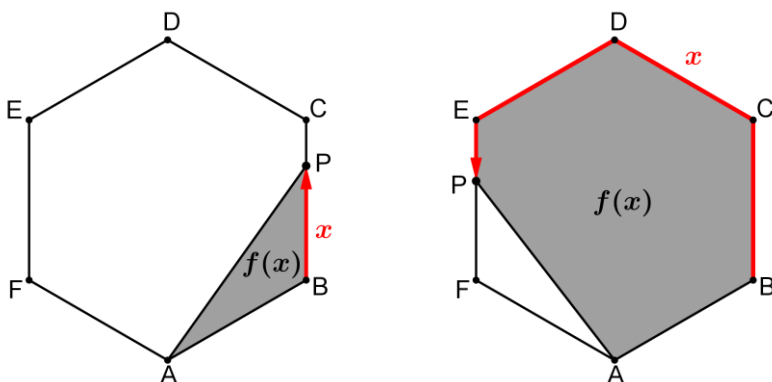
**OBMEP 2019, Nível 3, 1ª fase. Questão 13.**

O quadrado ABCD tem 8 cm de lado. O ponto P, no interior do quadrado, é tal que a área do triângulo APD é o dobro da área do triângulo ABP. Seja  $x$  a distância, em centímetros, do ponto P ao lado AB. Qual é o gráfico da área da região destacada em cinza em função de  $x$ ?



**OBMEP 2024, Nível 3, 2ª fase. Questão 3.**

Um hexágono regular  $ABCDEF$  tem lados de medida 1. Um ponto  $P$  desloca-se na borda do hexágono, a partir do vértice  $B$ , passando pelos vértices  $C$ ,  $D$  e  $E$  até chegar ao vértice  $F$ . Seja  $x$  a distância percorrida pelo ponto  $P$  e seja  $f(x)$  a área da região com vértices em  $P$ ,  $A$  e outros vértices do hexágono pelos quais  $P$  já passou. A figura mostra algumas dessas regiões.



- Calcule  $f(1)$ .
- Determine a expressão de  $f(x)$  quando  $P$  se desloca no lado  $DE$ .
- Esboce abaixo o gráfico de  $f$ .

